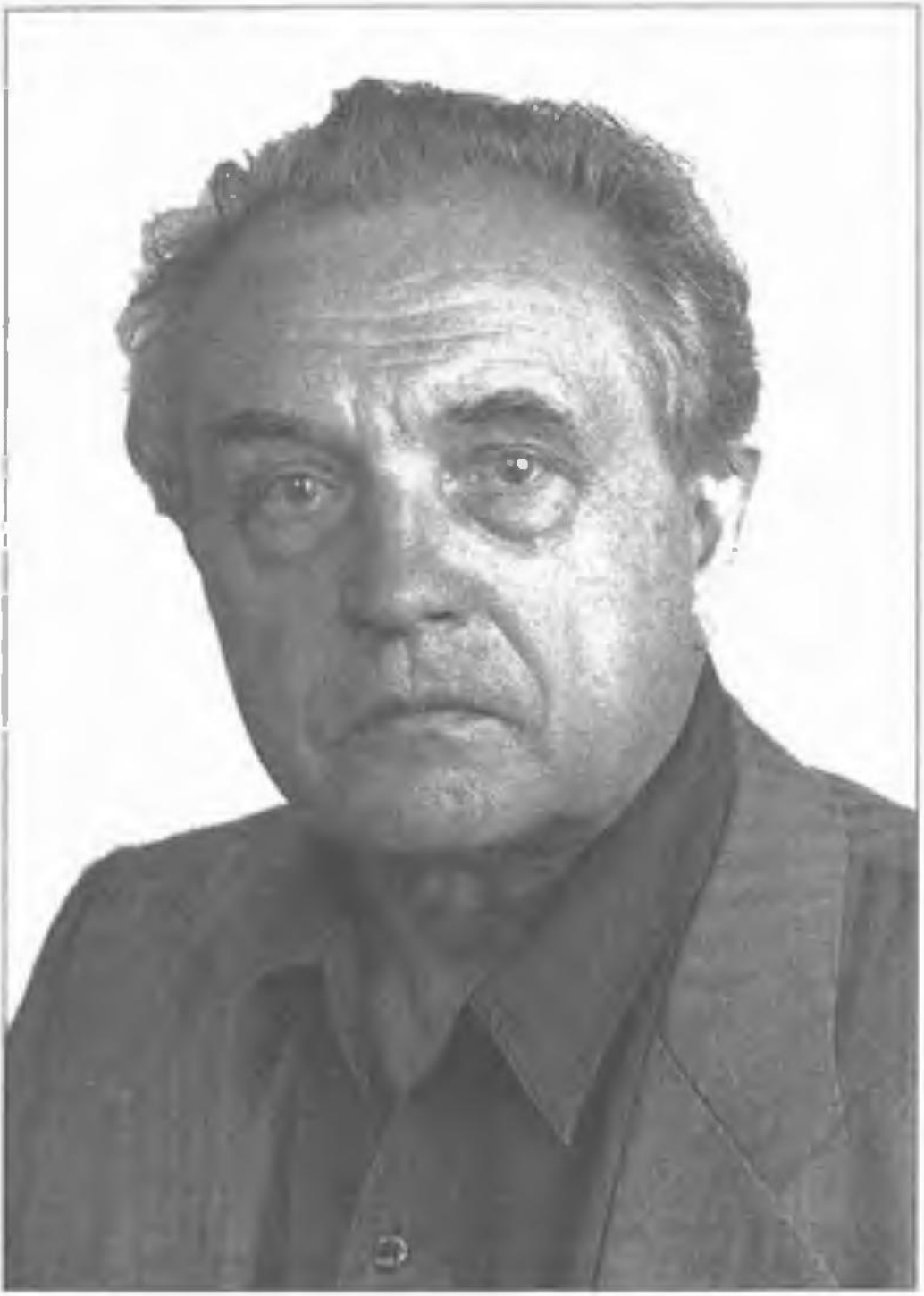


А. Зиновьев

Очерки
КОМПЛЕКСНОЙ ЛОГИКИ

Ответственный редактор
Е. А. Сидоренко



Эдиториал УРСС · Москва · 2000

Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 99-03-16144)

Зиновьев Александр Александрович

Очерки комплексной логики. Под ред. Е А Сидоренко

М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 560 с

ISBN 5-8360-0125-1

В книге известного логика, философа и писателя А А Зиновьева изложена разработанная автором логическая теория, названная комплексной логикой Эта логика специально ориентирована на применение в области методологии науки С этой целью осуществляется радикальное расширение ее сферы за счет логической экспликации языковых выражений, которые фигурируют в языке опытных наук Это, в частности, терминология, относящаяся к пространству, времени, изменениям, эмпирическим связям.

Книга рассчитана на читателей, интересующихся проблемами современной логики, возможностями ее специальных приложений.

Группа подготовки издания:

Директор — Доминго Марин Рикой
Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Макеева
Компьютерный дизайн — Виктор Романов
Верстка — Наталия Бекетова, Михаил Кириллов
Редакционно-корректурные работы — Елена Кудряшова, Анна Шабалина
Обработка графики — Елена Ефремова
Обработка текста — Наталья Аринчева,
Вадим Устянский, Анна Тюрина

Издательство «Эдиториал УРСС» 113208, г Москва, ул Чертановская, д 2/11, к п
Лицензия ЛР № 064418 от 24 01 96 г Гигиенический сертификат на выпуск книжной продукции № 77 ФЦ 8 953 П 270 3 99 от 30 03 99 г Подписано к печати 11 05 2000 г
Формат 60×88/16 Тираж 1000 экз Печ л 35 Зак № *Зак № 1024*

Отпечатано в АООТ «Политех-4» 129110, г Москва, ул Б Переяславская, 46

ISBN 5-8360-0125-1

© Эдиториал УРСС, 2000

Оглавление

Предисловие **14**

Раздел I
Комплексная логика (введение) **18**

Глава 1. Исходные предпосылки **18**

§ 1. Раздвоение логики 18
§ 2. Исследователь 20
§ 3. Термины и высказывания 21
§ 4 Логические операторы 23
§ 5. Правила логики 24
§ 6. Онтологические утверждения в логике 26
§ 7. Универсальность логики 28
§ 8 Логические исчисления 30

Глава 2. Частная теория терминов и высказываний **31**

§ 1. Предмет частной теории терминов и высказываний 31
§ 2 Индивиды 31
§ 3. Классы (множества) 32
§ 4. Отношения классов 33
§ 5. Скопления 35
§ 6. Состояния, события 36
§ 7 Существование 37
§ 8. Кванторы и существование 40
§ 9. Модальные предикаты 41
§ 10. Возможность 42
§ 11. Случайность 44
§ 12. Фатализм 46
§ 13. Модальные операторы 48
§ 14 Актуальное, экзистенциальное, потенциальное 48
§ 15 Измерение возможности 49
§ 16. Отношения 50
§ 17. Сравнение 51
§ 18. Отношение порядка 53
§ 19 Отношение «между» 54
§ 20. Существование отношений 55
§ 21 Упорядоченный ряд 55
§ 22. Соприкосновение 57
§ 23 Непрерывность и прерывность эмпирического ряда 58
§ 24 Начало и конец ряда 59
§ 25 Интервал 61
§ 26. Протяженность 62

§ 27. Абстрактные ряды 64
§ 28. Конечные и бесконечные ряды 65
§ 29. Структура 66
§ 30. Существование структуры 69
§ 31. Протяженность и порядок структур 70
§ 32. Соответствие 71
§ 33. Соответствие классов 72
§ 34. Функция 73
§ 35. Упорядоченные состояния 74
§ 36. Условные высказывания с отношением порядка 75
§ 37. Функциональная зависимость 75
§ 38. Связи 77
§ 39. Упорядочивание классов 78
§ 40. Эпистемическая логика 79
§ 41. О понятии веры 87
§ 42. О понятии предпочтения 87
§ 43. О логике оценок 90
§ 44. О логике норм и вопросов 92

Раздел II
Очерк многозначной логики **93**

Глава 1. Двузначная логика **93**
§ 1. Двузначная логика 93
§ 2. Двузначная пропозициональная логика 94
§ 3. Классическое пропозициональное исчисление 96
§ 4. Двузначная концепция логики 98

Глава 2. Возникновение многозначной логики **100**
§ 1. Понятие многозначной логики 100
§ 2. Трехзначная логика Лукасевича 101
§ 3. Другие системы Лукасевича 104
§ 4. Многозначная логика Поста 106
§ 5. Возникновение многозначной концепции логики 107

Глава 3. Аппарат многозначной логики **111**
§ 1. Аппарат многозначной логики 111
§ 2. Гипотезы многозначности 111
§ 3. Функции 112
§ 4. Функциональная полнота 114
§ 5. Тавтологии 114
§ 6. Аксиоматизация 115
§ 7. Логика предикатов 117

Глава 4. Двузначная и многозначная логика **122**
§ 1. Принципы двузначности и многозначности 122
§ 2. Двузначные и многозначные функции 123
§ 3. Отрицание 126
§ 4. Двузначные и многозначные формулы 128
§ 5. Двузначные и многозначные тавтологии 129
§ 6. Основные законы логики 130
§ 7. Непротиворечивость 131
§ 8. Построение многозначной логики средствами двузначной 132
§ 9. Сравнение аксиоматизаций 133
§ 10. Двузначные и многозначные кванторы 134
§ 11. Переходы 135
§ 12. Двузначные формулы в многозначной логике 136
§ 13. Привилегированность двузначной логики 136
§ 14. Множественность и единство логики 138

Глава 5. Многозначная концепция логики **140**
§ 1. Эмпирические основания логики 140
§ 2. Многозначность высказываний 142
§ 3. Значения истинности 146
§ 4. Основные и производные значения истинности 148
§ 5. Функция истинности 149
§ 6. Многозначные функции как виды связей 151

Глава 6. Приложения многозначной логики в логике **153**
§ 1. Приложения многозначной логики 153
§ 2. Формальные приложения 153
§ 3. Смысловые приложения 156
§ 4. Парадокс изменения 163
§ 5. Многозначность высказываний и правила вывода 167

Глава 7. Универсальность логики **169**
§ 1. Проблема неуниверсальности логики 169
§ 2. Законы логики 169
§ 3. «Неуниверсальные» законы логики 171
§ 4. Логика и сферы мира 172

Литература **174**

Раздел III
Логическое следование **178**

§ 1. Одна особенность современной логики 178
§ 2. Классическая теория логического следования 180
§ 3. Льюисовское направление 181
§ 4. Новая постановка проблемы 183
§ 5. Смысл высказываний 185
§ 6. Значения истинности 186
§ 7. Вывод и значения истинности высказываний 188

§ 8. Структура посылок и следствий 189
§ 9. Логические знаки 190
§ 10. Различные формы логического следования 192
§ 11. Определение логических знаков 193
§ 12. Вырожденные случаи 196
§ 13. Теория логического следования 196
§ 14. Пример аксиоматизации теории логического следования 199
§ 15. «Парадоксы» сильного следования 202
Заключение 203

Литература **204**

Раздел IV
Нетрадиционная теория вывода **207**

§ 1. Классическая теория следования 207
§ 2. Критика классической теории логического следования 208
§ 3. Строгая импликация 209
§ 4. В чем суть проблемы 211
§ 5. Высказывания о следовании 212
§ 6. Основной принцип дедукции 213
§ 7. Логическое следование и значения истинности высказываний . 214
§ 8. Логическое следование и смысл высказываний 215
§ 9. Определения логических операторов 217
§ 10. Экспликация интуиции 217
§ 11. Аксиоматизация 219
§ 12. Теория сильного логического следования 219
§ 13. Другие системы общей теории логического следования 222
§ 14. Вырожденное следование 223
§ 15. Теория предикации 224
§ 16. Классическая теория логического следования для высказываний с кванторами 226
§ 17. Теория кванторов 227
§ 18. Условные высказывания 231
§ 19. Теория терминов 232
§ 20. Субъектно-предикатные термины 234
§ 21. Смысловые отношения терминов и высказываний 235
§ 22. Многозначная логика и теория логического следования 236
§ 23. Интуиционистская логика 239

Раздел V
Квазиследование и физическое следование **242**

§ 1. Условные высказывания 242
§ 2. Квазиследование 243
§ 3. Дедуктивные свойства квазиследования 243
§ 4. Условия 245

§ 5. Физическое следование 246
§ 6. Значения истинности 248
§ 7. Дедуктивные свойства физического следования 249

Раздел VI
Нетрадиционная теория кванторов 252

Введение 252
§ 1. Значение индивидных переменных 253
§ 2. Парадоксы традиционной теории кванторов 255
§ 3. Две формы отрицания 257
§ 4. Квантификация предикатов 258
§ 5. Семантические правила 259
§ 6. Некоторые интуитивные соображения 259
§ 7. Исчисления теории кванторов 262
§ 8. Система Q^1 263
§ 9. Система Q^2 264
§ 10. Непротиворечивость 264
§ 11. Непарадоксальность 264
§ 12. Независимость 265
§ 13. Некоторые теоремные схемы и метатеоремы 266
§ 14. Системы Q^3 и Q^4 269
§ 15. Системы Q^{id} 269
§ 16. Системы для неклассического случая 270
§ 17. Некоторые следствия в системах для неклассического случая . . 271
§ 18. Другой вариант систем для классического случая 272
§ 19. Косвенная семантическая интерпретация для классического случая 272
§ 20. Косвенная семантическая интерпретация 275
§ 21. Некоторые важные следствия 277
§ 22. Теория предикации 278
§ 23. Системы с оператором условности 279
§ 24. Другие возможные расширения теории кванторов 279
§ 25. Другие кванторы 280
§ 26. Парадоксы вырожденных кванторов и системы с зависимыми переменными 281
§ 27. Неявные кванторы 284
§ 28. Нестандартная семантика для систем теории кванторов 285
§ 29. Проблема полноты 292
§ 30. Полнота сильной теории кванторов для классического случая . 295
§ 31. Полнота сильной теории кванторов для классического случая относительно нестандартной семантики 302
§ 32. Разрешимость сильной теории кванторов для классического случая 305
§ 33. О других системах 305

Раздел VII
Логика классов (множеств) **307**
§ 1. Классообразующий оператор . . . 307
§ 2. Включение индивидов в класс . . . 308
§ 3. Включение индивидов в класс и включение терминов по значению . . . 309
§ 4. Термин «класс» . . . 310
§ 5. Производные классы . . . 311
§ 6. Включение класса в класс . . . 311
§ 7. Классы классов . . . 311
§ 8. О парадоксе класса нормальных классов . . . 313
§ 9. Подкласс . . . 315
§ 10. О системах логики классов . . . 316
§ 11. Система SK^1 . . . 316
§ 12. Система SK^2 . . . 317
§ 13. Система SK^3 . . . 319
§ 14. Пустые и универсальные классы . . . 322
§ 15. Проблема полноты SK^i . . . 322
§ 16. Система SK^4 . . . 326
§ 17. Соответствие и мощность классов . . . 326
§ 18. О методе строгой индукции . . . 329

Раздел VIII
Основы комплексной логики **331**
Глава 1. Общая теория терминов и высказываний . . . **331**
§ 1. Знаки . . . 331
§ 2. Термины . . . 336
§ 3. Два вида терминов . . . 337
§ 4. Простые и сложные термины . . . 338
§ 5. Сложные термины . . . 338
§ 6. Вхождение терминов и высказываний в другие термины и высказывания . . . 339
§ 7. Метатермины и метавысказывания . . . 340
§ 8. Смысл терминов . . . 342
§ 9. Термины из высказываний . . . 342
§ 10. Определения . . . 343
§ 11. Высказывания . . . 345
§ 12. Смысл высказываний . . . 347
§ 13. Определения с высказываниями . . . 347
§ 14. Определение предикатов . . . 348
§ 15. Значения истинности высказываний . . . 349
§ 16. Число значений истинности . . . 351
§ 17. Координаты высказываний . . . 352
§ 18. Значение истинности высказываний с операторами конъюнкции, дизъюнкции и отрицания . . . 353

§ 19. Значения истинности других форм высказываний 355
§ 20. Тавтологии, противоречия, выполнимые высказывания 358
§ 21. Дедукция 359
§ 22. Логический вывод 360
§ 23. Общая теория дедукции 362
§ 24. Классический и неклассический случаи в теории вывода 365
§ 25. Правила вывода и значения истинности высказываний 366
§ 26. Тождество по смыслу и следование 366
§ 27. Общая теория терминов 366
§ 28. Координаты высказываний 372
§ 29. Следствия из определений 375
§ 30. Имплицитные определения 377
§ 31. Неполные определения 378
§ 32. Псевдоопределения 379
§ 33. Операционные определения 380
§ 34. Интуитивно очевидные утверждения 381
§ 35. Переменные 381
§ 36. Определения с переменными 385
§ 37. Многосмысленность языковых выражений 386
§ 38. Экспликация 387
§ 39. Непротиворечивость терминов 388
§ 40. Теория доказательства 388
§ 41. Полная (строгая) индукция 390
§ 42. Логическая непротиворечивость 393
§ 43. Классические и неклассические отношения между высказываниями 397

Глава 2. Логическая математика 403

§ 1. Числа в языке 403
§ 2. Числа как термины 404
§ 3. Базисная арифметика 406
§ 4. Сокращенная запись ЧБ 408
§ 5. Универсальность арифметики 408
§ 6. Расширенная арифметика (РА) 408
§ 7. Бесконечные числа 410
§ 8. Формальная арифметика с метаутверждениями 411
§ 9. Формальная арифметика и теория чисел 412
§ 10. Термины чисел 413
§ 11. Существование чисел 413
§ 12. Число как часть субъекта 415
§ 13. Величина 415
§ 14. Степени и диапазон истинности 417
§ 15. Измерение и определение 418
§ 16. Числа-кванторы 418
§ 17. Количество 418
§ 18. Стандартные классы чисел 419
§ 19. Мощность классов чисел 419
§ 20. Сравнение мощностей классов 420
§ 21. Другие определения 421

§ 22. Сводимость к логике 422
§ 23. Замечание о классе натуральных чисел 423
§ 24. Замечание об одном парадоксе с терминами чисел 424
§ 25. Решение проблемы Последней Теоремы Ферма 424

Глава 3. Логическая физика 432

§ 1. Эмпирические индивиды 432
§ 2. Протяженность 434
§ 3. Изменение 434
§ 4. Переходное состояние 436
§ 5. Пространство и время 437
§ 6. Пространственно-временные отношения 438
§ 7. Время существования эмпирического индивида 442
§ 8. Существование пространства и времени 445
§ 9. Положение индивида в пространстве и времени 447
§ 10. Тот же самый индивид 447
§ 11. Изменение пространства и времени 451
§ 12. Необратимость времени 454
§ 13. Об отношении порождения 456
§ 14. Непрерывность пространства и времени 457
§ 15. Инвариантность пространства и времени 459
§ 16. Тождество и различие места и времени 459
§ 17. Предицирование изменений 460
§ 18. Перемещение 462
§ 19. Парадокс движения 463
§ 20. Процесс 465
§ 21. Минимальная протяженность 466
§ 22. О бесконечной протяженности 471
§ 23. Скорость 475
§ 24. Парадоксы Зенона 479
§ 25. Кванты пространства, времени или движения 480
§ 26. Относительность движения 480
§ 27. О существовании и перемещении скоплений 485
§ 28. Луч 486
§ 29. Мир в целом 488
§ 30. Эмпирическая геометрия 491
§ 31. Эмпирические связи 497
§ 32. Предикаты тенденций 498
§ 33. Парадоксы связей 500
§ 34. Условные предикаты 502
§ 35. Воздействие 503
§ 36. Причина 507
§ 37. Виды причинных связей 511
§ 38. Другие виды связей 514

Глава 4. Логическая методология науки **516**
Логика и методология науки 516
§ 1. Эмпирические и абстрактные объекты 516
§ 2. Эмпирические и точные науки 519
§ 3. Эвристические допущения 520
§ 4. Детерминизм и индетерминизм 520
§ 5. Эвристическая онтология 522
§ 6. Общие утверждения о Мире и физические допущения 529
§ 7. Эвристические правила 531
§ 8. Методы исследования 534
§ 9. Исследование эмпирических систем 534
§ 10. Модели 535
§ 11. Теории 536
§ 12. Методология частных наук 540
§ 13. О логической ситуации в микрофизике 543
§ 14. Дуализм волны и частицы 550
§ 15. Траектория 552
§ 16. Часть и составное 553
§ 17. О прогнозах 555
§ 18. Обобщения результатов науки 557

Об авторе **558**

Предисловие

Моей первой научной работой была диссертация «Метод восхождения от абстрактного к конкретному» (1954), в которой я предпринял попытку представить диалектический метод как совокупность логических операций. Диссертация была встречена официальной советской философией крайне враждебно и оказалась фактически запретной для публикации и пользования без особого разрешения. Меня из сферы методологии науки вытолкнули в сферу логики, причем — логики математической. После этого в течение многих лет (до 1976 года) моей основной профессией стала логика. Обстоятельства сложились так, что я за эти годы разработал свою логическую концепцию, радикально отличающуюся от всех тех, которые были известны в мировой логике, включая как классическую, так и неклассическую (в том числе — интуиционистскую) математическую логику. Я назвал все эти концепции традиционными или стандартными. Свою концепцию я назвал нетрадиционной, нестандартной или комплексной логикой. Последнее название я выбрал не столько с целью подчеркнуть отличие моей концепции от других, сколько с целью обратить внимание на то, что должное решение важнейших проблем логики может быть достигнуто именно на пути их рассмотрения в комплексе, а не по отдельности, не изолированно друг от друга. В частности, нельзя должным образом осуществить логическую (формальную) обработку языка как орудия научного познания, игнорируя предметное значение языковых выражений, т. е. их онтологический аспект. Нельзя логически строго описать явления бытия, игнорируя языковые средства и методы их познания. Нельзя логически строго описать методы научного исследования, не привлекая языковые средства фиксирования знаний и оперирования ими. Короче говоря, три ветви старой философии — формальная логика, гносеология и онтология — должны быть слиты в нечто единое при систематическом построении логики в современных условиях в науке.

Основную задачу своей комплексной логики я постепенно осознал в том, чтобы преодолеть дефекты ставших традиционными логических концепций, включая классическую и интуиционистскую математическую логику, и, во-вторых, радикально расширить сферу внимания логики с ориентацией на методологию опытных наук.

Согласно моей концепции, предмет логики — язык. Но не изучение языка (языков) таким, каким он является сам по себе, независимо от логики, а особого рода работа в сфере языка, заключающаяся в обработке определенного рода элементов языка, усовершенствование их

и изобретение новых, а также разработка особых правил оперирования ими. Логика не открывает эти правила как существующие в языковой практике независимо от того, изучают их или нет, а изобретает их и вносит в языковую практику в качестве искусственных средств оперирования языком. Даже законы силлогистики не были открыты Аристотелем в готовом виде в практике языка, а изобретены им. Конечно, тут имеет место стихийное языковое творчество людей. Но лишь в самых примитивных и смутных формах. Логика должна выполнять эту работу на профессиональном уровне.

Современная логика в форме так называемой математической логики сделала значительный шаг вперед сравнительно с логикой прошлых веков в смысле техники логической работы (математические методы, формальные исчисления), но одновременно она ограничила сферу логических исследований. Последняя свелась к логике высказываний и предикатов, причем — главным образом к техническим (математическим) проблемам. Кроме того, она породила ложную идею неуниверсальности законов логики, т. е. их относительности, зависимости от предметной области (например, идея особой логики микромира) и даже произвола в выборе логики. Она, далее, породила также ложную идею, будто результаты логики имеют непосредственные приложения вне сферы языка. Эта идея приобрела прочность предрассудка, фактически подменив законы логики математическим аппаратом, применяемым в вычислительных и информационных устройствах.

Наконец, ограничив сферу логики в смысле охвата проблем и сведя логические исследования к чисто техническим (математическим) задачам, математическая логика включила явно или неявно в решение чисто логических проблем внелогические предпосылки и допущения, так что получилась деформированная (смещенная) конструкция, затрудняющая, непомерно усложняющая и даже в принципе исключающая решение целого ряда логических задач. Это касается основных разделов математической логики.

Говоря о разработке логики с ориентацией на опытные науки, я имею в виду радикальное расширение ее сферы за счет логической обработки языковых выражений, фигурирующих в языке опытных наук. Это, например, терминология, относящаяся к пространству, времени, эмпирическим связям, изменениям и т. д. Она плохо определена или совсем не определена, многосмысленна, неустойчива, логически не связана в должные комплексы. Это служит основой для всякого рода псевдонаучных спекуляций вроде идей замедления и ускорения времени, обратного хода времени, различного хода времени в разных мирах, особой логики микромира. О том, что может тут сделать логика, читатель подробно узнает из раздела «Логическая физика» в этой книге. А сейчас я приведу простой пример. На вопрос о том, может ли физиче-

ское тело одновременно находиться в разных местах, обычно отвечают отрицательно. А на вопрос о том, почему это невозможно, отвечают: так устроен мир. Но дело здесь не в устройстве мира. Да и откуда взять гарантии, что наше утверждение будет верно на все время в прошлом и будущем и во всех местах пространства. Наша уверенность в том, что физическое тело не может одновременно находиться в разных местах, есть логическое следствие неявного определения выражения «разные места». В самом деле, в каком случае места (области пространства) считаются разными? Интуитивно предполагается, что два места x и y различны, если только они не имеют общих точек. Но реальные «точки» суть физические тела. Так что если определение выражения «разные места» записать явно (эксплицировать), то получим следующее. Два места x и y считаются (называются) различными местами, если и только если для любого физического тела a имеет силу утверждение: если a находится в одном из x и y, то в то же самое время оно не находится в другом из них. Из этого определения логически следует утверждение: физическое тело не может одновременно находиться в разных местах.

Результаты моих логических исследований я в свое время опубликовал в многочисленных книгах и статьях, включая следующие: Философские проблемы многозначной логики (1960); Логика высказываний и теория вывода (1962); Основы логической теории научных знаний (1967); Очерк многозначной логики (1968); Логическое следование (1970); Комплексная логика (1970); Логика науки (1971); Логическая физика (1972); Нетрадиционная теория кванторов (1973); Логика классов (множеств) (1973); Очерк эмпирической геометрии (1975); Полная индукция и Последняя теорема Ферма (1979).

Многие мои логические сочинения переводились с русского на западные языки. Основные из них суть следующие: Philosophical Problems of Many-Valued Logic (Dordrecht, 1963); Über mehrwertige Logik (Berlin—Braunschweig—Basel, 1968); Komplexe Logik (Berlin—Braunschweig—Basel, 1970); Foundations of the Logical Theory of Scientific Knowledge (Dordrecht, 1973); Logik und Sprache der Physik (Berlin, 1975); Logische Sprachregeln (совместно с Х. Весселем) (Berlin—München, 1975); Logical Phisics (Dordrecht—Boston, 1983); Non-Standard Logic and its Applications (Oxford, 1983); The Non-Traditional Theory of Quantifiers (Language, Logic and Method. Boston, 1983).

В эту книгу включены работы, которые дают достаточно полное представление о том, как формировалась комплексная логика, какова ее ориентация и основные результаты. Все эти работы были написаны до 1976 года. Обстоятельства моей жизни сложились так, что, начиная с 1976 года, я был лишен возможности для регулярной работы в области логики и даже возможности отредактировать сделанное мною при составлении этого сборника. Так что эти работы вошли в сборник в том

виде, в каком они были закончены до 1976 года. При этом оказались неизбежными некоторые повторения, которые я не имел возможности устранить.

Попытку как-то систематизировать результаты моих логических исследований я предпринял еще в книге «Основы логической теории научных знаний». В этот сборник из нее вошел фрагмент «Квазиисследование и физическое следование». Вторая попытка имела место в книге «Логика науки». Из нее в сборник вошли фрагменты «Комплексная логика (введение)» и «Нетрадиционная теория вывода». И третьей попыткой была книга «Логическая физика». При подготовке издания ее на немецком и затем английском языках она была значительно исправлена и расширена. И в этом состоянии она вошла в данный сборник под названием «Основы комплексной логики». В нее вошла также работа, посвященная решению проблемы Последней теоремы Ферма, написанная в 1975 году и опубликованная по-английски в 1979 и в 1983 годы.

Из сочинений, посвященных разработке формального аппарата логики, в этот сборник вошли статьи «Очерк многозначной логики», «Логическое следование», «Нетрадиционная теория кванторов» и «Логика классов», помимо разделов в упомянутых работах. Систематическое изложение курса логики, который я читал в течение многих лет в Московском университете, было опубликовано лишь на немецком языке в книге «Logische Sprachregeln» (1975, совместно с H. Wessel). Включить это в данный сборник было невозможно, поскольку этот курс слишком велик по размерам, а текст его на русском языке у меня не сохранился в силу превратностей моей судьбы.

Мюнхен, 1998

Раздел I

КОМПЛЕКСНАЯ ЛОГИКА (ВВЕДЕНИЕ)

Глава 1

Исходные предпосылки

§ 1. Раздвоение логики

Как бы не определялся предмет логики различными специалистами и направлениями в логике, фактически, ее предметами всегда были и остаются язык как средство познания и само познание, поскольку оно совершается в языке и посредством языка и продукты которого фиксируются в языке. Но в силу переворота, который произошел в логике в конце прошлого и в начале нашего века (возникновение математической логики), логика стала прежде всего и по преимуществу совокупностью определенного рода формальных построений (исчислений) и совокупностью теоретических положений о правилах их конструирования, об их свойствах и взаимоотношениях. Формальные построения, которые по идее должны были бы служить лишь средством (аппаратом) решения определенных проблем логики, приобрели самодовлеющее значение и стали сначала основным ее содержанием, а затем даже превратились в особый объект, изучаемый в логике.

Формальные построения логики допускают различные содержательные интерпретации. Использование их для описания каких-то элементов языка науки и правил оперирования ими есть лишь одно из возможных использований, хотя генетически оно и послужило предпосылкой их изобретения. Причем упомянутое использование связано со сравнительно сложными абстракциями и допущениями, предполагает некоторое предварительное (не зависящее от формальных построений) понимание тех или иных элементов языка науки. Естественно, при этом встают вопросы о соответствии такого рода внеформального понимания элементов языка науки и формул логических исчислений, избранных для их описания.

Формальные системы логики суть дедуктивные построения. При создании их первостепенное значение приобретают соображения удобства исследования их свойств, математической простоты, изящества.

Зачастую соображения, связанные с последующей интерпретацией формальных систем, вообще не принимаются во внимание. Следствием этого является возможность отрыва теоретических построений от эмпирических фактов и несоответствий между этими фактами и интерпретированными некоторым образом формулами рассматриваемых построений. Разрешение же вопросов о том, как поступать с такого рода несоответствиями, требует какой-то системы абстракций и допущений, модификации имеющихся формальных построений и конструирования новых.

Но и независимо от указанных несоответствий преобладание дедуктивного метода ведет к существенной перестройке способов абстрагирования при «описательном» («эмпирико-аналитическом») методе, а значит и к изменению отношения научных положений и эмпирических фактов. Дедуктивные построения уже нельзя рассматривать как продукт непосредственной абстракции от эмпирически данных фактов. Это, скорее, лишь удобные с какой-то точки зрения средства исследования этих фактов. При этом невозможно судить о применимости тех или иных формальных построений в исследовании некоторой предметной области, если о ней нет никаких предварительных сведений и она уже не изучена в какой-то мере на описательном уровне. В современной логике эта сторона дела оказалась сравнительно слабо развитой.

Приложения математической логики к самим объектам конкретных наук, а не к их языку породили взгляд на логику как на науку, область исследования и приложения которой образует не только (и даже не столько) язык науки, но и предметные области, изучаемые ими (например, электрические сети, системы клеток мозга, числа и т. п.). Вследствие этого значительная часть прежней проблематики логики выпала из сферы ее внимания или во всяком случае попала в категорию второсортной.

Наконец, в связи с только что упомянутым пониманием логики, правила ее стали рассматривать как неуниверсальные, т. е. как варьируемые в зависимости от особенностей предметных областей, изучаемых различными науками. Это выразилось, в частности, в идеях интуиционистской логики квантовой механики. На этой основе развилась чудовищная идеологическая мистификация как логики, так и достижений науки, давших пищу и повод для таких спекуляций.

Стремление преодолеть разделение ориентации логики на исследование языка как средства познания и на разработку формального аппарата ради самого этого аппарата послужило стимулом для разработки той концепции логики, которую в разных работах называли нестандартной, нетрадиционной или комплексной логикой, а также логикой науки.

Прежде чем предложить вниманию читателя отдельные фрагменты комплексной логики и затем сравнительно систематическое изложение ее основ, приведем ряд предварительных соображений, взятых из книги «Логика науки».

§ 2. Исследователь

Логика рассматривает язык как совокупность видимых и слышимых слов, т. е. как особого рода материальных «вещей». При этом обычно игнорируются те, кто создают эти «вещи» и оперирует ими, — назовем их исследователями. Но исключать исследователей при рассмотрении языка не только фактически невозможно, но и неразумно. Многие проблемы логики решаются легче, если явным образом учитывать исследователей, а некоторые важные проблемы вообще неразрешимы без этого.

Исследователей существует много, и они заметно различаются. Но мы все же допустим, что все исследователи совершенно одинаковы, и если они как-то различаются в одной и той же ситуации, то их различия совершенно адекватны различным положениям каждого из них в этой же ситуации. Так что мы исключаем всякие разногласия между исследователями и будем вообще говорить об одном исследователе как среднем представителе класса исследователей. Иначе говоря, мы будем рассматривать всех исследователей как существа или сооружения, проделывающие некоторые операции одинаково, если они вообще способны проделывать эти операции. Те операции, которые мы будем рассматривать, на самом деле доступны особого рода техническим устройствам. Во всяком случае мы будем стремиться к тому, чтобы по возможности обезличить описание логических операций и приблизить его к некому машинному идеалу как к удобному средству пояснения.

Мы допускаем, что исследователь наделен некоторым природным (чувственным) аппаратом отражения, задача которого — испытывать внешние воздействия и создавать в себе (в исследователе) определенные состояния. Причем исследователь может создавать такого рода состояния в своем аппарате отражения и без непосредственного воздействия внешних раздражителей (воспоминание, воображение).

Мы допускаем, что упомянутый аппарат отражения необходим для создания, хранения и использования различных элементов языка. Но деятельность его мы рассматривать не будем. Для нас вообще не будет играть роли все то, что происходит в мозгу и в организме человека (внутри любого отражающего существа или устройства — исследователя). Поэтому если мышлением называть какие-то процессы, происходящие в мозгу человека, то придется признать, что логика

не учит мышлению. Она не изучает не только «неправильное» мышление, но и «правильное». Традиционное определение логики как науки о правильном мышлении имело смысл лишь постольку, поскольку само мышление тавтологически понималось как осуществление логических операций. Короче говоря, с точки зрения логики голова исследователя принимается во внимание не как предмет исследования, но лишь как полезное средство для осуществления некоторых зримых операций со зримыми элементами языка. Исследуя упомянутые операции, логика через них не изучает никаких процессов мышления. Она изучает сами эти операции, а не что-то такое, что скрыто за ними и управляет ими.

§ 3. Термины и высказывания

Язык состоит из совокупности предложений, построенных по правилам некоторого (русского, английского и т. п.) языка и образующих его базис, а также из совокупности развитых на этом базисе дополнительных средств — формул, графиков, таблиц, схем и т. п. Предметом внимания логики является лишь то, что охватывается терминами «высказывание» («суждение»), «термин» и «логический знак» (или «логический оператор»). В дальнейшем мы точно определим, что такое термин и высказывание, и рассмотрим подробно логические операторы. Но сейчас нам необходимо сделать ряд предварительных замечаний об этом и мы вынуждены поэтому допустить, что читатель имеет какое-то представление о них. На всякий случай приведем несколько примеров. Примеры высказываний: «Электрон заряжен отрицательно», «Если по проводнику пропустить электрический ток, то вокруг него возникает магнитное поле», «Все четные числа делятся на два». Примеры терминов: «атом», «капитал», «элементарная частица, имеющая положительный заряд», «ускорение 10 м/с», «магнитное поле». Примеры логических операторов: «и», «или», «не», «если..., то...», «тот, который», «все».

Это не означает, однако, что упомянутые выше дополнительные средства языка вообще выпадают из сферы внимания логики и не подчиняются тем законам, которые она устанавливает. Дело в том, что эти дополнительные языковые средства так или иначе «прочитываются» с помощью высказываний. Им фактически ставится в соответствие некоторое множество высказываний, что равносильно умению обращаться с ними. Возьмем, например, формулу вида $y = 2x$, изображающую зависимость величин x и y. Ей соответствует множество предложений вида «Если $x = a$, то $y = 2a$», где область значения a образуют величины x. И если в рассматриваемых дополнительных средствах языка науки имеется какая-то часть, для которой не находятся соответствующие высказывания (которая не «прочитывается» в высказываниях),

то к ней нельзя будет применить правила логики, и только. Но это относится и к огромному числу предложений науки, без которых наука невозможна, но которые по тем или иным причинам не приводятся к логически стандартизированному виду.

Продолжим наш пример. Пусть у нас помимо приведенной выше формулы имеется еще некоторый график, который изображает зависимость величины z от величины y. Этот график точно так же может быть прочтен предложениями вида «Если $y = a$, то $z = b$». Если нам известно, что $x = 2$, то по правилам умозаключений, которые логика формулирует для высказываний, мы делаем вывод о том, что $y = 4$. Пусть одно из высказываний, соответствующих нашему графику, есть высказывание «Если $y = 4$, то $z = 8$». Из него и из предшествующего заключения $y = 4$ мы получаем по правилам логики, что $z = 8$. И все это рассуждение стало возможно лишь благодаря прочтению данных формулы и графика в высказываниях. Логика не рассматривает правила этого прочитывания.

Выше, рассматривая термины и высказывания, мы привели примеры того, что известно под именем слов, групп слов и предложений. Ничего предосудительного в этом нет, ибо вообще невозможно привести примеры высказываний и терминов, не приведя тем самым примеры предложений и, соответственно, слов, символов, групп слов и символов. Однако это удвоение общих названий для одних и тех же примеров может быть расценено различно.

Широко распространена точка зрения, согласно которой высказывания (суждения) и предложения различаются как нечто идеальное (мысленное) и материальная оболочка этого идеального. Эта точка зрения соответствует субъективному подходу к научным знаниям, о котором говорилось ранее. По нашему мнению, эта точка зрения означает излишнее «умножение сущностей». Нам кажется более предпочтительной другая точка зрения. Выбирая в качестве предмета внимания определенного вида предложения, логика осуществляет их стандартизацию, т. е. рассматривает их лишь в той мере, в какой они расчленяются строго определенным образом на логические элементы — на термины, высказывания и логические операторы. Например, предложение «Нечетное число не делится на два» расчленяется не на шесть слов, а лишь на два термина «Нечетное число» и «не делится на два». Эта стандартизация соответствует тому, что реальный исследователь, имеющий дело с наукой, так или иначе умеет устанавливать логическое (описываемое в терминах логики) строение предложений или находить для них другие предложения (адекватные с точки зрения сообщаемого знания), которые можно легко подвести под стандартную схему. Если исследователь не умеет в данных предложениях находить их логическое

строение, он не может воспользоваться теми советами, которые дает логика науки. Аналогично обстоит дело с терминами.

Возьмем фразу «Самолет пролетел сто километров». Ее можно истолковать двояко: (1) как «Самолет находится на расстоянии ста километров (от некоторого места)»; (2) как «Расстояние, которое преодолел самолет, включает отрезок сто километров». Различие этих истолкований видно из следующего. Во втором случае из данного высказывания будет следовать, что самолет пролетел пятьдесят (десять и т. п.) километров, а в первом — нет, т. е. высказывание «Самолет пролетел пятьдесят километров» в первом случае будет неверно, если верно (1). Отрицание высказывания (2) будет означать, что самолет пролетел расстояние меньше ста километров. В первом случае оно может означать любой расстояние, не равное ста километрам. Усмотреть в самом предложении, в каком именно смысле оно употребляется, невозможно. Исследователь должен это обнаружить их каких-то других источников.

Когда в логике некоторые предложения изображают схемой (символом) вида $S - P$, то это не следует воспринимать как предписание именно так строить предложения (хотя стандартизация языка науки, вообще говоря, есть явление весьма желательное). Это следует воспринимать просто как сокращенную запись того, что некоторые предложения расчленяются на субъект, предикат и соединяющий их логический оператор. И если мы не имеем правила оперирования с высказываниями такого вида, то эти правила относятся не к каким-то идеальным сущностям, а ко всем реальным предложениям, которые удается подвести под эту схему. Причем умение исследователя устанавливать логический тип предложения и его строение мы предполагаем данным.

Здесь имеет место ситуация, сходная с символами химии. Например, символ H_2O не есть фотографическое изображение воды. Это лишь краткая и удобная запись того, что молекула воды состоит из двух атомов водорода и атома кислорода. И никому в голову не приходит мысль о том, что этот символ относится к какой-то искусственной воде.

§ 4. Логические операторы

Из данных терминов образуются ложные термины и высказывания, а из высказываний — сложные высказывания и сложные термины. Причем в языке науки имеются какие-то показатели того, из каких именно высказываний или терминов построено данное сложное высказывание и термин. Это — специальные слова (например, «и», «или», «не», «если, то», «тот, который» и т. п.), грамматическая форма слов, особые их комбинации и расположение и т. п. Специальные слова, символы и их группы такого рода мы будем называть логическими операторами.

В обычном и научном языке они не всегда выражаются стандартно, однообразно и явно. Мы, однако, должны допустить, что они суть особые, локализованные в пространстве и времени, воспринимаемые предметы. Исключим из рассмотрения также факт многозначности языковых средств и разнообразие выражений одних и тех же функций (выполняемых ролей) знаков. Эти абстракции означают следующее: в реальных языках имеется нечто такое, что соответствует тем символам, с помощью которых в логике обозначаются рассматриваемые операторы; эти символы однозначны, а их видимое различие есть показатель различия функций соответствующих языковых средств. Другими словами, здесь абстрагируются функции языковых средств, какой бы вид они ни имели. С другой стороны, абстракции означают допущение необходимых навыков распознавания этих функций в любых контекстах данного языка.

Логические операторы имеют значение не сами по себе, но лишь как элементы в структуре терминов и высказываний. Определить их свойства — значит определить свойства содержащих их языковых образований. Поэтому логические операторы сами по себе не являются терминами, а образуют особую рубрику элементов языка науки. Терминами являются лишь их обозначения в логике.

§ 5. Правила логики

Правила логики (логические правила) суть правила оперирования высказываниями и терминами (и, естественно, входящими в них логическими операторами). Эти правила не открываются людьми в окружающем их мире, а изобретаются вместе с появлением и совершенствованием навыков конструирования терминов, высказываний и действий с ними. Логика как особая наука, приступая к изучению этих правил, сталкивается со следующим обстоятельством. Она обнаруживает эмпирически данными определенного вида термины, высказывания (и содержащие их операторы) и уже функционирующими некоторые правила обращения с ними. И с этой точки зрения, правила, устанавливаемые логикой, имеют опытную основу. Но логика вместе с тем обнаруживает: свойства определенного вида терминов и высказываний и содержащих их операторов) установлены лишь для некоторых случаев их употребления, но не для любых возможных ситуаций; свойства эти установлены неотчетливо и не с предельной общностью (нередко в связи с конкретным видом языковых форм); не установлены отношения различных операторов. Устраняя эти недостатки, логика продолжает творческую деятельность человечества по разработке и совершенствованию упоминавшихся средств языка науки, и с этой точки зрения, логические правила оперирования этими средствами языка суть не что

иное, как определения свойств логических операторов и содержащих их образований из терминов и высказываний.

Кроме того, сами методы логики позволяют разработать точные правила не только для фактически встречающихся ситуаций, но и для любых логически мыслимых (возможных) ситуаций, а также выяснить логически возможные виды терминов, высказываний и операторов), которые, может быть, еще не употребляются в науке. Во всяком случае, получив некоторый материал для работы, а также своего рода задание и ориентиры, логика делает свое дело уже независимо от этого материала, исследуя логически возможные случаи и устанавливая для них соответствующие правила. И с этой точки зрения логику можно считать априорной наукой, результаты которой имеют силу для любой науки, если только последняя вводит в обиход элементы языка, подпадающие под описанные в логике типы.

Возьмем, например, логический оператор, который обычно истолковывают как «и». В реальных языках логика обнаруживает сложные высказывания, истинные лишь тогда, когда все входящие в их состав высказывания истинны. Роль операторов в таких случаях помимо слова «и» выполняют и другие средства: запятая, слово «но», слова «а также» и даже порой слова «если, то», которым в логике предназначена совсем иная роль. И хотя все указанные средства выполняют в языке и другие функции, существенно одно: случаи такого вида фактически встречаются, и для того, чтобы выделить функции указанного оператора, в логике вводят особый знак конъюнкции. Последний выполняет в логике исключительно роль оператора рассмотренного вида. Его можно истолковать теперь как «и». Но не только так: любые языковые средства, выполняющие такую роль в языке, суть пример конъюнкции. С другой стороны, используя свои методы, в частности, таблицы истинности), логика устанавливает связь такого рода операторов с другими (с «или», «не» и т. п.), определяя свойства конъюнкции для всех возможных ситуаций (для всевозможных комбинаций с другими операторами), а также может ввести новые операторы, точно сформулировав правила их употребления (например, так вводится материальная импликация, антиимпликация).

Продолжим наш пример. Всем известны правила приписывания значения истинности высказываниям с операторами «и», «или», «не» в простых комбинациях и в случаях, когда ограничиваются двумя значениями — «истинно» и «ложно». Эти правила привычны и воспринимаются как нечто само собой разумеющееся, данное от природы. Но достаточно взять случай, когда высказывания могут принимать три значения истинности (или даже более), как обнаруживается, что никаких само собой разумеющихся правил для этих случаев вообще нигде нет. Они должны быть изобретены, вновь установлены кем-то

и затем получить более или менее широкое признание. При этом выясняется, что возможны различные варианты этих правил. В частности, для отрицания возможны по крайней мере три различных варианта. И во избежание путаницы при этом должны быть введены различные логические операторы, учитывающие эти вариации.

Логика, далее, изучает свойства терминов и высказываний, не зависящие от того, являются ли они терминами и высказываниями физики, химии, биологии, истории или какой-либо иной науки. Она изучает правила, общие любым терминам и высказываниям с определенной структурой, и не рассчитана ни на какую науку специально. Нет логики специально для физики, химии и т. п. Нет логики специально для математиков, физиков, историков, макрофизиков, микрофизиков, ибо логика находит в науке именно то, что она ищет: правила, которые не зависят от сферы науки, от особенностей той или иной предметной области).

Таким образом, в силу самих методов, используемых в логике, формулируемые ею правила универсальны. Если мы ввели некоторый оператор A так, что по его определению будет иметь силу правило X для содержащих его терминов или высказываний, то не может встретиться случай, когда оператор A употребляется, а правило X не имеет силы.

Когда говорят о правилах логики, то обычно имеют в виду правила вывод одних высказываний из других. Однако правила логики не сводятся в правилам вывода. В логике рассматриваются правила образования сложных терминов из простых, высказываний из терминов и других высказываний, терминов из высказываний; правила построения сложных комплексов высказываний и терминов, образующих теории; правила оперирования некоторыми терминами (например, модальными предикатами) и т. п. Причем различные типы правил логики имеют различные источники формирования и различные способы применения, и судить о них в общем виде без анализа этих их особенностей — значит говорить нечто банальное или ошибочное (в силу односторонности).

Возьмем, например, термины «человек» и «курит». Посредством оператора «который» из них можно образовать новый (сложный) термин «человек, который курит». Если исследователю известен смысл данных терминов и свойства оператора «который», то ему известен смысл образованного из них сложного термина. И это возможно в силу особых логических правил обращения с терминами, которые явным образом отличны от правил вывода.

§ 6. Онтологические утверждения в логике

Логика ничего не утверждает о предметах, которые отображаются в терминах и высказываниях. Но законам логики в ряде случаев можно придать вид утверждений не о свойствах терминов и высказываний,

а о предметах, к которым термины и высказывания относятся (т. е. вид онтологических утверждений). Например, утверждению «Из высказывания *X* следует высказывание *Y*» можно придать вид утверждения «Если имеет место ситуация *X*, то имеет место ситуация *Y*».

Такая онтологизация утверждений логики связана, однако, не с природой этих законов, а с привычкой относить содержание высказываний к соответствующим предметам и с удобствами языка. Достаточно поставить вопрос о том, на каком основании принимаются подобные утверждения, как обнаружится, что они суть следствия определений содержащихся в них логических операторов.

Из логических утверждений, далее, по некоторым правилам получаются онтологические утверждения. Так, из утверждения «Из *X* логически следует *Y*», построенного из субъектов «высказывание *X*» и «высказывание *Y*» и двухместного предиката «логически следует», получается условное высказывание «Если *X*, то *Y*», состоящее из высказываний *X* и *Y* и логического оператора «если, то». Особенность таких онтологических следствий из логических законов состоит в том, что они не зависят от опыта, истинны в силу чисто логических оснований. Так, если на самом деле из *X* логически следует *Y*, то «Если *X*, то *Y*» истинно независимо от конкретного содержания *X* и *Y*.

В логике, далее, принимаются утверждения, непосредственно имеющие форму онтологических. Таковы, например, утверждения вида «Либо *X*, либо не-*X*». Однако и в этом случае подобные утверждения принимаются вовсе не потому, что так устроен окружающий нас мир (т. е. не как обобщение результатов наблюдений), а исключительно потому, что они суть следствия определений, входящих в них логических операторов или сами суть части неявного определения этих операторов. Так, операторы «и», «или», «не» и т. д. буквально по нашей воле и по соглашению вводятся в употребление такими, что утверждения «*X* или не-*X*», «Если не-не-*X*, то *X*» и т. д. будут верными для любых *X*. И когда мы утверждаем, например, что в мире нигде и никогда не встретится ситуация, в отношении которой будет истинно «*X* и не-*X*», то наша уверенность базируется отнюдь не на том, что мы изучили мир на все времена и во всех местах, а исключительно на том, что мы изобрели операторы «и» и «не» именно такими. Просто в нашем языке с такими операторами недопустимо признание возможности «*X* и не-*X*», и ничего более.

Конечно, практика познания заставляет людей вводить в обиход определенного вида логические операторы. Практически встречающиеся ситуации, когда одни предметы исключают другие, одни предметы сосуществуют с другими и т. д., служат отправной базой для введения в обиход соответствующих логических операторов. Но это нисколько

не влияет на то, что сами они суть продукты творчества людей, что им волею людей навязываются указанные выше свойства.

Но имеет место и еще более тонкое и далеко идущее отношение онтологических и логических утверждений. Оно связано с тем, что многие онтологические термины («начало», «конец», «вечно», «пространство», «время», «причина») могут быть уточнены посредством терминов логики со всеми вытекающими отсюда последствиями. Эти последствия образуют своего рода границы (логические табу), за которые не может выходить наука при выдвижении своих гипотез. Причем границы эти вытекают из принятых определений, а не извлекаются из опыта (т. е. априорны). Таковы, например, утверждения «Ни одно событие не может произойти раньше самого себя», «Между одновременными событиями не может быть отношения причины и следствия».

Одним словом, в фундаменте логики вообще и любых ее разделов не лежат никакие онтологические допущения.

§ 7. Универсальность логики

Существует мнение, будто законы логики не являются универсальными, т. е. имеются случаи, когда один и тот же закон логики в одной области науки ведет к правильным результатам, а в другой — к ошибочным; будто законы логики имеют исключения, зависят от предметной области. Для подкрепления этого мнения (помимо общих пространных соображений) ссылаются на вполне определенные факты. Еще с прошлого века идет традиция, отвергающая закон противоречия в отношении переходных состояний объектов. В современной логико-философской литературе к этому присоединяют ограничения на закон исключенного третьего и двойного отрицания в интуиционистской логике, а также на законы коммутативности и дистрибутивности в «квантовой логике».

Если логика действительно не является универсальной, единой для всех наук, то ее положения не имеют априорной силы для наук, и вопрос о ее использовании в них оказывается сомнительным. Но рассматриваемое мнение есть плод недоразумения. Уместно спросить: 1) почему именно такие-то законы логики считаются неуниверсальными, а не другие? 2) Могут ли встретиться случаи, когда и другие законы логики окажется неуниверсальными? 3) Имеются ли все-таки законы логики, являющиеся универсальными? 4) Где грань между универсальными и неуниверсальными законами логики? Ответить на подобные вопросы несхоластическим образом невозможно. Законы логики по самой своей природе универсальны, не имеют исключений, не зависят от особенностей той или иной области. От этих особенностей зависит лишь то, какие именно законы из множества возможных законов логики будут

использоваться. Что касается фактов, которые якобы подтверждают эту концепцию, то они суть результат смешения различных логических форм (это мы покажем по мере изложения).

Не является аргументом в пользу тезиса неуниверсальности логики и факт множественности логических систем. Мы оставляем в стороне различие точек зрения, способностей и интересов логиков, различие интерпретаций логических исчислений, различие направлений в логике, исторической прогресс и прочие общеизвестные вещи. Возьмем наиболее интересный для нас случай: имеются два логических исчисления; они интерпретируются как логические теории, претендующие на описание свойств одних и тех же логических операторов; однако множества доказуемых в них формул (и значит, множества допускаемых ими правил логики) не совпадают. Если дело обстоит именно таким образом, то правильный вывод из этого факта может быть только такой: эти системы определяют различные наборы логических операторов.

Примером такого рода логических систем являются классическое и интуиционистское исчисления высказываний. Если они претендуют на то, чтобы дать определение свойств операторов «и», «или», «не», то их можно представить как различные определения отрицания. И неверно думать, что имеется некое природное отрицание, которое можно познать с различной степенью глубины, полноты и точности, подобно тому как познают атомы, общества, животных, и свойства которого «интуиционисты» постигли лучше, чем «классики» (или наоборот). Прогресс здесь имеет место. Но он состоит в том, что применительно к некоторым потребностям познания отрицание дифференцировалось, и для различных его форм построены логические системы, определяющие их свойства. Различие логических систем (если, конечно, последние не являются вариациями на одну и ту же тему) есть показатель расширения и обогащения аппарата логики. Но это ни в коем случае не есть показатель того, что одни и те же законы логики верны в одних областях науки и неверны в других.

Иное дело — вопрос об универсальности определенной концепции логики. В этой связи надо заметить, что стремление представить классическую математическую логику в качестве единого средства решения любых проблем логической теории научных знаний (т. е. в качестве единой концепции логики вообще) оказалось неправомерным. Во многих случаях использование ее дало лишь чисто иллюстративный эффект, породило парадоксальные ситуации и тупики. Так что ближе к истине будет оценка классической математической логики лишь как одного из средств логической теории научных знаний и, при условии соответствующих интерпретаций, как одного из ее разделов. В результате критики концепции универсальности логики по тем направлениям, о которых упоминалось выше, рухнула концепция, согласно которой

классическая логика одинаково пригодна для решения всех проблем логической теории научных знаний (и «универсальна» в этом смысле). Разработка логики по этим направлениям, однако, есть разработка новых разделов универсальной логики.

§ 8. Логические исчисления

Существенное место в логических исследованиях в наше время занимает использование логических исчислений (формальных построений). Это использование идет по двум линиям. Первая из них — экспликация элементов интуиции. При этом имеют место интуитивное понимание некоторых объектов, логическое исчисление и интерпретация последнего, устанавливающая его соответствие с первым. Если непосредственного совпадения не получается, то исчисление либо приспосабливается к интуитивным предпосылкам путем введения дополнений и ограничений, либо строится с таким расчетом, чтобы указанное соответствие имело место. Получающиеся таким методом теоретические построения дают решение лишь отдельных проблем, причем решение частичное и порой с «парадоксальными» (не соответствующими интуитивному пониманию) следствиями, что не отвергает их познавательной ценности (возможность использования дедукции и предвидения, доказательность, экспликация понятий, исключение двусмысленности, простота). По второй линии логические исчисления рассматриваются независимо от интуиции, как нечто вновь изобретенное логикой в дополнение к тем логическим средствам, которые уже выработаны в языке. В обоих случаях они суть лишь способы определения логических операторов, способы установления классов логических правил, относящихся к этим операторам. Без них, в принципе, можно обойтись, конструируя сразу теории в соответствующих разделах логики по общим правилам построения теорий.

Глава 2

Частная теория терминов и высказываний

§ 1. Предмет частной теории терминов и высказываний

Общая теория терминов и высказываний устанавливает логические правила, которые не зависят от значения и смысла терминов и высказываний. Частная теория устанавливает смысл некоторого множества логических терминов и правила оперирования содержащими их высказываниями, используя для этой цели средства общей теории. Эти логические термины суть, например, выражения «индивид», «класс», «скопление», «отношение», «структура», «существует», «возможно», «случайно», «необходимо» и т. п. Последнюю теорию можно также называть частной теорией определений и вывода.

§ 2. Индивиды

Термины-субъекты, которые не могут быть родовыми по отношению к любому термину, будем называть индивидуальными, а обозначаемые ими предметы — индивидами. Другими словами, термин-субъект a является индивидуальным, если и только если для любого термина b имеет силу следующее: если $b \rightharpoonup a$, то $a \rightharpoonup b$. Примеры индивидуальных терминов: «первый космонавт, осуществивший орбитальный полет вокруг Земли», «русский поэт М. Ю. Лермонтов, убитый на дуэли в 1841 г.», «планета Солнечной системы Земля» и т. п.

Пусть a и b — переменные для терминов-субъектов. Приведенному определению можно придать такой вид: b является индивидуальным термином, если и только если

$$(\forall a)((a \rightharpoonup b) \rightarrow (b \rightharpoonup a)).$$

Из определения следует: если a есть индивидуальный термин, и при этом $b \rightharpoonup a$, то $a \rightharpoonup b$ и $a \rightleftharpoons b$.

Число предметов, обозначаемых индивидуальным термином, равно единице. Потому эти термины называют также единичными. Но этот признак является внелогическим, бесперспективным с точки зрения получения логических следствий.

Переменные для индивидуальных терминов будем называть индивидуальными переменными.

Будем употреблять выражения типа «Индивид a» и «a есть индивид». Первое из них есть лишь языковая трансформация термина «Предмет, который обозначается индивидуальным термином a». Второе есть языковая трансформация высказывания «Термин a индивидуален». Само же по себе выражение «индивид» (в качестве термина-субъекта) совпадает с терминов «предмет». Употребляя его в специфическом смысле, стремятся обратить внимание на неповторимость предмета. Но какие бы разъяснения мы тут не выдумывали, логическую строгость здесь вносит только ссылка на индивидуальность термина. Скажем мы «Индивид a», «a есть индивид», «Возьмем индивид a», «Пусть a есть индивид» и т. п., во всех случаях точный смысл будет иметь только одно: a есть индивидуальный термин, т. е. для любого термина b, если $b \rightharpoonup a$, то $a \rightharpoonup b$.

Помимо правила, получаемого из определения, для индивидуальных терминов имеют силу также следующие правила: если a есть индивидуальный термин, то

1) $x \vdash (\forall a)x$;

2) $(\exists a)x \vdash x$.

Таким образом, для индивидуальных терминов кванторы излишни.

§ 3. Классы (множества)

Выражение «класс» и «множество» мы употребляем как синонимы. Мы, далее, различаем логическую и математическую теории классов (множеств). Задача логической теории классов — установить такие правила оперирования терминами классов и высказываниями с этими терминами, которые не зависят от конкретных свойств тех или иных классов.

Мы различаем термин «класс» и особый терминообразующий оператор, который также обозначается словом «класс», но термином не является. Будем в качестве такого оператора употреблять символ K.

С помощью оператора K образуются термины первичных классов по такому правилу: если a есть термин-субъект, то Ka есть термин-субъект, причем, Ka есть индивидуальный термин.

Образовать первичный класс — значит построить термин Ka, т. е. буквально сказать «класс предметов a». Например, образовать класс богов — значит образовать термин «класс богов», где слово «класс» есть оператор K; образовать класс микрочастиц — значит построить термин «класс микрочастиц» и т. п.

Термины первичных классов образуют основу, на которой строится вся терминология, обозначающая классы. Путем обобщения терминов классов вводится, в частности, термин «класс». А именно, это можно сделать, используя переменную для терминов классов: слово «класс» будет термином таким, что если a есть термин класса, то $a \rightharpoonup$«класс». Используя операцию ограничения, можно вводить термины типа «класс такой, что P» (например, «пустой класс») и «класс такой, что x» (например, «класс такой, что все элементы этого класса имеют признаки $Q^1, \ldots, Q^n$»).

Высказывания о том, что предметы, обозначаемые термином a, включаются в класс, обозначаемый термином B, будем записывать символами вида

$$a \in B.$$

Фигурирующий в них предикат включения индивидов в класс (т. е. $\in$) определяется совместно со свойствами классообразующих операторов, в том числе — совместно с K. Индивиды, обозначаемые термином a, суть элементы класса B. Но термин a может быть общим.

Свойства терминов с оператором K и предиката $\in$ определяются имплицитно системой утверждений, в числе которых могут быть такие:

$$(\exists a)(a \in Kb) \vdash (\exists b)(b \in Ka),$$
$$(\forall a)(a \in Kb) \wedge (\forall b)(b \in Kc) \vdash (\forall a)(a \in Kc),$$
$$(\exists a)(a \in Kb) \wedge (\forall b)(b \in Kc) \vdash (\exists a)(a \in Kc),$$
$$(a \in Kb) \wedge (a \in Kc) \vdash (\exists b)(b \in Kc).$$

Здесь и в ряде случаев ниже мы не приводим полной системы аксиом, поскольку это не потребуется. А для иллюстрации сути дела достаточно отдельных примеров.

Используя предикат $\in$ и оператор K, термин «класс» (сокращенно kl) можно определить также следующим образом: если a есть термин класса, то $a \in Kkl$. Очевидно, если b есть термин-субъект, то Kb есть термин класса, и значит $Kb \in Kkl$.

§ 4. Отношения классов

Высказывание о том, что класс A включается в класс B, будем записывать символами вида

$$A \subset B.$$

Фигурирующий в нем предикат включения класса в класс (т. е. $\subset$) определяется через предикат $\in$ имплицитно следующим образом:

$$(\forall a)((a \in A) \rightarrow (a \in B)) \dashv\vdash (A \subset B),$$
$$(\exists a)(((a \in A) \wedge \sim(a \in B)) \vee ((a \in B) \wedge \sim(a \in A))) \dashv\vdash \sim(A \subset B),$$
$$(\forall a)(a \in A) \dashv\vdash (K a \subset A),$$

где a есть индивидная переменная.

Из терминов классов образуются термины того же рода с помощью операторов объединения ($\cup$), пересечения ($\cap$), и дополнения ($\bar{}$) классов. Правила построения терминов: 1) если a и b суть термины классов, то $a \cup b$ и $a \cap b$ — термины классов; 2) если a термин класса, то $\bar{a}$ — термин класса. Свойства этих операторов определяются утверждениями (в частности):

$$(a \in A) \wedge (a \in B) \dashv\vdash (a \in A \cap B),$$
$$(a \in A) \vee (a \in B) \dashv\vdash (a \in A \cup B),$$
$$(a \in A) \dashv\vdash (a \in \bar{\bar{A}}).$$

Для существования первичного класса достаточно построить его термин. Так, построив выражение «класс богов», мы образовали класс богов, и он стал существовать независимо от того, существуют боги или нет. Вопрос о существовании производных классов решается в зависимости от соблюдения правил логики при построении их названий и от дополнительных определений. В частности, если из определения термина класса следует $(a \in A) \wedge \sim(a \in A)$, то A не существует.

Существование классов вообще не зависит от существования индивидов, включаемых в них. Так, целое число, равное квадратному корню из пяти, не существует, но класс целых чисел, равных квадратному корню из пяти, существует. О нем, в частности, можно сказать, что этот класс пуст (т. е. нет такого целого числа, которое в него может быть включено без ошибки). И наоборот, существование индивидов не зависит от того, включают их в какие-то классы или нет и в какие классы их включают. Термин класса может быть построен так, что такой класс заведомо существовать не будет. Но в этот класс могут включаться существующие индивиды. Например, образуем термин класса такой: «класс, в который включается предмет a, и в то же время этот предмет не включается, а также в который включаются электроны». Такой класс не существует, поскольку нарушены правила логики при его образовании; но электроны, как известно, существуют.

Как видим, классы — это такие предметы, которые существуют лишь постольку, поскольку конструируются их названия. И когда пытаются определить классы как нечто, существующее независимо от их

терминов, то классы смешивают с энками и скоплениями предметов. А это смешение не всегда безразлично. Например, тройка целых чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего, не существует, тогда как класс таких троек чисел существует, и о нем, в частности, можно сказать, что он пуст. Но представить такой класс как нечто, существующее независимо от названия класса, здесь невозможно.

Изучение классов есть изучение предметов, включаемых в эти классы. Так что все предикаты для классов определяются со ссылкой на их элементы. Приведем несколько примеров такого рода.

Класс A есть подкласс класса B, если и только если $A \subset B$. А поскольку $A \subset B$ есть лишь сокращение для выражения $(\forall a)((a \in A) \rightarrow (a \in B))$, то первое в приведенном определении может быть заменено на второе.

Классы A и B не пересекаются, если $(\forall a) \sim ((a \in A) \wedge (a \in B))$, и пересекаются, если $(\exists a)((a \in A) \wedge (a \in B))$, где a есть индивидная переменная.

Класс A является пустым, если $(\forall a) \sim (a \in A)$, и непустым, если $(\exists a)(a \in A)$. Класс A является универсальным, если $(\forall a)(a \in A)$, и неуниверсальным, если $(\exists a) \sim (a \in A)$.

Классы A и B эквивалентны, если и только если $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ или, в другой форме, $(\forall a)((a \in A) \leftrightarrow (a \in B))$.

Класс считается конечным, если число его элементов конечно, и бесконечным, если число его элементов бесконечно.

Выражение «мощность класса» есть лишь замена выражения «число элементов класса». Все предикаты порядка для классов определются через указание на упорядоченность их элементов.

§ 5. Скопления

Как и в случае с классами, будем различать оператор «скопление» и термин «скопление». Последний определяется (аналогично термину «класс») так: если a есть термин, обозначающий скопление индивидов, то a — «скопление».

Первичные термины скоплений строятся по правилу: если a есть термин-субъект, то «скопление a» есть термин-субъект. Прочие термины скоплений предметов образуются по общим правилам образования терминологии. Заметим, что в отличие от термина «класс a» термин «скопление a» не обязательно индивидуален.

Пример различия оператора и термина «скопление»: в термине «скопление, состоящее из a, b и c» слово «скопление» есть термин, а в термине «скопление звезд в области A» — оператор. Когда употребляют выражение «дома, расположенные в районе A», «молекулы

в данном объеме газа», «звезды, входящие в Галактику» и т. п., часто имеют в виду не классы, а скопления соответствующих предметов. Это — иная точка зрения на предметы, чем в случае образования классов. Так, в отношении класса бессмысленно говорить о пространственных размерах, о перемещении и т. п., тогда как подобные предикаты вполне уместны в отношении скоплений. Существование класса не зависит от существования включаемых в него индивидов, существование же скоплений зависит. Так, скопление из a и b существует, если и только если существует каждый из a и b, тогда как класс, в который включаются a и b, существует, если образован термин «класс, в который включаются a и b».

Как в случае с классами, будем символами вида $a \in B$ изображать то, что предмет a входит (включается) в скопление B. Символами вида $A \subset B$ будем изображать (как и в случае классов) то, что все предметы, включающиеся в скопление A, включаются в скопление B.

Если термин скопления A построен так, что относительно любого индивида a известно, включается он в A или нет, то A есть индивидуальный термин, а обозначаемое им скопление — индивид.

Выражения вида $B \cup C$, $B \cap C$, $\overline{B}$ для скоплений будем рассматривать соответственно как соединение B и C, как общую часть B и C и как скопление индивидов, не входящих в B.

Для скоплений может быть построена система определений, частично аналогичная определениям для классов, частично же отличная от нее. В частности, для скоплений принимаются такие утверждения, не имеющие силы для классов:

1) $\vdash Et(A) \to ((b \in A) \to Et(b))$;

2) $\vdash Es(A) \to ((b \in A) \to Es(b))$,

где A есть переменная для скоплений, b есть переменная для эмпирических индивидов. Et есть предикат «Существует во время t», Es есть предикат «Существует в области пространства s».

§ 6. Состояния, события

Пусть x есть высказывание $\alpha P(a^1, \ldots, a^n)$, где $n \geqslant 1$, а α означает наличие или отсутствие кванторов, отрицаний и оператора неопределенности в тех или иных допустимых сочетаниях, или комбинация высказываний такого рода посредством операторов, их образующих. В таком случае $\downarrow x$ есть термин состояния. Предметы, обозначаемые такими терминами, суть состояния.

Термин a^i $(i = 1, \ldots, n)$ будем называть свободным в x, если в α нет соответствующего квантора $(\forall a^i)$ и $(\exists a^i)$. Термин sx будем считать

индивидуальным (а обозначаемое состояние — индивидуальным состоянием), если и только если все свободные термины из числа $a^1, \ldots, a^n$ суть индивидуальные термины.

Употребляется также выражение «событие». Оно ассоциируется обычно с такими $\downarrow x$, в которых в предикате высказывания x имеется какое-то указание на то, что x стало истинным, а до этого было истинным $\sim x$. Например, термин «тот факт, что частица a попала в область b» обозначает событие.

§ 7. Существование

Предикат «существует» будем сокращенно записывать символом E. употребление такого предиката есть эмпирически данный факт, поскольку встречаются высказывания вида «Электрон существует», «Флогистон не существует», «Христос как историческая личность не существовал» и т. п.

Предметы существуют или не существуют в определенном месте, в определенное время, в любом месте, в любое время и т. д., — в каких-то координатах. Мы их будем предполагать при рассмотрении предиката E, но для упрощения изложения будем от них отвлекаться (они специфически не характеризуют его). И введение символа E выполняет здесь, кстати сказать, еще одну задачу: отвлечься от тех ассоциаций, которые вызывает грамматическая форма слова «существует».

Имеются случаи, когда смысл термина E не определяется, а лишь разъясняется. Эти случаи суть случаи употребления в высказываниях $E(a)$, $\neg E(a)$ и $?E(a)$, где a есть индивидуальный термин. Здесь имеют место два подслучая: 1) вопрос о существовании индивида решается в зависимости от возможности наблюдать с помощью его органов чувств или посредством приборов, непосредственно или по его следам по результатам воздействия на другие предметы); сюда же относится доверие к свидетельствам тех, кто наблюдал той или иной индивид; 2) вопрос о существовании индивидов решается посредством доказательства из других данных, как допущение для каких-либо целей, как вывод из определений. Неопределенность здесь означает, что невозможно установить посредством наблюдения (например, в случае процесса возникновения или уничтожения индивида) или рассуждения, существует или не существует индивид.

Предполагая данным значение E для указанных случаев, можно дать точное определение этого предиката для других случаев.

Пусть a в высказываниях $E(a)$, $\neg E(a)$ и $?E(a)$ может быть родовым термином. Например, в высказывании «Электрон существует» слово «электрон» является общим термином. Определения E для общих

субъектов имеют такой вид:

$$E(a) \equiv Df \cdot (\exists b)((b \rightharpoonup a) \wedge E(b)),$$

где b есть индивидная переменная, или, в другой форме,

$$E(a) \equiv Df \cdot (\exists b)E(b \downarrow (b \rightharpoonup a)),$$

что читается как «a существует, если и только если существует по крайней мере один такой индивид, который есть a»,

$$\neg E(a) \equiv Df \cdot (\forall b)((b \rightharpoonup a) \rightarrow \neg E(b))$$

или, в другой форме,

$$\neg E(a) \equiv Df \cdot (\forall b)E(b \downarrow (b \rightharpoonup a)),$$

что читается как «a не существует, если и только если все индивиды, которые суть a, не существуют».

$$?E(a) \equiv Df \cdot \sim E(a) \wedge \sim \neg E(a).$$

Для энок субъектов предикат E определяется так:

$$E(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot E(a^1) \wedge \ldots \wedge E(a^n),$$

т. е. энка предметов существует, если и только если существует каждый предмет, входящий в нее.

$$\neg E(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot \neg E(a^1) \vee \ldots \vee \neg E(a^n),$$

т. е. энка предметов не существует, если и только если не существует по крайней мере один из входящих в нее предметов.

$$?E(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot \sim E(a^1, \ldots, a^n) \wedge \neg E(a^1, \ldots, a^n).$$

В имлицитной форме принятые определения имеют такой вид:

1) $E(a) \dashv\vdash (\exists b)E(b \downarrow (b \rightharpoonup a))$;
2) $\neg E(a) \dashv\vdash (\forall b) \neg E(b \downarrow (b \rightharpoonup a))$;
3) $?E(a) \dashv\vdash \sim E(a) \wedge \sim \neg E(a)$;
4) $E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash E(a^1) \wedge \ldots \wedge E(a^n)$;
5) $\neg E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash \neg E(a^1) \vee \ldots \vee \neg E(a^n)$;
6) $?E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash \sim E(a^1, \ldots, a^n) \wedge \sim \neg E(a^1, \ldots, a^n)$.

Существование индивидуальных состояний определяется аксиомами:

7) $E(\downarrow x) \dashv\vdash x$,

т. е. sx существует, если и только если x истинно;

8) $\neg E(\downarrow x) \dashv\vdash \sim x$,

т. е. sx не существует, если и только если $\sim x$ истинно.

Если sx есть родовой термин, то предикат существования определяется для sx на общих основаниях (как выше). Поскольку либо x истинно, либо $\sim x$ истинно, то для существования состояний отрицания $\sim$ и k совпадут, что запишется аксиомами:

9) $\sim E(\downarrow x) \neg \dashv\vdash \neg E(\downarrow x)$.

Из приведенных аксиом получаются следствия, например, такие:

$E(\downarrow (x \wedge y)) \vdash E(\downarrow x) \wedge E(\downarrow y)$,
$\vdash E(\downarrow (x \vee \sim x))$,
$\vdash \neg E(\downarrow (x \wedge \sim x))$.

Вопрос о существовании классов решается иначе, чем для рассмотренных случаев. Для первичных классов: 1) $E(Ka)$, если и только если a есть термин-субъект; 2) $\neg E(Ka)$, если и только если a не есть термин-субъект; 3) $\sim E(Ka) \equiv \neg E(Ka)$. Для других терминов классов предикат существования определяется так: $E(a)$, если и только если соблюдены правила построения терминов при образовании a, и введение a не ведет к противоречию. Построим, например, такой термин класса a: «класс, в который включается индивид b и не включается этот же индивид b». Этот термин по построению обладает таким свойством: $b \in a$ и $\sim(b \in a)$, т. е. ведет к противоречию. Такой класс по определению самого a не существует.

Как уже говорилось, иначе обстоит дело с существованием скоплений предметов. Здесь все зависит от того, как построен термин скопления. Если термин a построен так, что в скопление a включаются только предметы $b^1, \ldots, b^m$ $(m \geqslant 1)$, то $E(a) \equiv Df \cdot E(b^1) \wedge \ldots \wedge E(b^m)$. Если a построен так, что указано лишь число предметов, включаемых в a, то для существования a необходимо и достаточно существования именно такого числа предметов данного рода. Если не определено, какие именно предметы данного рода включаются в скопление a и сколько предметов включается в a, то возможны два случая. Если при этом a есть индивидуальный термин, то имеет силу такое определение: $E(a)$, если и только если существует по крайней мере один индивид, входящий в a, т. е.

$E(a) \dashv\vdash (\exists b)E(b \downarrow (b \in a))$,
$\neg E(a) \dashv\vdash (\forall b) \neg E(b \downarrow (b \in a))$,
$?E(a) \dashv\vdash \sim E(a) \wedge \sim \neg E(a)$.

Если a есть общий (родовой) термин, то вопрос решается так же, как выше для родовых терминов, т. е. $E(a) \dashv\vdash (\exists b)E(b \downarrow (b \rightharpoonup a))$ и т. д. (только здесь для b вопрос решается в указанных выше определениях, поскольку b есть скопление).

И совершенно иначе предикат существования определяется для абстрактных предметов. Здесь надо различать два аспекта. Пусть b есть термин абстрактного предмета. Предмет b существует эмпирически, если и только если имеется его эмпирическая интерпретация $a \rightharpoonup b$ и при этом a существует. Это — один аспект. Другой аспект — чисто логический: b существует логически, если и только если при образовании его соблюдены правила логики и употребление его не ведет к противоречию.

§ 8. Кванторы и существование

Возьмем высказывания «Некоторые предметы называют флогистоном» и «Некоторые предметы называют круглым квадратом». Они имели строение $(\exists a)X$. В соответствии с принятой в логике традиции их рассматривают как высказывания «Существует предмет, который называется флогистоном» и «Существует предмет, который называется круглым квадратом», имеющие строение $E(a \downarrow x)$. Но первые считаются истинными (флогистон называют флогистоном, а круглые квадраты — круглыми квадратами), а последние нет (одно из них отвергается как физическая гипотеза, а второе — как логически противоречивое). Так что в общем случае из высказываний $(\exists a)X$ логически не следуют высказывания $E(a \downarrow x)$. Высказывания $(\exists a)X$ не предполагают существования a, т. е. из них не следуют высказывания $E(a)$. Они предполагают более слабое условие, а именно — лишь возможность выбора a. *А* выбрать можно и не существующие предметы. Это можно сделать, в частности, употребляя обозначающие их термины, смысл которых известен. Высказывания $(\exists a)X$ с этой точки зрения означают: можно выбрать такой a, что X. Аналогично высказывания $(\forall a)X$ не предполагают существования a. Они означают: какой бы a мы не взяли, X истинно в отношении к нему. Так что кванторы $\exists$ нельзя отождествлять с предикатами E.

Соотношение квантора $\exists$ и предиката E определяется правилами:

1) $E(a) \vdash (\exists b)(b \rightharpoonup a)$;
2) $\neg\,(\exists\, E(b))(b \rightharpoonup a) \vdash \neg\, E(a)$;
3) $E(a \downarrow x) \vdash (\exists a)x$;
4) $(\neg \exists a)x \vdash \neg\, E(a \downarrow x)$.

Утверждения же

$(\exists\, b)(b \multimap a) \vdash E(a)$,

$(\exists\, a)x \vdash E(a \downarrow x)$

логическими правилами не являются. Если они где-то принимаются, то лишь как внелогические допущения. Принятие таких утверждений как общелогических правил порождает парадоксы. Помимо того, что говорилось в начале параграфа. Приведем еще такой примитивный пример. Из $\neg E(a)$ следует $(\exists\, a) \neg E(a)$. Если истолковывать $(\exists\, a)X$ как «Существует a такой, что X», получим «Существует a такой, что не существует a». А это равносильно допущению, о котором здесь идет речь и согласно которому из $(\exists\, a) \neg E(a)$ следует $E(a \downarrow \neg E(a))$. Поскольку $a \downarrow \neg E(a) \rightleftharpoons a \downarrow \neg E$ получим $E(a \downarrow \neg E)$.

§ 9. Модальные предикаты

Предикаты «возможно», «необходимо» и «случайно» (их называют модальными) будем для краткости записывать символами M, N и C. Как в случае с предикатом E, смысл этих предикатов зависит от логических типов предметов (субъектов), к которым их относят.

Прежде всего надо сказать, что модальные предикаты ассоциируются с терминами состояний, т. е. с терминами типа sx. Что касается просто терминов предметов, то употребление модальных предикатов есть лишь результат сокращений такого типа:

$M(a) \equiv Df \cdot M(\downarrow E(a))$,

$N(a) \equiv Df \cdot N(\downarrow E(a))$

и т. д. Мы в дальнейшем, рассматривая высказывания вида $M(a), N(a)$ и т. д., будем предполагать, что a суть термины состояний.

К высказываниям с модальными предикатами относится все то, что говорилось о месте, времени, условиях и т. д. в отношении предиката E. Но мы все это, как и выше, для упрощения изложения будем опускать как нечто само собой разумеющееся и предполагаемое.

Предикат N определяется через предикат M таким образом:

$N(\downarrow x) \equiv Df \cdot \neg M(\downarrow \sim x)$,

$\neg N(\downarrow x) \equiv Df \cdot M(\downarrow \sim x)$,

$?N(\downarrow x) \equiv Df \cdot ?M(\downarrow \sim x)$.

А в случаях, когда отрицания $\sim$ и $\neg$ совпадают, достаточно такого определения

$N(\downarrow x) \equiv Df \cdot \sim M(\downarrow \sim x)$.

Так что в дальнейшем будет достаточно рассмотреть лишь предикат M.

Подчеркиваем, что термины M, N и C суть предикаты, а не субъекты. Однако их часто рассматривают как субъекты, говоря о возможности, необходимости и случайности как об эмпирических предметах. Например, «То, что получилось a, есть чистая случайность», «B имеет возможность попасть в A» и т. п. Но в таких случаях либо слова «возможность», «необходимость» и «случайность» употребляются в таком смысле, что это не имеет никакого отношения к модальностям состояний (под возможностями имеют в виду средства, необходимость понимают как обязанность и т. п.), либо выражения с этими словами суть литературные вариации высказываний с модальными предикатами (например, фраза «B имеет возможность попасть в A» может быть модификацией высказывания «То, что B попадет в A, возможно»).

§ 10. Возможность

В языковой практике предикат M вводится в самых различных случаях, которые объединить в одном определении невозможно. Приведем основные случаи.

Для родовых терминов $\downarrow x$ предикат M определяется аналогично предикату E:

$$M(\downarrow x) \equiv Df \cdot (\exists b)M(b \downarrow (b \rightarrow\downarrow x)),$$
$$\neg M(\downarrow x) \equiv Df \cdot (\forall b \neg M(b \downarrow (b \rightarrow\downarrow x)),$$
$$?M(\downarrow x) \equiv Df \cdot \sim M(sx) \wedge \sim \neg M(\downarrow x),$$

где b есть переменная состояний.

Для терминов состояний с операторами $\vee$ и $\wedge$ предикат M определяется некоторой системой аксиом, среди которых могут быть такие аксиомы (системы аксиом могут варьироваться, и приводимые ниже аксиомы могут оказаться теоремами, выводимыми из других аксиом):

$$M(\downarrow (x \vee y)) \dashv\vdash M(\downarrow x) \vee M(\downarrow y),$$
$$\neg M(\downarrow (x \vee y)) \dashv\vdash \neg M(\downarrow x) \wedge \neg M(\downarrow y),$$
$$\neg M(\downarrow (x \wedge y)) \dashv\vdash \neg M(sx) \vee \neg M(\downarrow y)$$

и т. п. Интересно, что в этом случае эксплицитные определения не всегда возможны. Так, поскольку неприемлемо утверждение

$$M(\downarrow x) \wedge M(\downarrow y) \vdash M(\downarrow (x \wedge y))$$

(а оно неприемлемо в общем виде, так как если $x \rightarrow\sim y$, то будет $\neg M(\downarrow (x \wedge y))$), неприемлемо и определение вида

$$M(\downarrow (x \wedge y)) \dashv\vdash M(\downarrow x) \wedge M(\downarrow y).$$

Однако и здесь при некоторых ограничениях можно найти имплицитное определение, заменимое на эксплицитное. В частности, в рассматриваемом примере это можно сделать так:

$$M(\downarrow (x \wedge y)) \dashv\vdash M(\downarrow x) \wedge M(\downarrow y) \wedge \sim (x \rightarrow \sim y).$$

Для энок и скоплений предметов предикат M определяется аналогично E (если в определениях E везде заменить E на M, то получим определения M). Например,

$$M(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot M(a^1) \wedge \ldots \wedge M(a^n).$$

Для абстрактных предметов и для классов термины E и M не различаются, т. е. если a есть термин абстрактного предмета или класса, то

$$M(a) \equiv Df \cdot E(a),$$
$$\neg M(a) \equiv Df \cdot \neg E(a).$$

Рассмотрим, наконец, смысл предиката M в сочетании с индивидуальными терминами $\downarrow x$. Один случай здесь является бесспорным, а именно — случай

$$x \rightarrow M(\downarrow x).$$

Этот случай предполагает, что x истинно, и предикат M в нем оказывается практически излишним. Интереснее другой случай, а именно — когда x не является истинным (или $\sim x$ истинно), т. е. $\downarrow x$ не существует в то время, когда строится высказывание о возможности или невозможности sx. Но для этого случая строгого определения предиката M нет. Навык оперировать им вырабатывается на отдельных примерах. Ниже мы опишем некоторую общую схему для этого.

Пусть t^1 есть время, когда строится (принимается) высказывание $\alpha M(\downarrow x)$, где α означает наличие $\neg$, ? или их отсутствие. Возможны два подслучая: 1) предполагается, что состояние sx возможно или невозможно в будущем (в какое-то время t^2); 2) предполагается, что состояние $\downarrow x$ было возможно или невозможно в какое-то время t^2 в прошлом. Второй подслучай сводится к первому, поскольку смысл предиката M здесь устанавливается путем переноса всей ситуации во время t^3, предшествовавшее t^2. Например, в t^2 состояние $\downarrow x$ не существовало; предикат M будем рассматривать с точки зрения положения вещей во время t^3, предшествовавшее t^2, в которое sx также не существовало; но мы смотрим на дело так, как будто нам в t^3 не известно, что $\downarrow x$ в t^2 существовать не будет. И не исключено, что согласно каким-то правилам введения M высказывание $M(\downarrow x)$, отнесенное к t^2, для t^3 окажется приемлемым. Такие случаи употребления часто

встречаются (например, в высказывании «Наполеон мог выиграть битву при Ватерлоо»).

Итак, остался случай употребления предиката M для индивидуальных состояний, которые не существуют в настоящее время, причем предполагается будущее время существования или несуществования этих состояний. Излагаемые ниже определения для этого случая не являются правилами получения истинных (или принимаемых) высказываний с предикатом M, а суть лишь разъяснение смысла этого предиката для такого случая.

Определению здесь подлежит не просто выражение $M(\downarrow x)$, а выражение $[M(\downarrow [xt^2])t^1]$, т. е. выражение «тот факт, что x во время t^2, возможен во время t^1». Определение примет такой вид

$$[M(\downarrow [xt^2])t^1] \equiv$$
$$\equiv Df\cdot (t^2 > t^1) \wedge \sim [xt^1] \wedge (\neg\, \exists\, \downarrow a)([at^1] \wedge ([at^1] \rightarrow \sim [xt^2])),$$

где a есть переменная для высказываний, $t^2 > t^1$ есть высказывание t^2 позже t^1, $\sim [xt^1]$ означает, что x неистинно в t^1, а оставшаяся часть определяющего выражения означает, что нет такого высказывания, которое было бы истинно в t^1 и из которого следовало бы, что x неистинно в t^2. Поскольку соотношение t^1 и t^2 предполагается неявно, то вместо выражения $[M(\downarrow [xt^2])t^1]$ берется его сокращенный языковый заместитель $M(\downarrow x)$, и возникают неразрешимые проблемы его истолкования.

Отрицание возможности $\downarrow x$ определяется так:

$$[\neg M(\downarrow [xt^2])t^1] \equiv$$
$$\equiv Df\cdot (t^2 > t^1) \wedge \sim [xt^1] \wedge (\exists\, \downarrow a)([at^1] \wedge ([at^1] \rightarrow \sim [xt^2])).$$

Неопределенность определяется стандартно:

$$?M(\downarrow x) \equiv Df\cdot \sim M(\downarrow x) \wedge \sim \neg M(\downarrow x).$$

§ 11. Случайность

Предикат «случайно» (будем употреблять букву C) определяется через предикат M так:

$$C(\downarrow x) \equiv Df\cdot x \wedge M(\downarrow \sim x),$$
$$\neg C(\downarrow x) \equiv Df\cdot x \wedge \neg M(\downarrow \sim x),$$
$$?C(\downarrow x) \equiv Df\cdot \sim C(\downarrow x) \wedge \sim \neg C(\downarrow x).$$

Опять-таки речь идет о смысле предиката C, а не о том, что нам дает уверенность в справедливости утверждения с этим предикатом.

Например, высказывание «A проиграл партию в шахматы B случайно» можно рассматривать с двух точек зрения: 1) каков смысл слова «случайно»; 2) почему мы так считаем. Ответ на первый вопрос есть дело логики. Ответ на второй в ее компетенцию не входит.

От случайности надо отличать модальное безразличие Б. Последнее определяется так:

$$\text{Б}(\downarrow x) \equiv Df \cdot M(\downarrow x) \wedge M(\downarrow \sim x),$$
$$\neg\, \text{Б}(\downarrow x) \equiv Df \cdot \neg\, M(\downarrow x) \wedge \neg\, M(\downarrow \sim x).$$

Во многих случаях языковой практики предикат «случайно» употребляется так, что содержащие его высказывания не поддаются никакой проверке. В особенности это относится к индивидуальным событиям («Наполеон проиграл битву при Ватерлоо случайно (не случайно)», «Язык в человеческом обществе возник случайно (не случайно)» и т. п.).

Рассмотрим такую ситуацию. Пусть человек A находится в комнате X, из которой можно выйти в любую из изолированных комнат $Y^1, \ldots, Y^n$ $(n \geqslant 2)$. Причем, выйдя в какую-то из Y^i, A не может вернуться обратно в X и попасть в другие Y^i. В комнате Y^1 находится другой человек B. Поскольку A может выйти из X в Y^1, встреча A с B может состояться. Но поскольку A может выйти не в Y^1, а в какую-то другую из Y^i, то возможно и то, что встреча A с B не состоится. Согласно заданным условиям и определению предиката случайности имеем следующее: если A вышел из X в Y^1, и, следовательно, встреча его с B состоялась, то это событие произошло случайно.

Но изменим условия для A так. Пусть A имеет возможность выходить в любую из Y^i и затем возвращаться обратно, причем пусть он может это сделать заданное (в частности — неограниченное) число раз. И если при этом произошла встреча A с B, то мы еще не имеем оснований высказать о ней высказывание с предикатом случайности.

В рассматриваемом случае возможны варианты, в которых указаны дополнительные сведения о ситуации. Один вариант состоит в том, что принимается условие: число выходов A из X в Y^i не меньше n, и при этом A обязан выходить в каждую из Y^i. Очевидно, в этом случае A обязательно выйдет и в Y^1. А если встреча A с B необходима, то по определению предиката «случайно» она неслучайна.

Во втором варианте принимается лишь условие, согласно которому число выходов A из X в Y^i не меньше n. Пусть A совершил m выходов, и на последнем встретился с B. Случайно или неслучайно это произошло? Ничего по этому поводу сказать нельзя, поскольку для этого случая предикат «случайно» не определен. Интересно здесь то, что причиной отсутствия условий для употребления этого предиката является дополнительная информация о ситуации, исключающая

возможность принятия утверждения о том, что встреча A с B может не состояться.

Пусть a есть событие, наступление которого зависит от наступления событий класса b так: если наступило a, то наступило какое-то событие b, и если не наступило b, то не наступило a. Пусть класс b разбит на n непересекающихся потенциально непустых подклассов, а мощность класса b равна m. Предикат C для рассматриваемого случая можно определить так: 1) если наступило a, и при этом $m < n$, то $C(a)$, 2) если наступило a, и при этом $m \geqslant n$, то $\sim C(a)$. Выражение $\neg C(a)$ остается при этом не определенным по той причине, что

$$\neg C(a) \dashv\vdash N(a),$$

а из заданных условий не следует, что a непременно произойдет. Так что в рассматриваемом случае различие отрицаний $\neg$ и $\sim$ весьма существенно: $\sim C(a)$ означает «Нельзя сказать, что a случайно», а $\neg C(a)$ означает « a неслучайно (т. е. необходимо)».

Вернемся к нашему примеру. Если число выходов A из X меньше числа различных Y^i, то по принятому определению встреча его с B случайна, а если оно равно или больше числа Y^i, то неверно, что она случайна. Но нельзя сказать, что она неслучайна. Чтобы сказать, что она неслучайна, нужны дополнительные условия, из которых следовало бы утверждение о необходимости встречи.

Предикат «случайно» употребляется также в случаях, когда вероятность наступления события сравнительно мала. Здесь нет единого предела, ниже которого величина вероятности считается настолько малой, что употребляют слово «случайно»; этот предел зависит от конкретных условий и соответствующих явных или неявных соглашений. Например, вероятность 0,01 гибели самолета в мирное время рассматривается как огромная, а вероятность 0,1 в военное время как незначительная.

§ 12. Фатализм

Фатализм есть концепция мира, согласно которой все происходящее в мире происходит с необходимостью. Будучи распространен на будущее, он ведет к концепции предопределенности.

Эта концепция не есть нечто такое, с чем можно спорить как с одной из гипотез науки. Она есть результат двусмысленности предикатов M и N.

Согласно самим определениям предикатов возможности и необходимости верны лишь такие утверждения A:

$$x \vdash M(\downarrow x),$$
$$N(\downarrow x) \vdash x,$$

т. е. «Существующее возможно» и «Необходимое существует или будет существовать» (в соответствующее время), а утверждения B:

$$x \vdash N(\downarrow x),$$
$$M(\downarrow x) \vdash x$$

неверны, т. е. неверны утверждения «Если нечто существует, то с необходимостью» и «Если нечто возможно, то оно существует». Утверждения A верны, а утверждения B неверны не в силу какого-то опытного изучения мира, а в силу определений терминов M и N. Последние вводятся в употребление именно такими. Так что если некоторое состояние sx существует, существовало или будет существовать, то из этого логически не следует, что sx необходимо. Не исключено, что из каких-то других источников будет установлено, что sx действительно необходим. Но — из других источников, а не из факта существования sx. Так что утверждение «Все существовавшее и существующее необходимо» неявным образом предполагает иное определение предикатов возможности и необходимости, согласно которому

$$E(a) \vdash N(\downarrow E(a)), \quad \neg E(a) \vdash \neg M(\downarrow E(a)).$$

Точно так же ошибочно считать, будто все то, что не произошло в прошлом, было невозможно, так как по определению предиката M утверждение

$$\sim x \vdash \neg M(\downarrow x)$$

неверно. Другое дело, высказывание $\neg M(\downarrow x)$ может оказаться верным, но уверенность в этом нам даст не знание о том, что $\sim x$ истинно, а какие-то другие сведения.

Что касается будущих состояний, то концепция предопределенности есть либо тавтология «Чему быть, того не миновать», либо частный случай приведенного выше переопределения предикатов.

Чтобы проверить суждение «Все состояния, которые будут иметь место в будущем, будут иметь место с необходимостью (являются необходимыми)» в случае с излагаемым здесь определением предиката N, надо проверить каждое суждение вида $N(\downarrow x)$, где $\downarrow x$ обозначает состояния, которых нет сейчас, но которые будут иметь место со временем. Но, во-первых, мы не можем иметь даже терминов типа $\downarrow x$ для всех будущих состояний. Во-вторых, чтобы принять такие высказывания сейчас, когда истинно $\sim x$, нужны какие-то основания, а не просто чисто психологическая вера. И среди этих оснований должны быть указаны правила признания истинности высказываний вида $N(sx)$ для будущих состояний. А правила эти в общем сводятся к следующему: если у нас имеются такие высказывания y, которые мы принимаем как

истинные сейчас, и если истинно $y \to x$, то высказывание $N(sx)$ истинно. Если же таких высказываний нет или имеются высказывания z такие, что $z \to \sim x$, то $N(sx)$ неистинно. Но всем хорошо известно, что случаи такого рода, когда находятся y, бывают, но бывают не так уж часто, да и то с массой оговорок, ошибок и т. д. Так что если принято определение M и N такое, что верны утверждения A и неверны B, то концепции фатализма и предопределенности суть результат логических ошибок.

§ 13. Модальные операторы

Слова «возможно» и «необходимо» могут играть роль не только предикатов, но и операторов, подобно тому как слова «существует» и «универсально» могут быть предикатами и кванторами. Будем для этой цели употреблять символы соответственно M и N. Они определяются так:

$$(Ma)x \equiv Df \cdot M(a \downarrow x),$$
$$(\neg Ma)x \equiv Df \cdot \neg M(a \downarrow x),$$
$$(Na)x \equiv Df \cdot N(a \downarrow x),$$
$$(\neg Na)x \equiv Df \cdot \neg N(a \downarrow x).$$

§ 14. Актуальное, экзистенциальное, потенциальное

В определениях терминов в определяющей части могут фигурировать выражения с E, M и $\exists$. Будем в таком случае различать экзистенциальное, потенциальное и актуальное наличие определяемого признака. Например, согласно определениям

$$Q^1(a) \equiv Df \cdot E(c \downarrow P(a, c)),$$
$$Q^2(a) \equiv Df \cdot M(c \downarrow P(a, c)),$$
$$Q^3(a) \equiv Df \cdot (\exists c)P(a, c),$$

Q^1 экзистенциально присущ a, Q^2 — потенциально, Q^3 — актуально. Если принимается $(\exists a)X \to E(a \downarrow x)$, то для предметов a актуальное совпадает с экзистенциальным. Если принимается $M(a \downarrow x) \to E(a \downarrow x)$, то потенциальное совпадает с экзистенциальным. Если принимается $(\exists a)X \to M(a \downarrow x)$, то актуальное совпадает с потенциальным. Поскольку в традиционном понимании существование отвергалось как предикат и принималось только как квантор, то экзистенциальное и актуальное не различались, и актуальное противопоставлялось только потенциальному. В выражении «актуальное» никакого иного смысла мы не вкладываем.

§ 15. Измерение возможности

Возможности состояний различаются по величине или степени. Например, употребляются выражения вида «sx очень возможно», «Возможность sx незначительна», «Возможность sx почти равна нулю», «sx более возможно, чем sy» и т. п., в которых в архаической форме явно проступает различие возможностей состояний по величине. В такого рода случаях к предикату M присоединяются некоторые языковые средства α, фиксирующие величину, и в результате получаются предикаты типа $M\alpha$. В частности, это могут быть предикаты типа «M со степенью, равной β», «M со степенью большей β» и т. п.

Частный случай предикатов типа $M\alpha$ суть предикаты вероятности, где α есть выражение $= \beta$, $< \beta$, $> \beta$, $\geqslant \beta$ или $\leqslant \beta$, а β суть числа на некотором отрезке от A до B. Принято измерять вероятность числами от 0 до 1. Это факт внелогический. Мы будем рассматривать 0 и 1 соответственно как «минимальная величина» и «максимальная величина». Выражения «Вероятность sx равна β (есть β, больше β, меньше β и т. п.)» суть лишь языковые трансформации высказываний типа $M\alpha(\downarrow x)$ («$\downarrow x$ возможно со степенью β», «$\downarrow x$ имеет степень возможности, равную β» и т. п.). Будем их для краткости и удобства чтения записывать общепринятыми символами типа $p(x) = \beta$, $p(x) > \beta$ и т. п.

Логические свойства предикатов вероятности определяются утверждениями:

$$\vdash 0 \leqslant p(x) \leqslant 1,$$
$$\vdash (p(x) = 0) \leftrightarrow \neg M(\downarrow x),$$
$$\vdash (p(x) > 0) \leftrightarrow M(\downarrow x),$$

которые суть частный случай утверждений для предикатов величин, и, дополнительно к ним, утверждениями:

$$\vdash p(x \wedge y) \leqslant \min(p(x), p(y)),$$
$$\vdash p(x \vee y) \geqslant \max(p(x), p(y)),$$
$$\vdash p(\sim x) = 1 - p(x),$$

относящимся к операторам $\wedge, \vee, \sim$. Для оператора условности имеют силу утверждения:

$$\vdash (x \to y) \to (p(x) \leqslant p(y)),$$
$$\vdash x \to (p(x \to y) = p(y)).$$

Наличие различных способов вычисления вероятности и возможность модификации правил вычисления нельзя рассматривать как наличие различных понятий вероятности. Дело в том, что слово «вероятность» есть лишь замена выражения «величина (степень) возможности»,

а точным определением его является не изобретение определений типа «вероятность есть...», а описание свойств предикатов вероятности и, более того, содержащих их высказываний. Правильно поставленным здесь будет вопрос такого рода: каков смысл выражений типа $M\alpha(\downarrow x)$, $p(x) = \alpha$, $p(x) > \alpha$ и т. п.? Логически правильный ответ на вопрос есть описание свойств предикатов $M\alpha$ и описание способов нахождения α.

Употребляют выражение «вероятность высказывания». Оно многосмысленно и неопределенно. Оно может означать вероятность того, что некоторое высказывание x истинно или будет истинным, а эти выражения в свою очередь могут означать, что sx существует или наступит, а также то, что мы правы в отношении некоторого предмета, утверждая x.

Интерес здесь представляют два случая. Первый: вероятность того, что sx существует, есть вероятность того, что мы обнаружим существование $\downarrow x$. Здесь имеется в виду уже не состояние sx, а состояние $\downarrow y$, где y есть высказывание «Существование sx обнаружено (установлено и т. п.)». Для этого случая имеет силу очевидное правило: $p(y) \leqslant p(x)$.

Второй случай: вероятность того, что мы правы, утверждая x. Это — частный случай вычисления вероятности для индивидуальный состояний. Здесь принимаются во внимание обстоятельства в пользу x и против. Только ситуация здесь запутывается потому, что в качестве обстоятельств «за» и «против» могут приниматься во внимание признаки предметов, о которых говорится в x (например, при установлении вероятности того, что мимолетно виденный нами человек есть A, принимаются во внимание известные нам признаки A и обстоятельства его жизни).

Несколько слов еще об одной любопытной логической ошибке. Встречается утверждение, что возможное событие рано или поздно осуществится. В самом деле, если $M(\downarrow x)$, то $p(x) > 0$. А если число некоторых «испытаний», в которых может выпасть состояние sx, достаточно велико, то отсюда следует, что sx рано или поздно будет иметь место. Но это было бы верно, если бы частотный метод был единственным способом установления вероятности событий. Как мы видели, этот метод не применим для индивидуальных событий и вообще в случаях, когда число «испытаний» не может быть достаточно большим. Кроме того, высказывание $p(x) > 0$ может быть просто следствием $M(\downarrow x)$, а последнее может быть принято только потому, что x не ведет к противоречию, что нет таких $\downarrow y$, что $y \rightarrow \sim x$, и т. п.

§ 16. Отношения

Среди высказываний с двумя и более местными предикатами имеются такие, которые имеют строение aRb и $a \neg Rb$ или могут быть

путем некоторых языковых преобразований приведены к такому виду. Например, «a больше b», «a не больше b», «a в три раза тяжелее b» и т. д. Такие высказывания называются высказываниями об отношениях, а то, о чем в них говорится, называется отношениями (т. е. если x есть высказывание об отношении, то предмет, обозначаемый термином sx, есть отношение). Например, термин «Тот факт, что a больше b» обозначает отношение.

В символах aRb и $a \neg Rb$ буква R обозначает тип предиката отношения (и, соответственно, отношения), но не сам предикат полностью. Так, в высказывании «a больше b» субъекты суть термины a и b, предикат запишется выражением «первый предмет больше второго», тип отношения обозначает слово «больше». Термин b может быть парой, тройкой и т. д. терминов. Например, в высказывании «a находится между b, c и d» термин, идущий вслед за отношением «находится между», есть тройка терминов (b, c, d).

Оператор ? определяется для высказываний об отношениях следующим образом:

$$(a?Rb) \equiv Df \cdot \sim(aRb) \wedge \sim(a \neg Rb).$$

Отношение R является рефлексивным, если и только если истинно aRa, симметричным, если и только если истинно $(aRb) \rightarrow (bRa)$, и транзитивным, если и только если истинно $(aRb) \wedge (bRc) \rightarrow (aRc)$.

§ 17. Сравнение

Отношения различаются как отношения сравнения (например, «тяжелее») и отношения порядка (например, «расположен правее»). В случае сравнения предметов выделяются какие-то признаки и выясняется наличие или отсутствие предметов этих признаков (сходство и различие), а также количественное сходство или различие по какому-либо признаку.

Имеется группа высказываний сравнения, в которых говорится о превосходстве одних предметов над другими по какому-то признаку. Будем их изображать символами вида

$$a > pb,$$

где символ $> p$ читается как «превосходит по признаку p». Это — схематическое, или обобщенное, изображение группы высказываний, которые литературно могут иметь самую различную форму и знак отношения, в которых не всегда расчленен на $>$ и p. Так, в высказываниях «a выше b» и «a тяжелее b» слова «выше» и «тяжелее» суть частные случаи знаков отношения «превосходит по высоте» и «превосходит по весу».

Внутреннее отрицание и неопределенная форма таких высказываний имеют вид

$$a\neg > pb \quad \text{и} \quad a?> pb.$$

Через отношение превосходства определяются отношения «тождественно по признаку» и «уступает по признаку». Будем их записывать символами $= p$ и $< p$. Таковы, например, «a имеет такую же высоту, как b», «a равен по весу b», «a легче b», «a меньше b» и т. п. Определения этих отношений можно эксплицитно записать так:

$$(a = pb) \equiv Df\cdot (a\neg > pb) \wedge (b\neg > pa),$$
$$(a\neg = pb) \equiv Df\cdot (a > pb) : (b > pa),$$
$$(a < pb) \equiv Df\cdot (b > pa),$$
$$(a\neg < pb) \equiv Df\cdot (b > pa) : (a = pb),$$

где оператор есть сильная дизъюнкция («одно и только одно из двух»). Неопределенность определяется по общему правилу.

Логические свойства знака отношения $> p$ определяются имплицитно системой аксиом C^i, среди которых имеются такие:

1) $\vdash (a\neg > pa)$;
2) $(a > pb) \vdash (b\neg > pa)$;
3) $(a\neg > pb) \vdash (b > pa) : (a = pb)$;
4) $(a > pb) \wedge (b > pc) \vdash (a > pc)$;
5) $(a > pb) \wedge (b = pc) \vdash (a > pc)$;
6) $(a = pb) \wedge (b > pc) \vdash (a > pc)$;
7) $(a\neg > pb) \wedge (b\neg > pc) \vdash (a\neg > pc)$.

Первая аксиома означает, что отношение $> p$ нерефлексивно, вторая — что оно несимметрично, четвертая — что оно транзитивно. Знак $A = pB$ здесь фигурирует лишь как сокращение для $(A\neg > pB) \wedge (B\neg > pA)$, так что он может быть устранен.

Очень важное значение имеет следующее обстоятельство. Сравнение предметов всегда производится каким-то способом и относительно чего-то третьего, отличного от сравниваемых предметов. Например, чтобы сказать, что a движется медленнее, чем b (или что скорость a меньше скорости b), необходим либо некоторый способ сравнения величин, либо способ наблюдения движущихся предметов, — требуется тот, кто осуществляет сравнение и какие-то средства для этого. Так что условимся букву за знаками $>, =$ и $<$ считать не только знаком признака предметов, но и способом сравнения, т. е. будем в способ сравнения включать признаки, по которым осуществляется сравнение, и то, как производится сравнение.

§ 18. Отношение порядка

Отношение порядка рассмотрим несколько подробнее, так как оно играет весьма большую роль в последующем изложении.

Выражение «упорядоченность (порядок) предметов» мы принимаем за первично ясное, ограничиваясь примерами и пояснениями. В частности, расположение предметов в пространстве и появление или исчезновение их во времени суть случаи упорядоченности. Для фиксирования ее употребляются выражения «первый», «второй», ..., «выше», «ниже», «раньше», «одновременно», «правее» и т. п.

Порядок предметов a и b определяется относительно третьего предмета c, который будем называть точкой определения и отсчета порядка.

При установлении порядка предметов важны не только точки определения порядка, но также и способы некоторых действий. Мы можем, например, определить порядок точек a и b на окружности относительно третьей точки c. Но порядок a и b тем самым еще остается не заданным: потребуется еще указать, будем мы двигаться по часовой стрелке или против. В зависимости от направления движения мы получим разные результаты: в одном случае окажется, что a будет дальше b относительно c, а в другом — b дальше a. В дальнейшем мы будем употреблять выражение «способ отсчета (определения) порядка», полагая, что способ отсчета (определения) порядка включает также и точку отсчета (определения) порядка.

Высказывания о том, что a находится в отношении порядка R к b относительно способа установления порядка α, будем изображать символом

$$a(R\alpha)b.$$

Соответственно, $a\neg(R\alpha)b$ и $a?(R\alpha)b$ суть его частное отрицание и неопределенная форма.

Вопрос о зависимости порядкового отношения предметов от способа установления порядка имеет различные аспекты.

Аспект логический. Пусть α и β суть различные способы установления порядка. При этом условии из $a(R^1\alpha)b$ логически не следует как $a(R^1\beta)b$, так и его отрицание $\sim(a(R^1\beta)b)$. Здесь предполагается одно и то же время t^1. Если в это время имеет место $a(R^1\alpha)b$ и $a(R^2\beta)b$, то, избрав вместо α другой способ β, мы тем самым не можем изменить отношение $a(R^1\alpha)b$, т. е. сделать верным $\sim(a(R^1\alpha)b)$. Причем это выполняется в силу правила логики $\vdash\sim(x\wedge\sim x)$.

Аспект эмпирический (или физический). Пусть $a(R^1\alpha)b$ во время t^1 и $a(R^2\beta)b$ во время t^2. Здесь возможно, что порядковое отношение a и b

во время t^2 изменится по каким-то причинам сравнительно с t^1 так, что будет неверно $a(R^1\alpha)b$. В частности, причиной этого может быть применение способа β. Но это не обязательно всегда так: в t^1 возможно будет $\sim(a(R^1\alpha)b)$, хотя мы вообще не применяем β. Здесь возможен также случай, когда применение β исключает применение α. И тогда в t^2 будет верно $a\,?\,(R^1\alpha)b$ и, следовательно, $\sim(a(R^1\alpha)b)$, но будет неверно $a\,\neg\,(R^1\alpha)b$.

Установление отношений порядка для некоторых предметов проблемы не представляет. Их порядок как-то дан, и споров на этот счет не возникает. Для других же случаев порядок устанавливается путем применения к указанным выше случаям правил логики, математики и специальных правил, выработанных в той или иной области науки применительно к особенностям изучаемых в ней предметов (например, теория относительности в физике).

Как и в случае со сравнением, высказывания о превосходстве одних предметов над другими по порядку относительно некоторого способа установления порядка, а также о тождестве предметов по порядку и о том, что одни предметы уступают другим по порядку (опять-таки относительно некоторого способа установления порядка) будем изображать символами вида

$$a > \alpha b, \quad a < \alpha b, \quad a = \alpha b.$$

Аналогично — внутренние их отрицания и неопределенные формы:

$$a\,\neg\,> \alpha b, \quad a\,?\,> \alpha b, \quad a\,\neg\,< \alpha b$$

и т. д. Отличие от сравнения состоит лишь в том, что вместо признака p имеется в виду способ установления порядка.

Отношения $= \alpha$ и $< \alpha$ определяются через $> \alpha$ точно так же, как в случае с аналогичными отношениями сравнения, а отношение $> \alpha$ определяется имплицитно аксиомами $УП^i$, среди которых имеются аксиомы, аналогичные аксиомам сравнения 1–7 для $> p$ (с той лишь разницей, что имеется в виду не признак p, а способ упорядочивания α).

Заметим, что различение $> \alpha$ и $< \alpha$ не предрешает вопроса о том, какое из отношений пар «дальше—ближе», «выше—ниже», «правее—левее» и т. п. будет $> \alpha$ и какое будет $< \alpha$. Важно здесь лишь то, что если одно рассматривается как $> \alpha$, то другое есть $< \alpha$.

§ 19. Отношение «между»

Простейший случай отношения «между» определяется так: a находится между b и c относительно α, если и только если $(a > \alpha b) \wedge (c > \alpha a)$ или $(b > \alpha a) \wedge (a > \alpha c)$. В общем виде (для любого числа предметов)

это отношение определяется так: a находится между $b^1, \ldots, b^n$ относительно способов установления порядка $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$, если и только если для любой пары b^i и b^k из $b^1, \ldots, b^n$ найдется такой α^j из $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$, что $(a > \alpha^j b^i) \wedge (b^k > \alpha^j a)$ или $(b^i > \alpha^j a) \wedge (a > \alpha^j b^i)$.

Для скоплений (и энок) предметов имеет силу следующее положение: скопление (энка) предметов A находится между $b^1, \ldots, b^n$ относительно $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$, если и только если каждый предмет, входящий в A, находится между $b^1, \ldots, b^n$ относительно $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$.

Выражение «a находится между $b^1, \ldots, b^n$ относительно α» будем записывать символом $\coprod(a(b^1, \ldots, b^n)\alpha)$.

§ 20. Существование отношений

Вопрос о существовании отношений заслуживает особого внимания, ибо к нему сводится вопрос о существовании пространства и времени.

Для отношений имеют силу общие положения о существовании состояний sx. Однако особенности этих состояний при этом не учитываются. Поэтому необходимо здесь сделать некоторые дополнительные разъяснения.

Термин $s(aRb)$ является индивидуальным, как очевидно из сказанного выше, если и только если a и b суть индивидуальные термины. Если $s(aRb)$ есть индивидуальный термин, то предикат существования для него имеет такой смысл: отношение $s(aRb)$ существует, если и только если существует a, существует b и результат некоторых операций с a и b (сравнения a и b или установления их порядка) дает именно R. Для общих терминов $s(aRb)$ проблема существования сводится к проблеме для индивидуальных терминов по рассмотренным выше правилам для любых общих терминов.

Из определения существования отношения aRb следует: если существует это отношение, то существуют оба предмета a и b; и если не существует по крайней мере один из a и b, то не существует и их отношение.

Другими словами:

$$E(\downarrow (aRb)) \dashv\vdash E(a) \wedge E(b) \wedge (aRb),$$

$$\neg E(\downarrow (aRb)) \dashv\vdash \neg E(a) \vee \neg E(b) \wedge (a \neg Rb).$$

§ 21. Упорядоченный ряд

Скопление индивидов такое, что для любой пары a и b из них $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$, будем называть упорядоченным относительно α

рядом. Индивиды, входящие в данный упорядоченный ряд, суть его элементы. Из определения очевидно: если $a = \alpha b$, то a и b не могут быть элементами одного ряда. Они могут быть лишь элементами различных рядов.

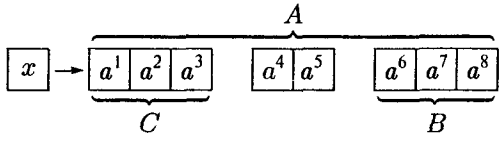


Рис. 1

На рис. 1 изображены три упорядоченных ряда A, B и C. Все они упорядочены относительно индивида x, а стрелка указывает направление выбора индивидов и возрастание их порядка. На рис. 2 изображены упорядоченные ряды D, E и F, элементы которых упорядочены относительно x, но способ установления порядка несколько иной: определяется поворотом x, причем изогнутая стрелка показывает возрастание порядка индивидов.

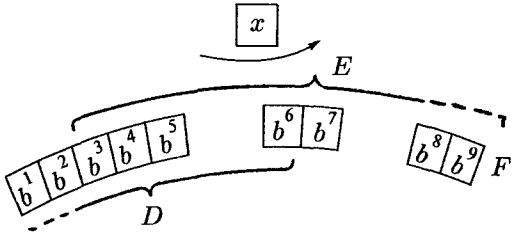


Рис. 2

Элементы a и b ряда A, упорядоченного относительно α, будем называть соседними, если и только если ни один элемент A не находится между a и b относительно α. Так, на рис. 1 соседними являются a^1 и a^2, a^2 и a^3, a^3 и a^4 и т. д.

Определение соседних элементов ряда можно записать также следующим образом: a и b суть соседние элементы A, если и только если

$$(\neg \exists c)((a \in A) \wedge (b \in A)) \wedge |\coprod((a, b)\alpha),$$

где a, b и c суть индивидные переменные. Это определение есть определение актуально соседних элементов ряда. Если в нем заменить $\exists$ на M, то получим определение потенциально соседних элементов ряда. В дальнейшем мы ограничимся формулировками определений с $\exists$,

полагая, что читатель сам сможет сделать дополнение «актуальное» и построить соответствующее определение с M.

Если a и b суть соседние элементы ряда относительно α, будем это записывать символами вида

$$a \mid \alpha b.$$

На рис. 1 отношение ряда B и A обозначается выражением «отрезок ряда». Здесь B есть отрезок ряда A. Аналогично ряды E и D на рис. 2 суть отрезки ряда F. В общем виде термин «отрезок ряда» определяется таким образом. Пусть a и b —элементы ряда A. Пусть B есть скопление индивидов такое, что все индивиды B не уступают по порядку a относительно α или не превосходят по порядку b относительно α (или то и другое). Если $B \subset A$, то B есть отрезок ряда A.

Из элементов ряда A могут быть выбраны такие элементы, которые образуют новый ряд B. Так, элементы a^1, a^3, a^5 и a^7 ряда A на рис. 1 образуют ряд. Но такой ряд нельзя назвать отрезком A. Это — отношение рядов уже иного рода.

Ряд есть скопление индивидов, и вопрос о его существовании решается в зависимости от того, как это скопление определено. Например, ряд из индивидов a, b и c, упорядоченных так, что $a > \alpha b$ и $b > \alpha c$, существует, если и только если существует все три индивида a, b и c и при этом они упорядочены именно так, как указано выше. Но пусть ряд A определен так: если $a > \alpha b$, то $a \in A$ и $b \in A$. Для существования такого ряда необходимо и достаточно, чтобы существовала по крайней мере одна пара индивидов a и b такая, что $a > \alpha b$.

§ 22. Соприкосновение

Будем говорить, что индивиды a и b соприкасаются (не соприкасаются) относительно α и класса индивидов A, если и только если $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$, и при этом никакой индивид класса A невозможно (некоторый класс индивидов A возможно) поместить между a и b относительно α. На рис. 1 индивиды a^1 и a^2 соприкасаются относительно α, а индивиды a^3 и a^4 не соприкасаются, поскольку между ними можно поместить некоторый индивид b.

Конечно, вопрос о том, можно или нет в том или ином конкретном случае поместить между a и b какой-то индивид c, решается в зависимости от некоторой условности, договоренности, практических возможностей и т. п. Например, на рис. 3 изображены два индивида a и b, которые могут считаться соприкасающимися, поскольку у них есть точка соприкосновения k, и могут считаться несоприкасающимися, поскольку возможно поместить индивид c так, как

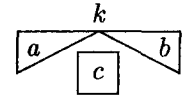


Рис. 3

показано на рисунке. Но он в каждом случае практически решается, и этого достаточно, чтобы оправдать данное определение. Для определения безразлично, можно или нет реализовать ту или иную операцию, ибо определение имеет целью установить значение терминов, а не правило выяснения значений истинности высказываний с этими терминами.

Ссылки на класс A будем опускать, предполагая, что в каждом случае имеется в виду какой-то или любой класс индивидов. Высказывание «a соприкасается с b относительно α» будем для краткости записывать символом

$$a \parallel \alpha b.$$

Принятое определение можно записать так:

1) $(a \parallel \alpha b) \dashv\vdash ((a > \alpha b) \vee (b > \alpha a)) \wedge (\neg Mc)\coprod(c(a, b)\alpha)$;

2) $(a \neg \parallel \alpha b) \dashv\vdash ((a > \alpha b) \vee (b > \alpha a)) \wedge (Mc)\coprod(c(a, b)\alpha)$;

3) $(a?\parallel \alpha b) \dashv\vdash \sim(a \parallel \alpha b) \wedge \sim(a \neg \parallel \alpha b)$.

Если не вводится оператор M, то в приведенных определениях следует заменить M на $\exists$.

В рассматриваемом случае различение отрицаний $\neg$ и $\sim$ исключительно важно: $a \neg \parallel \alpha b$ означает «a и b не соприкасаются относительно α», а $\sim(a \parallel \alpha b)$ означает «Нельзя сказать (принять), что $a \parallel \alpha b$» (это может быть не только $a \neg \parallel \alpha b$, но и $a = \alpha b$, $a?> \alpha b$ и т. п.).

Из определения следует:

$$(a = \alpha b) \vdash \sim(a \parallel \alpha b),$$

$$\sim(a \parallel \alpha b \dashv\vdash \sim(a > \alpha b) \wedge \sim(b > \alpha a) \vee$$
$$\vee \sim(\neg Mc)(((a > \alpha c) \wedge (c > \alpha b)) \vee ((b > \alpha c) \wedge (c > \alpha a))),$$

$$(a \parallel \alpha b) \vdash (a \parallel \alpha b).$$

§ 23. Непрерывность и прерывность эмпирического ряда

Ряд является эмпирическим, если и только если он образован эмпирическими индивидами. Ряд является абстрактным, если и только если он образован абстрактными индивидами.

Одни и те же предикаты могут определяться различно для абстрактных и эмпирических рядов. В частности, это имеет место для предикатов прерывности и непрерывности.

Ряд A будем называть непрерывным (сплошным) относительно α, если и только если все его соседние элементы попарно соприкасаются

относительно α. Другими словами, ряд A непрерывен относительно α, если и только если

$$(\forall a)(\forall b)((a \in A) \wedge (b \in A)) \wedge ((a \mid \alpha b) \rightarrow (a \parallel \alpha b)),$$

где a и b суть индивидные переменные. Ряд A будем называть прерывным (пористым) относительно α, если и только если по крайней мере для одной пары соседних элементов его верно, что они не соприкасаются относительно α. Другими словами, ряд прерывен относительно α, если и только если

$$(\exists a)(\exists b)((a \in A) \wedge (b \in A)) \wedge (a \mid \alpha b) \wedge (a \neg \parallel \alpha b).$$

Так, ряды B и C на рис. 1 непрерывны, а ряды D и E на рис. 2 прерывны.

§ 24. Начало и конец ряда

Ряд A имеет начальный элемент относительно α, если и только если найдется такой элемент этого ряда, что любой другой элемент этого ряда превосходит его по порядку относительно α. Если a и b суть индивидные переменные, то определяющая часть этого определения запишется так:

$$(\exists a)(\forall b)((a \in A) \wedge ((b \in A) \wedge \sim (a \rightleftharpoons b) \rightarrow (b > \alpha a))).$$

Элемент a есть начальный или первый по порядку элемент ряда A.

Ряд A имеет конечный элемент относительно α, если и только если

$$(\exists a)(\forall b)((a \in A) \wedge ((b \in A) \wedge \sim (a \rightleftharpoons b) \rightarrow (a > \alpha b))).$$

(т. е. если найдется такой его элемент a, который превосходит все остальные по порядку относительно α). Элемент a есть конечный или последний элемент ряда A относительно α.

Ряд A не имеет начального элемента относительно α, если и только если

$$(\forall a)(\exists b)((a \in A) \rightarrow (b \in A) \wedge (b > \alpha a)).$$

Ряд A не имеет конечного элемента относительно α, если и только если

$$(\forall a)(\exists b)((a \in A) \rightarrow (b \in A) \wedge (a < \alpha b)).$$

Ряд может быть определен так, что при этом указывается, какой элемент является начальным, какой является конечным или и то и другое. Так, на рис. 1 индивид a^1 есть начало ряда A, а индивид a^8 —

конец. Индивид b^3 есть начало ряда E на рис. 2, а индивид b^6 — конец ряда D. Но ряды могут быть определены так, что не указывается, какие именно их элементы суть конечные и начальные. В одних случаях такого рода проделывается какое-то исследование, в результате которого устанавливается начальный или конечный элемент ряда (или и то и другое). В других же случаях выясняется или допускается невозможность сделать это или вообще допускается отсутствие начального или конечного элемента ряда (или того и другого).

Возможно так, что начиная с некоторого момента порядок индивидов ряда A относительно α установить невозможно. Это — случай с неопределенностью. Если x есть утверждение «Ряд A имеет начальный (конечный) элемент», а y —утверждение «Ряд A не имеет начального (конечного) элемента», то рассматриваемый случай запишется как $\sim x \wedge \sim y$. Практически же здесь допустима та или иная договоренность. В частности, последний элемент ряда A, для которого можно установить порядок относительно α, правомерно принять за первый или последний элемент ряда.

Если же допускается, что ряд не имеет начального или не имеет конечного элемента, а из α не ясно, наступит или нет такой момент, когда порядок индивидов относительно α установить становится невозможно, то создается видимость рядов, не имеющих начального или конечного элементов (или даже того и другого). Однако это имеет смысл лишь на уровне допущений. Что касается утверждений типа «Ряд A не имеет начального элемента», «Ряд A не имеет конечного элемента» и т. п., то они не могут быть проверены эмпирически в случаях, о которых идет речь, в силу невозможности перебрать бесконечный ряд предметов и установить для них отношение порядка. Так что если из определения ряда или из способа построения его обозначения нельзя вывести начального или конечного элемента, а эмпирически соответствующие утверждения нельзя проверить, то одинаково правомерны как допущения отсутствия начального или конечного элемента, так и допущения их наличия или возможности. При этом только надо помнить, что это — лишь допущения, а не бесспорные истины.

Невозможность установить начальный (конечный) элемент ряда и отсутствие таковых не всегда совпадают. Это зависит от определения ряда.

Конечный элемент одного ряда не всегда есть начальный элемент другого, а начальный одного не всегда есть конечный элемент другого. Так, ряд A может быть таким относительно α, что, начиная с некоторого момента, установить порядок индивидов относительно α становится невозможным, так что ни о каком начальном или конечном элементе нового ряда относительно α говорить нельзя. Что касается ряда B относительно другого способа упорядочивания β, то из утверждения

о существовании начального или конечного элемента ряда A не следует утверждение о существовании конечного или начального элемента ряда B. Так что утверждение о том, что конечный (начальный) элемент одного ряда есть начальный (конечный) элемент другого, либо бессмысленно, либо неверно.

Если ряд не имеет начального элемента, из этого не следует, что этот ряд не существует и не существуют его элементы.

Будем говорить, что ряд ограничен, если и только если он имеет начальный и конечный элемент, и что ряд безграничен, если и только если не имеет начального или конечного (или того и другого) элемента. Из определений следует, что возможен ряд, о котором неверно сказать, что он ограничен, и нельзя сказать, что он безграничен (случай с неопределенностью).

§ 25. Интервал

Для выражений «интервал» и «интервал между a и b» не возможно построить определения по принципу «Интервалом (интервалом между a и b) называется...». Здесь возможны лишь определения сложных выражений, которые содержат слово «интервал» и высказывания с этом словом. Например, выражение «величина интервала между a и b равна десяти c» есть замена (по определению) выражения «между a и b можно поместить десять предметов класса c так, что предметы a, b и c образуют непрерывный ряд»; выражение «a произошло в интервале между b и c» есть замена для выражения «a произошло между b и c» (здесь слово «интервал» вообще является излишним).

Выражение «интервал» уместно использовать лишь для случаев, когда предметы суть элементы упорядоченного ряда. Точнее говоря, слово «интервал» есть лишь часть выражения «интервал между a и b относительно α», которое уместно исключительно для случаев, когда имеет место $(a > \alpha b)$ или $(b > \alpha a)$. Будем это выражение для краткости и наглядности записывать символом вида

$$\{a, b, \alpha\}.$$

Предметы a и b будем называть границами интервала. Выражение $\{a, b, \alpha\}$ есть термин-субъект. Причем термины $\{a, b, \alpha\}$ и $\{b, a, \alpha\}$ не всегда тождественны по значению; аналогично для терминов $\{a, b, \alpha\}$ и $\{a, b, \beta\}$, если α и β различны.

Термин $\{a, b, \alpha\}$ будем считать индивидуальным при заданном α, если и только если a и b суть индивидуальные термины. Все прочие термины интервалов определяются в конечном счете через термины типа $\{a, b, \alpha\}$ по общим правилам введения терминов.

§ 26. Протяженность

Интервалы характеризуются величиной или протяженностью. Выражения вида «Протяженность $\{a, b, \alpha\}$» будем записывать символами вида

$$l\{a, b, \alpha\},$$

где l есть просто слово «протяженность».

Протяженность интервала между эмпирическими предметами определяется возможностью или невозможностью поместить между ними какие-то предметы и числом последних, а также путем сравнения с другим интервалом. Здесь способ нахождения величины интервала есть одновременно способ определения выражения, в котором говорится об этой величине, — типичный пример для «операционных» определений. Так, в выражении «интервал между a и b равен десяти c» указана величина интервала — «десять c», а в выражении, через которое оно определяется («между a и b можно поместить...»), указан некоторый способ измерения величины интервала.

Сравнение интервалов $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \beta\}$ предполагает такое их сопоставление, чтобы можно было представить a, b, c и d упорядоченными относительно α или β так, что либо $a = \alpha c$ (или $a = \beta c$), либо $b = \alpha d$ (или $b = \beta d$), но чтобы при этом интервалы не изменялись по величине, т. е. представить как наложение одного из них на другой, совмещая одни из их элементов. Условимся накладывать $\{c, d, \beta\}$ на $\{a, b, \alpha\}$ так, что $\{c, d, \beta\}$ равен по протяженности $\{c, d, \alpha\}$.

Возможны такие имплицитные определения выражений, сравнивающих интервалы:

$$(l\{a, b, \alpha\} = l\{c, d, \alpha\}) \dashv\vdash ((a = \alpha c) \leftrightarrow (b = \alpha d)),$$

$$(l\{a, b, \alpha\} > l\{c, d, \alpha\}) \dashv\vdash ((a = \alpha c) \rightarrow \rightarrow (b > \alpha d)) \wedge ((b = \alpha d) \rightarrow (c > \alpha a)),$$

$$(l\{a, b, \alpha\} < l\{c, d, \alpha\}) \dashv\vdash (l\{c, d, \alpha\} > l\{a, b, \alpha\}).$$

Интервалы $\{a, b, \alpha\}$ и $\{a, b, \beta\}$ не обязательно равны, если различны α и β.

Для обозначения протяженности отдельно взятых предметов используются выражения «длина», «высота», «продолжительность» и т. п. Выражение «Протяженность a» будем кратко записывать символом

$$la.$$

Протяженность эмпирических предметов определяется (там, где это уместно) так: протяженность эмпирического предмета a относительно некоторого способа установления порядка α равна протяженности интервала $\{b, c, \alpha\}$ такого, что если a поместить между b и c,

то b и a будут соприкасаться относительно α. Частный случай — в качестве b и c берутся части a такие, что все прочие части a находятся между b и c относительно α.

Протяженность эмпирических предметов определяется относительно некоторых способов установления порядка. Если a есть предмет, а не интервал между предметами, то в определении должно фигурировать выражение «la относительно α». Будем его записывать символом

$$l\{a, \alpha\}.$$

Если α и β различны, то не всегда $l\{a, \alpha\} = l\{a, \beta\}$.

Приведенное выше определение $l\{a, \alpha\}$ можно записать так:

$$\vdash (b \parallel \alpha a) \wedge (a \parallel \alpha c) \rightarrow (l\{a, \alpha\} = l\{b, c, \alpha\}).$$

Или, в другой форме,

$$\vdash (l\{a, \alpha\} = l\{b \downarrow x, c \downarrow x, \alpha\}),$$

где x есть $(b \parallel \alpha a) \wedge (a \parallel \alpha c)$.

Для абстрактных предметов и интервалов между ними утверждения о протяженности принимаются как допущения. Здесь единственными ограничителями являются логическая непротиворечивость утверждений и интересы приложения теоретических построений. Известны случаи, когда допускаются предметы, не имеющие протяженности, бесконечно малые и бесконечно большие интервалы, нулевые интервалы и т. п. Для эмпирических предметов такого рода допущения неправомерны. Так, невозможно наблюдать предметы, не имеющие никакой протяженности или имеющие бесконечно малую протяженность; невозможно зафиксировать бесконечно большой интервал между эмпирическими предметами и т. п. Все допущения такого рода нельзя подтвердить и опровергнуть опытным путем.

Если для каких-то эмпирических предметов и интервалов между ними не существует способ установления (нахождения, измерения) величин из протяженности, то соответствующие выражения не имеют смысла. Подчеркиваем, что в такого рода случаях не установлен (или даже не может быть в принципе установлен) смысл выражений la. Но это никак не означает того, что упомянутые предметы и интервалы не имеют протяженности, т. е. что $lx = 0$.

Заметим, что выражения вида $la > lb, la < lb$ и т. д. тождественны выражениям вида соответственно $a > lb, a < lb$ и т. д. (т. е. «a превосходит b по протяженности» и т. д.).

Если $\sim (a > \alpha b) \wedge \sim (b > \alpha a)$, то понятие интервала к этому случаю не применимо. В этом случае на вопрос о том, каков интервал между a и b, следует ответить лишь так: $\sim (a > \alpha b) \wedge \sim (b > \alpha a)$. И если непременно потребуется установить интервал между a и b,

надо найти такой способ β упорядочивания a и b, согласно которому $((a > \beta b) \vee (b > \beta a))$.

§ 27. Абстрактные ряды

Абстрактный упорядоченный ряд есть ряд, элементы которого суть абстрактные предметы.

Если элементы абстрактного ряда не имеют протяженности, то многие предикаты для них определяются иначе, чем для эмпирических рядов. Это имеет первостепенное значение для устранения целого ряда затруднений (вроде парадоксов Зенона). Последние совершенно непреодолимы, если не учитывать различия абстрактных и эмпирических рядов и того, что одни и те же предикаты определяются различно в зависимости от того, к каким рядам они относятся.

Пусть a, b и c суть переменные для терминов, обозначающих элементы ряда A, т. е. $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$.

Примем определения:

1) ряд A непрерывен относительно α, если и только если

$$(\forall a)(\forall b)(\exists c)\coprod(c(a, b)\alpha);$$

2) ряд A прерывен относительно α, если и только если

$$(\exists a)(\exists b)(\neg \exists c)\coprod(c(a, b)\alpha).$$

Несовпадение этих определений с соответствующими определениями для эмпирических рядов очевидно. Посмотрим, к каким последствиям ведет такая интерпретация абстрактного ряда в терминах эмпирического ряда, при которой осуществляется следующее: для каждого элемента a абстрактного ряда находится элемент b эмпирического ряда такой, что принимается $b \rightharpoonup a$ (т. е. каждому элементу абстрактного ряда приводится в соответствие элемент эмпирического ряда). В таком случае непрерывность эмпирического ряда будет выступать так, будто для любых двух элементов эмпирического ряда имеется такой элемент, который помещается между ними. И так без конца. Но это ошибочно.

Причина ошибки — неправильная интерпретация абстрактного ряда: интерпретироваться должны не только его элементы, но и предикаты, введенные для абстрактных предметов. Правильная интерпретация в рассматриваемом случае имеет такой вид. Если абстрактный ряд непрерывен, то интерпретация его непрерывности как непрерывности эмпирического ряда означает:

1) абстрактный непрерывный ряд сопоставляется с эмпирическим непрерывным рядом;

2) каждому элементу абстрактного ряда сопоставляется какой-то элемент эмпирического ряда, а не перерыв («пустое место») между элементами эмпирического ряда — таких перерывов в последнем нет.

Так что если «спроецировать» точку абстрактного ряда на эмпирический ряд, мы наткнемся на какой-то эмпирический индивид, являющийся элементом этого ряда. Причем для различных точек абстрактного ряда это может быть один и тот же индивид эмпирического.

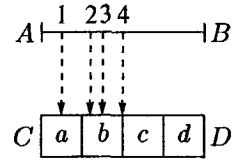


Рис. 4

На рис. 4 изображен отрезок AB, точки которого образуют непрерывный абстрактный ряд, и тела a, b, c, d, образующие непрерывный эмпирический ряд CD. Пунктирными стрелками указано, что если ряд CD есть интерпретация ряда AB, то проекция любой точки AB наткнется на какое-то из тел a, b, c, d. Причем точки 2 и 3 проецируются на одно и то же тело b, точка 4 проецируется в стык тел b и c, т. е. сопоставляется сразу двум телам эмпирического ряда.

Если абстрактный ряд интерпретируется так, что каждому элементу его ставится в соответствие элемент эмпирического ряда, причем разным его элементам ставятся в соответствие разные элементы эмпирического ряда, то непрерывный ряд не имеет эмпирической интерпретации.

Таким образом, интерпретация абстрактного ряда не есть просто интерпретация его элементов. Это есть еще подыскание подходящей интерпретации прочих терминов, относящихся к рядам, не вступающей в конфликт с соответствующей терминологией для эмпирических рядов.

Заметим кстати, что многочисленные парадоксы и противоречия в науке возникают вследствие того, что смешиваются абстрактные и эмпирические предметы, а если они и различаются, то нарушаются правила интерпретации первых в терминах вторых.

§ 28. Конечные и бесконечные ряды

Ряды различаются как конечные и бесконечные с точки зрения числа входящих в них элементов и протяженности. Случай для протяженности сводится к случаю для числа элементов ряда, а последний рассмотрим в следующей главе.

Говоря о конечности и бесконечности рядов, надо учитывать различие эмпирических и абстрактных рядов. Для эмпирического ряда, например, имеет силу положение: если число элементов его бесконечно, то он бесконечно протяжен. Для абстрактных рядов это не всегда так.

Если эмпирический ряд ограничен, то он имеет конечное число элементов и конечную протяженность; и наоборот. Здесь можно построить подходящую систему определений с весьма любопытными следствиями. Например, отрезок AB на рис. 4 содержит бесконечное множество точек, но имеет конечную протяженность.

Для абстрактных рядов правомерны любые допущения, лишь бы они были логически непротиворечивы. Таковы, например, допущения бесконечно протяженных рядов. Можно также допустить ряд, который бесконечно протяжен, но имеет начальный и конечный элемент (если, например, допустить бесконечно большой интервал между его элементами). Для эмпирических же рядов такие допущения либо остаются эмпирически неверифицируемыми гипотезами, либо же такие абстрактные ряды не имеют эмпирических интерпретаций. Так, абстрактный ряд с бесконечно протяженными интервалами между какими-либо его элементами не имеет эмпирической интерпретации.

§ 29. Структура

Интуитивно приемлемым кажется такое определение структуры: структура есть скопление индивидов, для любого элемента a которого найдется такой другой его элемент b и такой способ установления порядка α, что $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$. Однако такого рода определение, цель которого — наметить для читателя, о чем будет идти речь. С таким определением невозможны строгие рассуждения.

Покажем сначала, как вводятся первичные термины структур. Они могут быть введены разными способами, и, в частности, — таким.

Выражение «Структура, которая образуется элементами скопления A относительно класса способов установления порядка B» будем считать термином, тождественным по значению термину «Скопление индивидов A такое, для любого элемента a которого найдется другой его элемент b, и такой способ установления порядка α, принадлежащий к классу B, что $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$».

В приведенном определении слово «структура» определено как часть сложного термина. Чтобы ввести его в употребление как термин, производный от первичных терминов структур, можно воспользоваться общими правилами введения терминологии, в том числе — обобщением.

Приведенное определение является эксплицитным. Из него очевидно, что индивиды какого-либо скопления образуют структуру лишь относительно некоторых данных способов установления порядка. Если последние не даны, ни о какой структуре и речи быть не может. А так как выбор этих способов есть дело исследователя, то он не имеет права

спрашивать относительно какого-то скопления A, есть оно структура или нет, если предварительно не задал (не выбрал) класс способов установления порядка B. Структура — скопление, но не всякое скопление — структура (хотя это не исключает того, что для любого скопления из двух и более индивидов могут быть найдены какие-то способы установления порядка такие, что это скопление будет структурой).

Имплицитно термины первичных структур определяются так: элементы скопления A образуют структуру относительно класса способов установления порядка B, если и только если для любого элемента a этого скопления найдется другой его элемент b и такой способ установления порядка α, относящийся к классу B, что $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$. Используя индивидные переменные a и b и переменную для способа установления порядка α, определяющую часть (после слов если и только если) можно записать так:

$$(\forall a)(\exists b)(\exists \alpha)((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (\alpha \in B) \rightarrow ((a > \alpha b) \vee (b > \alpha a))).$$

В имплицитном определении слово «структура» определено как часть высказывания. И требуются еще дополнительные логические операции, чтобы ввести термин «структура» как самостоятельный термин. Впрочем, это не является обязательным делом, если при оперировании этим термином в ориентировочном смысле иметь в виду, что в рассуждениях всегда предполагаются термины, обозначающие конкретные структуры (в конечном счете — первичные термины структур).

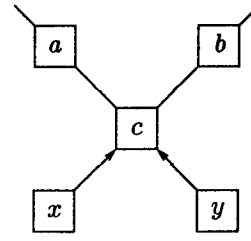


Рис. 5

Частный случай скопления A, указанного выше, есть скопление, состоящее из индивидов $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$, а частный случай класса B — перечисление способов установления порядка $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ $(m \geqslant 1)$.

На рис. 5 показано, что индивиды a, b и c образуют структуру относительно способов установления порядка α^1 (точка отсчета порядка x, направление возрастания указано стрелкой) и α^2 (y и стрелка). Но эти индивиды могут образовать структуру относительно других способов установления порядка, в частности — так, как показано на рис. 6. Здесь точка отсчета одна, но порядок a, b и c устанавливается путем проецирования их на линию, указанную большой, сплошной стрелкой. Если изменить способ проецирования, как указано

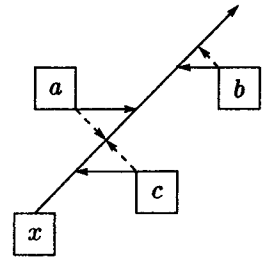


Рис. 6

пунктирными стрелками, будет иная (о чем скажем ниже) структура из a, b и c, но все же структура. Но зато индивиды a и c не образуют структуру относительно способа установления порядка, указанного на рис. 6 пунктирными стрелками.

Упорядоченный ряд есть, очевидно, структура. Простейшая структура — структура из двух индивидов и одного способа установления порядка.

Определение структуры дает право считать или не считать то или иное скопление A структурой относительно B. Но оно не содержит в себе всего того, что мы можем знать о структуре. Структура может исследоваться как самостоятельный предмет. В частности, могут выясняться интервалы между ее элементами, число элементов, их порядок друг относительно друга и т. д. Причем если индивиды A суть эмпирические индивиды, то структура из них есть также эмпирический индивид, хотя мы сами выбираем способы установления порядка и можем их менять. От этого выбора зависит лишь способ описания скопления A, от смены этих способов изменяется лишь способ описания того же самого скопления A, а не само это скопление. К структурам относится все, сказанное об отношениях порядка вообще, только в усложненной форме.

Использование терминов структур в качестве субъектов высказываний (предицирование структур) не означает еще того, что можно ассоциировать их с любыми предикатами, получая осмысленные высказывания. Имеются такие предикаты, для которых еще должны быть установлены условия приписывания их структурам (т. е. установлен их смысл в сочетании с терминами структур). С примерами такого рода нам придется еще встречаться.

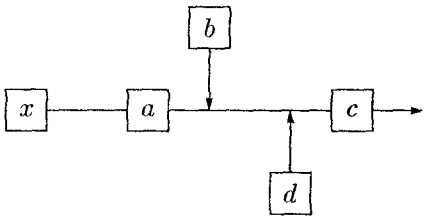


Рис. 7

Пусть скопление A^1 образует структуру C относительно B. Пусть A^2 есть скопление, образующее структуру D точно так же относительно B. Если $A^1 \subset A^2$, то будем говорить, что C есть подструктура структуры D относительно B. Если $\sim(A^2 \subset A^1)$, то C — собственная подструктура структуры D. На рис. 7 скопление индивидов a, b и c есть подструктура скопления индивидов a, b, c и d.

Пусть скопление A^1 образует структуру C^1 относительно B, а скопление A^2 — структуру C^2 относительно B. Объединением структур C^1 и C^2 будем называть такую структуру C, которая образована из эле-

ментов скоплений A^1 и A^2 относительно B, причем C^1 и C^2 — подструктуры C.

Пусть B —класс способов установления порядка, относительно которого элементы скопления A образуют структуру C. Будем говорить, что скопление индивидов D находится внутри C (включено в C) относительно B, если и только если все элементы D находятся между элементами A относительно B.

В зависимости от того, какими являются элементы структур — эмпирическими или абстрактными предметами, — различаются эмпирические и абстрактные структуры. Проблемы эмпирической интерпретации последних являются порой еще более сложными, чем проблемы эмпирической интерпретации абстрактных рядов.

Индивид a находится внутри структуры A относительно β, если и только если a находится между граничными точками A относительно β.

Индивид a находится вне структуры A относительно класса способов установления порядка B, если и только если для любой пары b^i и b^k ее граничных точек и для любого α такого, что $\alpha \in B$, имеет силу утверждение:

$$(b^i > \alpha b^k) \rightarrow ((a > \alpha b^i) \vee (a < \alpha b^k)).$$

Индивид a не находится внутри A относительно B, если и только если он есть граничная точка A или находится вне A относительно B.

Следствия:

1) если a находится вне A относительно B, то существует структура $A*$ такая, что A есть собственная подструктура $A*$ относительно B;

2) если структура A находится вне B, то B находится вне A;

3) если A находится внутри B, то B не находится внутри A.

Если A есть структура типа X относительно класса способов установления порядка α, то A есть структура того же типа X относительно класса способов установления порядка β такого, что $\alpha \subset \beta$. В частности, если A есть пространственная (временная) структура относительно α, то A есть пространственная (временная) структура относительно β.

§ 30. Существование структуры

Вопрос о существовании структур сводится (в соответствии с правилами построения терминологии) к вопросу о существовании структур, обозначаемых первичными терминами структур. А существование последних определяется в зависимости от существования их элементов

и отношений между ними, удовлетворяющих определению соответствующих терминов. Например, структура, которую образуют индивиды a, b и c относительно α, существует, если и только если существуют a, b, c и между ними имеют место отношения порядка относительно α, удовлетворяющие определению структуры. Аналогично обстоит дело с предикатом возможности.

Таким образом, утверждение «Структура не существует (невозможна), если не существуют (невозможны) образующие ее индивиды» есть следствие определения структуры и предиката существования (возможности) применительно к отношениям вообще и структурам в частности.

§ 31. Протяженность и порядок структур

Вопрос о протяженности структур сводится к вопросу о протяженности индивидов, интервалов и рядов и к операциям с соответствующими величинами. Таковы, как известно, операции по нахождению площадей и объемов фигур и тел. Мы эти вопросы не рассматриваем. Ограничимся краткими замечаниями.

Если принято, что протяженность эмпирического индивида всегда больше нуля, то из этого следует, что протяженность любого рода эмпирической структуры также больше нуля.

Протяженность индивидов устанавливается так же, как протяженность некоторой структуры, образуемой частями этих индивидов.

Протяженность подструктуры A данной структуры B не может превышать протяженности B. Если индивид a находится внутри структуры A, то его протяженность не больше протяженности A. Если индивид a есть элемент структуры A, его протяженность не больше протяженности A.

Для установления порядка структур необходимы дополнительные соглашения. Например, возможно такое соглашение: структура A превосходит по порядку структуру B относительно α, если и только если

$$(\forall a)(\exists b)((b \in B) \wedge ((a \in A) \rightarrow (a > \alpha b)),$$

где a и b суть переменные для терминов эмпирических индивидов. Более сильное определение получится, если определяющей части придать вид:

$$(\forall a)(\forall b)((b \in B) \wedge (a \in A) \rightarrow (a > \alpha b)),$$

С точки зрения первого определения возможен случай, когда $A > \alpha B$ и при этом A находится внутри B относительно C такого, что $\alpha \in C$. С точки зрения второго определения это исключено.

§ 32. Соответствие

Выбрать предмет — значит так или иначе обратить на него внимание, указать на него, назвать, представить и т. п. Выбор предметов есть первичная познавательная операция, разъясняемая на примерах.

Выбор двух или более различных предметов есть их сопоставление. Обращаем внимание на то, что в случае сопоставления предметов каждый из сопоставляемых предметов может быть выбран независимо от других. Выбираемые предметы различны, так что предмет сам с собой не сопоставляется.

Если принято (установлено) некоторое правило сопоставления предметов, будем говорить, что установлено соответствие этих предметов. Соответствие устанавливается только между различными предметами. Точнее понятие соответствия определяется для конкретных его видов. Соответствие предметов считается установленным с точки зрения какой-то данной группы лиц, и без этих лиц оно вообще не существует. Независимо от лиц, устанавливающих соответствие предметов, последние сами по себе в соответствии не находятся.

Высказывание «Предмет b соответствует предмету a» (или «Предмету a соответствует предмету b», «Предмету a поставлен в соответствие предмет b») будем кратко записывать символом

$$a \Leftarrow b,$$

где $\Leftarrow$ есть двухместный предикат «второй соответствует первому».

Если a и b суть индивидуальные термины, то предикат $\Leftarrow$ имеет такой смысл: $a \Leftarrow b$, если и только если $\sim (a \rightleftharpoons b)$ и принято решение в некоторых заданных условиях x всегда вслед за выбором a выбирать b. Выражение «всегда вслед за выбором a выбирается b» равносильно выражению «если выбирается a, то вслед за этим выбирается b». Так что выражение $a \Leftarrow b$ есть лишь сокращенная запись более сложного выражения, содержащего высказывание типа $y \to z$.

Если b есть общий термин, а a индивидуальный, предикат соответствия определяется так:

$$(a \Leftarrow b) \equiv Df \cdot (\forall \alpha)((\alpha \rightharpoonup b) \to (a \Leftarrow \alpha)),$$
$$(a \neg\Leftarrow b) \equiv Df \cdot (\exists \alpha)((\alpha \rightharpoonup b) \wedge (a \Leftarrow \alpha)),$$

где α есть индивидная переменная (т. е. $a \Leftarrow b$, если и только если любой индивид, который есть b, соответствует a). Если a есть общий, а b — индивидуальный термин, то определение примет вид:

$$(a \Leftarrow b) \equiv Df \cdot (\forall \alpha)((\alpha \rightharpoonup a) \to (\alpha \Leftarrow b)),$$
$$(a \neg\Leftarrow b) \equiv Df \cdot (\exists \alpha)((\alpha \rightharpoonup a) \wedge (\alpha \Leftarrow b)),$$

(т. е. $a \Leftarrow b$, если и только если любому индивиду, который есть a, соответствует b). Если a и b оба общие термины, то

$$(a \Leftarrow b) \equiv Df \cdot (\forall \alpha)(\forall \beta)((\alpha \rightharpoonup a) \wedge (\beta \rightharpoonup b) \rightarrow (\alpha \Leftarrow \beta)),$$
$$(a \neg \Leftarrow b) \equiv Df \cdot (\exists \alpha)(\exists \beta)((\alpha \rightharpoonup a) \wedge (\beta \rightharpoonup b) \wedge \sim (\alpha \Leftarrow \beta)),$$

где α и β суть индивидные переменные. Например, любой экземпляр слова «стол» соответствует любому экземпляру столов. Из определений следует:

$$(a \rightleftharpoons b) \rightarrow \sim (a \Leftarrow b) \wedge \sim (b \Leftarrow a).$$

§ 33. Соответствие классов

Установление соответствия предметов практически целесообразно тогда, когда приходится иметь дело с отношениями классов предметов. По нашему мнению, оно имеет смысл лишь для непустых и непересекающихся классов. При этом мы исходим из таких соображений.

Из рассмотрения случаев, когда устанавливают соответствие пересекающихся (имеющих общие элементы) классов, обнаруживается, что их общие элементы так или иначе удваиваются. Если индивид a включается в класс A и в класс B, то при сопоставлении A и B как различных классов (иначе сопоставление невозможно) рассматривают a как общий термин, а в качестве индивидуальных терминов фигурируют $a \downarrow (a \in A)$ (т. е. берется индивид a, включаемый в A) и $a \downarrow (a \in B)$ (т. е. берется индивид a, включаемый в B).

Рассмотрим такой пример. Пусть устанавливается какое-то соответствие класса натуральных чисел A и класса четных чисел B. Число 2 включается как в класс A, так и в класс B. Но дело в том, что выражение 2 не есть индивидуальный термин (2 не есть единственный индивид, обозначаемый словом «два»). Существует много индивидов, которые суть «два». И мы их здесь можем продуцировать в любом количестве: $2, 2, 2, \ldots$ И все они различны (хотя бы потому, что занимают различное место в пространстве). Аналогично для всех других чисел. Так что при установлении соответствия классов натуральных и четных чисел берутся фактически не A и B, а совсем другие классы, являющиеся лишь их подклассами, а именно: 1) класс, в который включается только один экземпляр единицы, только один экземпляр двойки и т. д.; 2) класс, в который включается только один экземпляр двойки, только один экземпляр числа четыре и т. д. Термины этих классов (соответственно A^* и B^*) в отличие от A и B являются общими, а не индивидуальными. И при этом двойки, включаемые в эти классы, суть различные индивиды. Поскольку берутся любые классы

такого рода, то получаемые утверждения в явной форме имеют вид $(\forall \alpha)(\exists \beta)x$, где α и β — переменные для классов такого рода, ax — результат сопоставления их. Классы A^* и B^* —непересекающиеся классы. Классы же A и B таковы, что $B \subset A$. Причем A содержит ничем не ограниченное и не поддающееся учету множество единиц, двоек и т. д. Аналогично B.

Итак, будем говорить, что класс B поставлен в соответствие классу A, если и только если A и B не пересекаются, оба не являются пустыми, и каждому элементу A поставлен в соответствие по крайней мере один элемент B. Это есть определение предиката $\Leftarrow$ для терминов классов. Из определения следует:

1) если хотя бы один из A и B пуст, то $\sim(A \Leftarrow B) \wedge \sim(B \Leftarrow A)$;
2) если A и B пересекаются, то $\sim(A \Leftarrow B) \wedge \sim(B \Leftarrow A)$;
3) если $A \subset B$, то $\sim(A \Leftarrow B) \wedge \sim(B \Leftarrow A)$;
4) $\sim(A \Leftarrow A)$.

Пусть a, b, c, d — индивидные переменные; A и B — переменные для классов; x — высказывание «A и B не пусты и не пересекаются»; y — высказывание «Каждому элементу A ставится в соответствие один и только один элемент B», т. е.

$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)((a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (a \Leftarrow b) \wedge \\ \wedge((a \Leftarrow c) \wedge (c \in B) \rightarrow (b \rightleftharpoons c))),$$

z есть высказывание «Разным элементам A ставятся в соответствие разные элементы B», т. е.

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(\forall d)((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (c \in B) \wedge \\ \wedge(d \in B) \wedge (a \Leftarrow c) \wedge (b \Leftarrow d) \wedge \sim(a \rightleftharpoons b) \rightarrow \sim(c \rightleftharpoons d)).$$

Примем такие определения:

1) класс B однозначно соответствует классу A (сокращенно $A \Leftarrow B$), если и только если $x \wedge y \wedge z$, т. е.

$$(A \Leftarrow B) \equiv Df \cdot (x \wedge y \wedge z);$$

2) классы A и B находятся во взаимнооднозначном соответствии (сокращенно $A \Leftrightarrow B$), если и только если $(A \Leftarrow B) \wedge (B \Leftarrow A)$, т. е.

$$(A \Leftrightarrow B) \equiv Df \cdot (A \Leftarrow B) \wedge (B \Leftarrow A).$$

§ 34. Функция

Если указан (установлен) общий способ, с помощью которого для каждого элемента Ka можно установить, какие именно элементы Kb ему соответствуют, то будем говорить, что задан (установлен)

способ или тип соответствия класса Kb классу Ka или что задана функция b от a.

Высказывания о том, что b есть функция от a, будем записывать символами вида

$$b \Leftarrow f(a),$$

где f обозначает способ соответствия (тип функции), $a \Leftarrow f$ есть двухместный предикат «первый есть функция f от второго».

Для одних и тех же Ka и Kb могут быть установлены различные способы соответствия, фиксируемые высказываниями

$$b \Leftarrow f^1(a), \ldots, b \Leftarrow f^n(a),$$

где $n \geqslant 1$. Например, соответствие класса нечетных чисел Kb классу четных чисел Ka может быть установлено равенством $b = a + 1$ и равенством $b = a \pm 1$. И если принято решение установить упомянутые виды соответствия класса Kb классу Ka, все $b \Leftarrow f^i(a)$ считаются истинными.

§ 35. Упорядоченные состояния

Важное значение для науки имеет фиксирование порядковых отношений состояний. Например, «После того, как прозвенел звонок, у собаки началось отделение слюны», «Вокруг проводника возникает магнитное поле в то время, как по нему проходит электрический ток» и т. п.

Частный случай высказываний, учитывающих порядок событий, суть высказывания типа «y в отношении R к x (или к тому, что x)». Будем их записывать символами

$$(Rx)y.$$

Например, «y через час после того, как x».

Встречаются, далее, высказывания вида «x и затем y», «x и перед этим y», «x и слева от этого y» и т. п. Это своеобразные упорядоченные конъюнкции нередко употребляются неявно и смешиваются с обычными. Именно на таком смешении базируется, на наш взгляд, исключение некоторых законов классической логики в «логике микромира».

В общем случае упорядоченные конъюнкции имеют вид

$$x \wedge (Rx)y.$$

Аналогично возможны упорядоченные дизъюнкции

$$x \vee (Rx)y.$$

Для этих конъюнкций и дизъюнкций не всегда верны утверждения

$x \wedge (Rx)y \to y \wedge (Ry)x,$

$x \vee (Rx)y \to y \vee (Ry)x.$

Так что для них нельзя принимать правила коммутации

$x \wedge (Rx)y \vdash y \wedge (Ry)x,$

$x \vee (Rx)y \vdash y \vee (Ry)x.$

Для них верны правила коммутации лишь такого вида:

$(x \wedge (R^{\mid}x)y) \wedge ((aR^{\mid}b) \to (bR^{2}a)) \vdash (y \wedge (R^{2}y)x),$

$(x \vee (R^{\mid}x)y) \wedge ((aR^{\mid}b) \to (bR^{2}a)) \vdash (y \vee (R^{2}y)x).$

Например, из высказывания «x и затем y» следует «y и до этого x», поскольку из «a происходит после b» следует «b происходит до a».

§ 36. Условные высказывания с отношением порядка

Встречаются условные высказывания вида

$x \to (Rx)y,$

где R есть отношение порядка. Например, «Если по проводнику пропустить электрический ток, то одновременно с этим (или сразу после этого) вокруг проводника возникает магнитное поле». Благодаря наличию R эти высказывания приобретают дополнительные свойства, в частности, такие:

$(x \to (Rx)y) \dashv\vdash (\forall sx)((Rx)y),$

$(x \to (R^{\mid}x)y) \dashv\vdash \wedge((aR^{\mid}b) \to (bR^{2}a)) \vdash (\sim y \to (R^{2} \sim y) \sim x).$

§ 37. Функциональная зависимость

Для любых двух непустых классов Ka и Kb, в принципе, может быть найден способ соответствия f такой, что $b \Leftarrow f(a)$. Это тривиально: условимся, например, любому a ставить в соответствие какой-то один b или любой b. Это тривиально, поскольку установление соответствия классов есть волевое решение лиц, имеющих дело с классами.

Однако имеются случаи, когда способ соответствия навязывается какими-то обстоятельствами и не является произвольно выбираемым.

Это бывает тогда, когда между индивидами одного класса и индивидами другого класса, независимо от того, изучают их или нет, имеется какая-то связь (зависимость). Высказывания, получаемые в таких случаях, суть высказывания вида

$$s(Rx)y \Leftarrow f(\downarrow x),$$

в которых речь идет не просто об индивидах, но о состояниях индивидов.

Эти высказывания получаются из высказываний вида

$$x^i \rightarrow (Rx^i)y^i$$

таких, что

$$(\downarrow x^i \rightarrow\downarrow x) \wedge (\downarrow y^i \rightarrow\downarrow y^i) \wedge (\downarrow y \Leftarrow f(\downarrow x)).$$

Здесь f подбирается с таким расчетом, чтобы выполнялось условие

$$\vdash (\downarrow (Rx)y \Leftarrow f(\downarrow x)) \wedge x^i \rightarrow (Rx^i)y^i$$

для любых x^i и y^i таких, что $\downarrow x^i \rightarrow\downarrow x$ и $\downarrow y^i \rightarrow\downarrow y$. Такие высказывания — высказывания о функциональной связи состояний.

Приведем пример. Наблюдаются состояния предметов a и b последовательно во времени по некоторому признаку P. Причем фиксируется величина P для a и затем через некоторое время t фиксируется величина b по этому признаку. Это — тип отношения R в высказывании $(Rx)y$. Составляется таблица величин a и b. Изучение последней позволяет установить, что с некоторыми огрублениями, допущениями и т. п. величина b всегда примерно в два раза больше величины a. Это — тип функции f в высказывании $\downarrow y \Leftarrow f(\downarrow x)$. Высказывания x^i и y^i здесь — высказывания о величине a и, соответственно, b в данное время и в диапазоне величин, установленном также наблюдением (это может быть задано таблицей).

Высказыванию $\downarrow (Rx)y \Leftarrow f(\downarrow x)$ можно придать вид условного высказывания

$$x \rightarrow (Rx)y^*,$$

где f внесено в y так, что получается высказывание y^*. Так, в рассмотренном выше примере высказыванию можно придать вид: «Если a имеет некоторую величину, то через время t предмет b будет иметь величину вдвое больше».

§ 38. Связи

Высказывания вида

$$x \to (Rx)y,$$
$$s(Rx)y \Leftarrow f(sx)$$

такие, что высказывание

$$x \to y,$$

не является логически доказуемым (логически истинным), будем называть высказываниями о связи состояний $\downarrow x$ и $\downarrow y$ или о физическом следовании $\downarrow y$ из $\downarrow x$. Если a есть такое высказывание, то sa есть термин связи, а то, что обозначается этим термином, — связь состояний. Последние суть элементы связи. Будем говорить также, что упомянутые состояния находятся в связи (связаны).

Поскольку высказывание о функциональной связи можно трансформировать в условное высказывание с отношением, в дальнейшем мы будем высказывания об эмпирических связях брать в обобщенной форме $x \to (Rx)y$, где y может содержать описание некоторой функции.

Если в $x \to (Rx)y$ отношение R означает тождество координат для x и y, то Rx опускают, и высказывания принимают вид $x \to y$. Но отношение Rx в них так или иначе предполагается. Например, в высказывании «Если по проводнику пропустить электрический ток, то вокруг него возникает магнитное поле» предполагается то же самое время или время сразу после наступления первого события.

Высказывание A о связи строится с таким расчетом, чтобы из высказываний x^i можно было чисто логически получать высказывания y^i, такие, что $\downarrow x^i \in K \downarrow x$ и $\downarrow y^i \in K \downarrow y$, а x, y и Rx входят в A. Другими словами, a строится так, чтобы имело место

$$x^i \wedge (\downarrow x^i \in K \downarrow x) \wedge A \vdash (Rx^i)y^i.$$

Поэтому A можно рассматривать как особое правило получения одних высказываний из других. Но это правило не логическое (относящееся к свойствам языка), а относящееся к свойствам той или иной предметной области.

В зависимости от строения x и y различаются простые и сложные высказывания о связях. Соответственно различаются и связи. Так, в высказывании $(a \wedge b) \to (R(a \wedge b)c)$ высказывание x есть сложное высказывание $a \wedge b$, состоящее из двух высказываний; в $a \to (Ra)(b \vee c)$ сложным является y.

Свойства сложных высказываний о связях определяются через простые особыми логическими правилами. Например, это правила вида

$$(a \vee b \to (R(a \vee b))c) \dashv\vdash (a \to (Ra)c) \wedge (b \to (Rb)c),$$
$$(a \to (Ra)(b \wedge c)) \dashv\vdash (a \to (Ra)b) \wedge (a \to (Ra)c),$$

и т. п. Но, кроме того, здесь возможны правила совершенно иной природы. Более подробно вопросы, относящиеся к связям, рассмотрим в следующей главе.

§ 39. Упорядочивание классов

Надо различать два типа упорядочивания классов. Первый тип упорядочивания (назовем его дифинитивным или конвенциальным) состоит в том, что принимается решение приписывать элементам заданного класса тот или иной порядок (порядковый номер) и то или иное порядковое отношение. Например, задан класс предметов A, состоящий из предметов a, b, c, d. В случае конвенциального упорядочивания принимается решение (в частности) считать a первым по порядку, b —вторым, c и d —третьими; и кроме того, принимается решение (явно или неявно) считать, что b превосходит по порядку a, c и d превосходят по порядку b, c и d тождественны по порядку. Здесь способ упорядочивания есть само принятое нами решение (обозначим α). Это решение может быть заменено другим, скажем — таким (обозначим β): будем считать, что $(b > \beta a)$, $(a > \beta c)$, $(a = \beta d)$.

Второй тип упорядочивания (назовем его эмпирическим) состоит в том, что по соглашению выбирается точка отсчета порядка и некоторое направление (скажем, «траектория») воображаемого перемещения наблюдателя, которое он предпринимает с целью выбора предметов данного класса. Например, задан класс домов в некотором районе A, и принимается решение установить их порядок таким способом: 1) начинаем от дома или домов, расположенных севернее остальных; 2) двигаемся направо, отмечая дома каким-то образом; 3) двигаемся от отмеченного дома к ближайшему от него неотмеченному наружному дому. При этом из способа установления порядка нельзя логически вывести порядок и отношение порядка элементов класса. Это находится эмпирически.

Короче говоря, если задан класс предметов и принят конвенциальный способ упорядочивания их, то из этого чисто дедуктивно можно выяснить порядковые отношения элементов класса. Если же задан класс предметов и принят эмпирический способ их упорядочивания, то

вопрос о порядковых отношениях элементов класса решается в зависимости от дополнительных сведений о их положении (в частности — от данных наблюдения).

Могут быть случаи упорядочивания элементов класса A такие, когда некоторый подкласс B этого класса упорядочен конвенционально, а другой C — эмпирически. Могут быть также случаи, когда класс A разбивается на подклассы $B^1, \ldots, B^n$ упорядоченные различными способами как конвенционального, так и эмпирического упорядочивания.

§ 40. Эпистемическая логика

Лиц, имеющих дело с высказываниями, будем называть высказывателями. Пусть a есть имя высказывателя (термин, обозначающий высказывателя), а x есть высказывание. Всякое высказывание есть особый воспринимаемый (видимый, слышимый и т. п.) предмет, оно имеет смысл и истинностное значение. К числу эпистемических высказываний мы относим только такие высказывания, в которых говорится от отношении высказывателя a к высказыванию x в этих трех аспектах. Эти высказывания суть следующие.

Будем говорить, что высказыватель a знаком с высказыванием x как с воспринимаемым предметом, если он может произнести или написать x, слышал или видел x, помнит его и т. п. Высказывания, в которых фиксируется это, будем схематично записывать в виде «a имеет x» (или «a обладает x») и называть высказываниями обладания. Обладание высказыванием есть некоторая способность или некоторое состояние высказывателя. Высказыватель может обладать высказыванием, не зная его смысла и значения истинности.

Будем говорить, что высказыватель a знаком со смыслом высказывания x (понимает x), если ему известно значение всех терминов, входящих в x, и свойства всех логических операторов, входящих в x. Очевидно, имеют место различные степени и формы понимания смысла высказывания, зависящие от уровня и характера образования, навыков оперирования речью и т. п., что для нас роли не играет. Для нас здесь достаточно принять, что если высказыватель в какой-то форме и степени, принятой для данного круга лиц, знаком со значением терминов и свойствами логических операторов, входящих в x, то он знаком со смыслом x (понимает x) с точки зрения этого круга лиц. Для того, чтобы понимать смысл x, этим высказыванием надо так или иначе обладать. Высказывания x будем схематично записывать в виде «a понимает x» и называть высказываниями понимания.

Выражение «a не понимает x» в обычной речи двусмысленно. В одном смысле оно означает, что a обладает высказыванием x,

но не знает значения каких-то терминов или свойств каких-то логических операторов, входящих в x. В другом смысле оно означает, что неверно говорить, будто a понимает x. И причиной такого отрицания может быть не только то, о чем сказано выше, но и то, что a вообще не обладает высказыванием x. Так что здесь необходимо различать два вида отрицания.

Если высказыватель a считает (думает, утверждает и т. п.), что высказывание x истинно (или что положение на самом деле, как говорится в x), будем говорить, что a признает (или принимает x). Высказывания, фиксирующие это, будем называть высказываниями принятия (признания) и схематично записывать в виде «a принимает (или признает) x».

В случае высказываний принятия не предполагается, что принимаемое высказывание истинно. Высказыватель может признавать истинным высказывание, которое на самом деле истинным не является. Принятие высказывания x высказывателем a есть некоторое действие a. В частности, это суть такие действия: a заявляет вслух другим лицам или говорит самому себе, что он признает (считает истинным) x; на вопрос о том, признает a высказывание x или нет, он отвечает «да», кивает головой и т. п. Высказывания принятия и фиксируют такого рода действия высказывателя. Эти действия разнообразны. Условимся считать, что a принимает x, если и только если он осуществляет или может осуществить в некоторых условиях (например, по требованию, по принуждению, по доброй воле) какое-то действие, которое можно отнести к классу действий по принятию высказываний.

Отрицание высказывания «a принимает x» точно также двусмысленно. Оно употребляется в активном смысле, т. е. как «a принимает не-x», и в пассивном смысле, т. е. как «a не осуществляет никакого действия, которое есть принятие x». Мы будем употреблять его во втором смысле.

Действия по принятию высказываний разнообразны. Так что возможны (и встречаются на самом деле) случаи, когда высказыватель каким-то способом принимает x (например, говорит самому себе или близким знакомым, что он считает x истинным), а другим способом этого не делает, в частности, заявляет вслух для какой-то группы лиц, что он не принимает x. Согласно нашей условности относительно пассивного смысла отрицания принятия высказывания в этом факте нельзя усматривать никакого противоречия. Если высказыватель заявляет, что он не признает x, то в нашем смысле это означает лишь то, что он не признает x одним способом (официальным заявлением о признании), что не исключает того, что он принимает x другим способом. Высказыватель допустит логическое противоречие лишь в том случае, если признает x и в то же время признает не-x.

Для того, чтобы принять x как высказывание, высказыватель должен понимать его. Так что здесь опять-таки открываются две возможности для отрицания высказывания «a принимает x», а именно — такие: 1) a понимает x, но не осуществляет действия по его принятию; 2) нельзя сказать, что a принимает x, и причиной этого может быть не только то, что указано в пункте 1, но и непонимание x.

С высказываниями принятия связаны высказывания отвергания и безразличия. Первые будем записывать в форме «a отвергает x». Они суть сокращения или замены высказываний вида «a принимает не-x». Вторые будем записывать в форме «a безразличен к x». Они суть сокращения для высказываний вида «a не принимает x и не принимает не-x» или «a не принимает и не отвергает x».

Наконец, к числу эпистемических высказываний относятся высказывания, в которых говорится о том, что высказывателю a известно, что высказывание x истинно (a осведомлен о том, что x; a знает, что x). Будем такие высказывания называть высказываниями осведомленности или знания и записывать схематично в форме «a знает, что x».

В случае высказываний осведомленности предполагается, что x истинно, и a каким-то образом принимает это (и, следовательно, обладает высказыванием x и понимает его). Частный случай таких высказываний — высказывание вида «a догадывается о том, что x», «a слышал о том, что x» и т. п. В общем, встречаются какие-то состояния высказывателей, который фиксируются в высказываниях осведомленности.

Для высказываний осведомленности точно так же существенно различать два вида отрицания. Без этого получаются парадоксальные следствия. Так, интуитивно очевидно, что когда говорят «a знает, что x», то предполагают истинность x. Точно так же предполагают истинность x и в случае, когда говорят «a не знает, что x». эту логическую связь предложений можно записать с помощью оператора условности так:

1) если a знает, что x, то x;
2) если a не знает, что x, то x.

Из первого утверждения по правилу контрапозиции получим:

3) если не-x, то a не знает, что x.

А из утверждений 2 и 3 по правилу транзитивности получим:

4) если не-x, то x.

Имеет силу утверждение:

5) если x, то x.

Из 4 и 5 имеем:

6) если x или не-x, то x.

А из 6 в силу того, что логически истинно «x или не-x» получим, что истинно любое высказывание x.

Но и независимо от таких парадоксов очевидно следующее. Отрицание высказывания «a знает, что x» может означать, что x истинно, но a не принимает его, и что высказывание «a знает, что x» неверно. Причем, причиной во втором случае может быть не только непринятие x, но и неистинность x.

Все приведенные высказывания содержат по два термина-субъекта (термин a и термин «высказывание x» или «тот факт, что x») и двухместные предикаты соответственно обладания, понимания, принятия, отвергания, безразличия, осведомленности. Будем эти предикаты для краткости записывать буквами соответственно A, B, C, D, E, F, а высказывания в целом — символами вида $Aamx$, $Bamx$, $Camx$, $Damx$, $Eamx$, $Famx$.

Обращаем внимание на то, что в эпистемические высказывания $Pamx$ входят не просто высказывания x, а термины mx, обладающие одной особенностью. Возьмем высказывание «a сказал, что x», являющееся частным случаем высказывания «a имеет x». Пусть x эквивалентно y. Если принято правило замены эквивалентности, из этого получается высказывание «a сказал, что y», которое может быть ошибочным при истинном высказывании «a сказал, что x». Избежать такого рода парадоксов без фиксирования упомянутой особенности терминов нельзя. А особенность эта состоит в том, что в такие термины x входит не в качестве высказывания, а в качестве физического (слышимого, видимого) предмета. Отсюда следует один важный вывод, имеющий общелогическое значение. Считать, что одно языковое выражение входит в другое, если и только если оно есть графическая часть второго, не всегда верно. Необходимо в каждом случае точно определять, когда одно языковое выражение есть вхождение в другое в качестве языкового выражения данного типа.

Сказанное касается не только эпистемических высказываний. Так, из того, что некоторое данное высказывание x длиннее графически высказывания y, не следует, что x длиннее z, если даже y и z эквивалентны, ибо правило эквивалентной замены касается замены вхождений высказываний в качестве высказываний, а не в качестве физических предметов.

Задача эпистемической логики состоит в том, чтобы установить правила оперирования высказываниями с указанными предикатами, т. е. определить эти предикаты своими методами. Причем, сделать это мы должны будем в соответствии с теми интуитивными соображениями, которые частично изложены выше, частично будут ясны из самого вида конструируемых исчислений.

Определение свойств эпистемических предикатов, которые не зависят от отношения высказывателей к правилам логики и имеют силу для каждого высказывателя в отдельности, дает система SE^1. Образуется эта система благодаря дополнениям к логическим системам, указанным выше. Символы $\wedge, \vee, \neg, \sim, \vdash$ суть соответственно операторы конъюнкции, дизъюнкции, внутреннего отрицания, внешнего отрицания и предикат логического следования. Выражение $x \dashv\vdash y$ будет употребляться как сокращение для двух выражений $x \vdash y$ и $y \vdash x$.

Дополнение к алфавиту (или собственный алфавит SE^1):

1) список переменных для терминов, обозначающих высказывателей (для имен высказывателей);

2) A, B, C, D, E, F — постоянные двухместные эпистемические предикаты соответственно обладания, понимания, признания, отвергания, безразличия, осведомленности.

Дополнение к определению предикатной формулы: если a есть переменная для имен высказывателей, а x есть пропозициональная формула, то $Aax, Bax, Cax, Dax, Eax, Fax$ суть предикатные формулы.

Определение вхождения пропозициональной формулы должно принять такой вид. Пропозициональная формула x входит в пропозициональную формулу в таких и только таких случаях:

1) y входит в $\sim y$, $y \wedge z$, $z \wedge y$, $y \vee z$, $z \vee y$;

2) x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ входит в $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n$; и в $x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n$;

3) если y входит в z, а z в v, то y входит в v.

Дополнительные аксиомные схемы:

1) $\sim Aax \vdash \neg Aax$;

2) $Aax \vdash Aay$, где y входит в x;

3) $Bax \vdash Bay$, где y входит в x;

4) $Bax \vdash Aax$; $\neg Bax \vdash Aax$;

5) $\sim Bax \vdash \sim Aax \vee \neg Bax$;

6) $Cax \vdash Bax$; $\neg Cax \vdash Bax$;

7) $\sim Cax \vdash \sim Bax \vee \neg Cax$;

8) $Dax \dashv\vdash Ca \sim x$;

9) $\neg Dax \dashv\vdash \neg Ca \sim x$;

10) $Eax \dashv\vdash \neg Cax \wedge \neg Dax$;

11) $\neg Eax \dashv\vdash Cax \wedge Dax$;

12) $Fax \dashv\vdash Cax \wedge x$;

13) $\neg Fax \dashv\vdash \neg Cax \wedge x$.

Аксиомы 1 означают, что для предиката A отрицания не различаются, ибо в теории предикации доказуемо: $\neg Aax \vdash Aax$. Аксиомы 8–13 означают, что предикаты D, E, F являются производными и вообще могут быть элиминированы из языка. Парадоксы, о которых говорилось выше, здесь не получаются, ибо формулы $\sim Fax \vdash \neg Fax$ и $\sim Fax \vdash x$ здесь недоказуемы. Если истолковать $\neg Cax$ в активном смысле, т. е. принять аксиомы $\neg Cax \dashv\vdash Ca \sim x$, то будет доказуемо $\vdash \sim Eax$, т. е. получим, что высказыватель не может быть безразличен к любому высказыванию. А это не соответствует интуиции.

Отношения высказывателей к правилам логики настолько разнообразны и индивидуальны, что здесь невозможно указать нечто общее для всех. Здесь возможно лишь определение различных типов высказывателей.

Допущение, что высказыватель знает и принимает какие-то правила логики, само по себе еще не делает систему эпистемической логики более богатой, чем SE^1 (допустим). Упомянутое допущение должно реализоваться в принятии дополнительных аксиом, имеющих силу для того или иного типа высказывателей.

Но допущение, что высказыватель знает и принимает правила логики, предполагает, что эти правила установлены и кому-то известны. А если они еще не установлены вообще, не общеприняты и т. п.? Выход из положения находят в том, что предполагают вполне определенный класс правил логики. Ниже мы приведем примеры определений типов высказывателей, в которых класс правил логики не ограничен конкретными логическими исчислениями. Система SE^2 образуется путем присоединения к SE^1 такого рода определений.

*D*1. Высказывателя a мы будем называть примитивно логичным, если и только если для него имеют силу аксиомные схемы

14) $Cax \vdash \sim Ca \sim x$;

15) $Cax \wedge Cay \vdash Ca(x \wedge y)$;

16) $Cax \dashv\vdash CaCax$.

Из *D*1 выводится, что если a примитивно логичен, то для него имеют силу теоремные схемы $Fax \vdash \sim Fa \sim x$, $Fax \dashv\vdash FaCax$, $Fax \dashv\vdash CaFax$, $Fax \dashv\vdash FaFax$ и т. п.

*D*2. Высказывателя a мы будем называть практически логичным, если и только если для него имеют силу аксиомные схемы 14–16 и, кроме того, аксиомные схемы:

17) $Ca(\vdash x) \vdash Cax$;

18) $Ca(x \vdash y) \vdash (Cax \vdash Cay)$

(при этом выражения с предикатом следования включаются в число предикатных формул исчисления SE^2).

Из $D2$ следует, что если a практически логичен и принимает правило $x \wedge y \vdash y$, то для него будут иметь силу теоремные схемы $Fai^1Fb^1 \ldots i^nFb^njFcx \vdash Fai^1Fb^1 \ldots i^nFb^nx$, где $n \geqslant 1$, а $i^1, \ldots, i^n, j$ означают наличие или отсутствие внутреннего отрицания (в любых комбинациях). Частный случай — теоремы $FaFbx \vdash Fax$ и $Fa\neg Fbx \vdash Fax$. При этом будут доказуемы также формулы $\vdash\sim Fa\neg Fax$ и $Fa(x \vdash y) \vdash (Fax \vdash Fay)$. Если принято правило $(\vdash x) \vdash x$, то будут теоремами формулы $Fa(\vdash x) \vdash Fax$.

$D3$. Высказывателя a мы будем называть абстрактно логичным, если и только если для него имеют силу аксиомные схемы 14–16 и, кроме того, аксиомные схемы:

19) $(\vdash x) \vdash Cax$;

20) $(x \vdash y) \vdash (Cax \vdash Cay)$.

При этом, очевидно, решение вопроса о том, когда имеет место $\vdash x$ и $x \vdash y$, предоставляется авторам логических систем.

Рассмотрим теперь взаимоотношения двух высказывателей a и b такого рода. Пусть Fax. Из этого не следует как $FbFax$, так и $\sim FbFax$, что очевидно. Пусть $FbFax$. Очевидно также, что из этого не следует как $FaFbFax$, так и $\sim FaFbFax$ (т. е. a может знать и может не знать о том, что $FbFax$). Пусть $FaFbFax$. Опять-таки при этом возможно, что b знает об этом, и возможно, что b не знает об этом. Пусть $FbFaFbFax$. Но далее интуитивная ясность исчезает. И возникает вопрос: можно ли построить такое высказывание $Fawx$ или $Fbwx$, где w есть какая-то последовательность букв F, a, и b, чтобы имели силу утверждения $Fawx \vdash FbFawx$ или $Fbwx \vdash FaFbwx$? Мы исходим из того фактического положения, что в такого рода ситуациях высказыватели рано или поздно догадываются о том, что одному из них известно то, что другому известно в связи с ним и высказыванием x. Т. е. мы допускаем, что в коммуникации a и b относительно x, начиная с некоторого момента, приписывание Fa к $Fbwx$ и Fb к $Fawx$ теряет практический смысл.

Пусть $[nab]$ есть выражение, в котором подряд n раз $(n \geqslant 1)$ записано выражение $FaFb$, а $[nba]$ — выражение, в котором n раз подряд записано $FbFa$. Например, $Fa[2ba]x$ есть выражение $FaFbFaFbFax$. Примем следующее определение, реализующее наше допущение.

$D4$. Пару высказывателей a и b будем называть взаимнодогадливой парой n-й степени, если и только если для них имеют силу аксиомы:

21) $[(n+1)ab]x \wedge [(n+1)ba]x \vdash [(n+2)ab]x$.

Если $n = 1$, то аксиомы 21 имеют такой вид

$$FaFbFaFbx \wedge FbFaFbFax \vdash FaFbFaFbFaFbx.$$

Из 21 следует:

$$[(n+1)ab]x \wedge [(n+1)ba]x \vdash [(n+2)ba]x.$$

Если $n = 1$, то это следствие имеет вид:

$$FaFbFaFbx \wedge FbFaFbFax \vdash FbFaFbFaFbFax.$$

Для практически логичных высказывателей из 21 следует:

22) $Fa[(n+1)ba]x \vdash [(n+2)ba]x.$

Если $n = 1$, то это следствие имеет вид:

$$FaFbFaFbFax \vdash FbFaFbFaFbFax.$$

Для практически логичных высказывателей из 21 выводится также следствие:

$$CaCbCaCbx \wedge CbCaCbCax \wedge CaCbCax \wedge CbCaCbx \wedge CaCbx \wedge$$
$$\wedge CbCax \wedge Cax \wedge Cbx \vdash CaCbCaCbCaCbx \wedge CbCaCbCaCbCax.$$

И наоборот, из этих формул для высказывателей указанного типа выводятся формулы 21.

Определения, аналогичные $D4$, можно принять для трех и более (вообще для любого n, большего двух) высказывателей. В частности, это можно сделать так.

$D5$. Энку ($n \geqslant 2$) высказывателей $a^1, a^2, \ldots, a^n$ будем называть взаимнодогадливой энкой m-й степени ($m \geqslant 1$), если и только если для них имеют силу аксиомы:

$$[(m+n-1)y^1]x \wedge \ldots \wedge [(m+n-1)y^k]x \vdash [(m+n)y^1]x,$$

где $y^1, \ldots, y^k$ суть всевозможные перестановки из $a^1, a^2, \ldots, a^n$.

Мы привели $D5$ лишь для иллюстрации общей идеи. В какой мере можно минимизировать антецедент приведенной формулы, мы не рассматриваем.

Если не считать сами антецеденты формул 21 и 22 в целом, то множества выводимых из них следствий, которые образуются только из букв F, a, b и x, совпадают: это суть выражения Fax, Fbx, $FaFbx$, $FbFax$, $FbFaFbx$, $FaFbFax$, $FaFbFaFbx$, $FbFaFbFax$. И в этом смысле эти варианты эквивалентны.

§ 41. О понятии веры

Высказывания веры «N верит в то, что X» (или «N принимает X на веру») суть частный случай эпистемических высказываний. Будем их записывать символами типа

$$W(N, mX),$$

где W есть предикат веры («принимает на веру»).

Какова интуиция такого рода высказываний (и предикатов)? Пусть A есть высказывание «N не имеет доказательства и опытного подтверждения X или вообще знает или считает, что таковых нет»; B есть высказывание «N принимает X»; C есть высказывание «N волен принимать или не принимать X». Высказывание $W(N, mX)$ есть лишь сокращение для $A \wedge B \wedge C$ т. е.

$$W(N, mX) \dashv\vdash A \wedge B \wedge C.$$

Этим исчерпываются свойства предиката W. Прочие утверждения, касающиеся W, могут лишь характеризовать самих верующих. Например, N будет называться непротиворечиво верующим, если и только если $\vdash\sim (W(N, mX) \wedge W(N, m \sim X))$; N будет называться логично верующим, если и только если имеет силу: если $X \vdash Y$, то $W(N, mX) \wedge W(N, mY)$ и $W(N, m \sim Y) \vdash W(N, m \sim X)$; N будет называть практически логично верующим, если и только если имеет силу: если N известно, что $X \vdash Y$, то $W(N, mX) \vdash W(N, mY)$ и $W(N, m \sim Y) \vdash W(N, m \sim X)$.

§ 42. О понятии предпочтения

Высказывания предпочтения в логически полном и явном виде суть высказывания типа «N предпочитает действие X прочим действиям из множества действий Y». Будем для краткости записывать их символами

$$\prod(N, X, Y).$$

Употребляются их урезанные и трансформированные формы «N предпочитает X» (и в этом случае неявно предполагается какое-то Y) «X предпочтительнее прочих Y» (здесь предполагается какой-то N), «X предпочтительнее» (предполагается какое-то Y и какой-то N). Выражение вида «N предпочитает высказывание X прочим из Y» есть лишь трансформация высказывания «N предпочитает принятие (признание) X признанию прочих Y».

Каков интуитивный смысл высказываний (и предиката) предпочтения? Они относятся прежде всего к действиям. Прочие случаи

можно представить как производные, т. е. просто как сокращения для фундаментальных случаев. Например, высказывание «N предпочитает классическую музыку» иногда есть лишь сокращение для «N предпочитает слушать классическую музыку». Эти выражения, далее, предполагают следующие условия. Задано какое-то множество действий X. Это множество разбивается на два непустые и непересекающиеся подмножества Y и Z. Частный случай — в Y, Z или в каждое из них включается по одному действию. Так что множество X содержит по крайней мере два действия. Заметим здесь, что неосуществление действия может быть также действием, так что множество X может состоять из таких двух действий, каждое из которых противоположно другому («курить» и «не курить», «идти в кино» и «не ходить в кино» и т. п.).

Символом $O(N, X)$ будем записывать высказывание «N осуществляет X». Смысл предиката O для отдельно взятых действий мы считаем интуитивно ясным. Если X есть положительное действие, то $\widetilde{X}$ есть отрицательное по отношению к нему действие. Оно определяется так:

$$O(N, \widetilde{X}) \dashv\vdash \sim O(N, X).$$

Из этого следует

$$O(N,\widetilde{\widetilde{X}}) \dashv\vdash O(N, X).$$

Для множеств из двух и более действий предикат O определяется так:

$$O(N, X) \dashv\vdash (\exists a)(O(N, a) \wedge (a \in X)).$$

Здесь $O(N, X)$ означает: «Осуществляется хотя бы одно из действий множества X».

Действия, включаемые в X, далее, обладают следующим свойством: если осуществляется какое-то из действий Y, то в данном случае не осуществляется никакое из действий Z, т. е.

$$\vdash \sim (O(N, Y) \wedge O(N, Z)).$$

Из этого следует

$$\vdash O(N, Y) \wedge \sim O(N, Z) :\sim O(N, Z) \wedge O(N, Y) :\vdash \sim O(N, Y) \wedge \\ \wedge \sim O(N, Z).$$

Случай, когда

$$\sim O(N, Y) \wedge \sim O(N, Z),$$

не исключается.

Пусть некоторое существо N попадает в ситуацию, когда ему предоставляется возможность выбрать какое-то действие (действия) из X и осуществить это действие. Он может ничего не выбирать. Если выберет действие из Y (или из Z), то не может выбрать действие из Z (соответственно, из Y). Предикат $\prod$ для такого одиночного случая определяется так:

$$\prod(N,Y,X) \dashv\vdash O(N,Y) \wedge (\exists Z)[(Y \subset X) \wedge (Z \subset X) \wedge (X \subset \supset Y \cup Z) \wedge \\ \wedge (\exists a)(a \in Y) \wedge (\exists a)(a \in Z) \wedge (\forall a) \sim ((a \in Y) \wedge (a \in Z)) \wedge \\ \wedge ((a \in Y) \wedge (b \in Z) \rightarrow \sim (O(N,a) \wedge O(N,b)))],$$

где a и b суть переменные для действий, а Z есть переменная для множеств действий.

Если число случаев, когда существу N приходится выбирать и осуществлять действие из X, больше двух, то предикат $\prod$ для них должен быть определен специально. В частности, если N осуществляет действия из X регулярно, и число случаев выбора достаточно велико, то $\prod$ может быть определен через число случаев выбора или через отношение числа выборов действий данного подмножества Y к некоторому принятому числу выбора действий X вообще (в частности — как вероятность выбора). Например, если число случаев выбора и осуществления какого-либо действия из Y равно α на каждое число β случаев выбора и осуществления какого-либо действия из X, то может быть принято соглашение:

$$\prod(N,Y,X) \dashv\vdash \left(\frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{2}\right).$$

Через $\prod$ можно определить прочие предикаты предпочтения. Например:

1) $\square(N,(Y,Z),X) \dashv\vdash \sim\prod(N,Y,X) \wedge \sim\prod(N,Z,X)$;
2) $\boxminus(N,Y,X) \dashv\vdash \square(N,(Y,\sim Y),X)$.

В (1) дано определение равнопредпочтительности, а в (2) — безразличия.

Особый случай — высказывание предпочтения высказываний. Пусть iX есть «принятие X». В таком случае возможны определения типов предпочитающих. Например, N будет называться непротиворечиво предпочитающим, если и только если

$$\prod(N,iX,U) \vdash \sim\prod(N,iX,U).$$

И вообще, «логика предпочтения», как и «логика веры», есть лишь система определений предикатов предпочтения и типов предпочитающих.

§ 43. О логике оценок

Оценочные высказывания суть высказывания типа

$PR(a)$,

где a есть термин оцениваемого предмета (в частности, это может быть пара, тройка и вообще энка из двух или более предметов), P есть название признака, по которому производится оценка a, R есть оценочное выражение вроде «хороший», «плохой», «лучше», «пять баллов», «девять очков» и т. п. Логика оценок устанавливает специфические логические свойства оценочных выражений. Именно специфические. Высказывание «лучше», например, обладает свойствами, устанавливаемыми в логике сравнения. В логике оценок должно быть обращено внимание на такое его свойство, которое является общим для него и других оценочных выражений и отличает от неоценочных выражений (например, от «выше»).

Соотношение P и PR определяется правилом:

1) $\vdash (PR \rightarrow P)$.

Из (1) следует:

$\vdash ((a \downarrow PR) \rightarrow (a \downarrow P))$,

$\vdash PR(a) \rightarrow P(a)$,

$\vdash \sim P(a) \rightarrow \sim PR(a)$.

Например, плохой спортсмен — спортсмен; если человек не является спортсменом, о нем нельзя сказать, что он плохой (хороший и т. п.) спортсмен.

Оценки можно разделить на субъективные и объективные. В первом случае нет никаких общепринятых (для данного круга лиц) критериев оценки. Так что, если лицо N^1 высказало $PR(a)$, то другое лицо не имеет никаких критериев установить, верно это или нет. Во втором случае такие критерии имеются (с той или иной степенью полноты, устойчивости, четкости и т. д.). Оценки, далее, можно разделить на абсолютные и относительные. Первые имеют место тогда, когда в $PR(a)$ термин a не есть энка из двух или более терминов, а вторые — когда a есть $(a^1, \ldots, a^n)$, где $n \geqslant 2$. Наконец, можно различать первичные и производные оценки. Первые нельзя вывести из других оценочных высказываний, вторые же, наоборот, получаются из других высказываний того же рода. Производные оценки, в свою очередь, можно разделить на логически производные и фактически производные. Примеры логически производных оценок. Из высказываний «a лучше b как спортсмен» и «b лучше c как спортсмен» получается высказывание «a лучше c как спортсмен». Если мы решили считать, что $PQ(a)$

есть сокращение для $PR^1(a) \vee PR^2(a)$, то будут иметь силу утверждения $PR^1(a) \to PQ(a)$ и $PR^2(a) \to PQ(a)$, где PQ будет производной от PR^1 и PR^2 оценкой. Такие случаи интереса не представляют, так как здесь специфика оценочных отношений никак не учитывается. Пример фактически производной оценки. Известно, какие баллы получили ученики данного класса по математики. Вычислив среднеарифметический балл, получают оценку класса в целом. Именно такие случаи имеют интерес для логики. В общем, задачу логики оценок мы видим в установлении некоторых правил, специфически относящихся к оценочным выражениям.

Будем рассматривать критерии оценок по аналогии с координатами высказываний. Это — своеобразные координаты, специфически относящиеся к оценочным высказываниям. Если x есть оценочное высказывание, а v — термин критериев оценок, то $[xv]$ точно так же есть оценочное высказывание. Для оценочных критериев имеет силу правило:

2) $[xv^1] \wedge (v^1 \to v^2) \vdash [xv^2]$.

Когда знаки критериев оценок опущены, мы предполагаем, что они одинаковы для всех оценочных высказываний данного выражения.

Оценочные высказывания с разными критериями оценки логически независимы, т. е.

3) $\vdash \sim(v^1 \to v^2) \wedge \sim(v^2 \to v^1) \to \sim([xv^1] \to [yv^2]) \wedge$
$\wedge \sim([yv^2] \to [xv^1])$.

Различные первичные оценки независимы, т. е.

4) $\vdash \sim(R^1 \to R^2) \wedge \sim(R^2 \to R^1) \to \sim(PR^1(a) \to PR^2(a))$.

Например, из того, что ученик не получил пятерку, не следует, что он получил четверку.

Пусть B есть энка из двух или более индивидов. Пусть $a \in B$ означает, что a есть один из индивидов, входящих в B (a принадлежит B). Если все индивиды B оцениваются по признаку P, то возможен (найдется) метод оценки B по тому же признаку P, т. е.

5) $\vdash ((\exists v)((a \in B) \to (\exists R)PR(a))) \to (\exists v)(\exists R)PR(B)$,

где R — переменная для оценочных выражений, а v — переменная для критериев оценки.

Например, если всем ученикам класса поставили оценки по данному предмету, то и всему классу в целом можно приписать оценку (например, среднеарифметический балл).

6) Оценка энки индивидов зависит исключительно от оценок входящих в нее индивидов, т. е. если даны критерии оценки для B,

и известны оценки всех индивидов, входящих в B, то этого достаточно для получения оценки B.

7) $\vdash [PR^1(a)v^1] \leftrightarrow [PR^2(a)v^2]$.

§ 44. О логике норм и вопросов

Каждой норме соответствует нормативное высказывание, т. е. высказывание, содержащее название действия и предикат «запрещено», «разрешено» или производный от них предикат. Например, норме «Не курить» соответствует высказывание «Курить (или курение) здесь запрещено». Так что можно принять правило: из нормы A следует норма B, если и только если из нормативного высказывания, соответствующего A, следует нормативное высказывание, соответствующее B.

Вопрос есть языковое выражение, состоящее из двух частей: 1) часть предполагаемого или возможного высказывания; 2) языковое выражение, означающее предложение (просьбу, приказание) дополнить первую часть до некоторого истинного высказывания. Последнее есть правильный ответ на вопрос. Так что можно принять правило: из вопроса A следует вопрос B, если и только если из правильного ответа на A следует правильный ответ на B.

Так что идея каким-то образом обобщить понятие логического следования, чтобы оно было применимо к языковым выражениям, не являющимся высказываниями, сама по себе абсурдна. Имеет смысл лишь идея редукции отношений таких выражений к отношениям высказываний.

Раздел II

ОЧЕРК МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Цель очерка — дать общее представление о многозначной логике как об особом разделе и направлении современной логики и выяснить ряд общих вопросов логики, которые впервые возникли или приобрели новый смысл в связи с развитием многозначной логики. Содержание ее существенно отличается от содержания [4] и [72] как с точки зрения рассматриваемого материала, так и с точки зрения общих выводов.

Глава 1

Двузначная логика

§ 1. Двузначная логика

Двузначная логика есть совокупность логических исследований, в основе которых явно или неявно лежит принцип (гипотеза) двузначности высказываний: «Каждое высказывание либо истинно, либо ложно». В современной логике эти исследования охватывают: 1) разработку логических систем, базирующихся на принципе двузначности высказываний, и исследование свойств и взаимоотношений этих систем; 2) использование таких логических систем для решения различных проблем логики. В первом случае можно говорить об аппарате двузначной логики, во втором — о двузначной концепции логики.

Двузначную логику иногда называют аристотелевской. Но, как справедливо заметил Лукасевич, принцип двузначности высказываний впервые сформулировал Хризипп, а не Аристотель. Последний допускал высказывания, которые не являются истинными и ложными (например, высказывания о будущих случайных событиях). Формальные проблемы, интересовавшие Аристотеля, не были явным образом связаны с вопросом о числе значений истинности высказываний. Хризипп же создал своего рода прообраз современной логики высказываний (пропозициональной логики), а последняя немыслима без гипотезы о числе значений истинности и их отношениях.

Двузначную логику мы изложим лишь в той мере и в такой форме, в какой это требуется и удобно для целей дальнейшего изложения.

§ 2. Двузначная пропозициональная логика

Примем обозначения:

1) $x, y, z, x^1, x^2, \ldots$ — пропозициональные переменные;

2) $a, b, c, a^1, a^2, \ldots$ — пропозициональные формулы;

3) $A, C, D, E, K, N, \ldots$ — пропозициональные константы, называемые соответственно нестрогой дизъюнкцией, материальной импликацией, строгой дизъюнкцией, материальной эквивалентностью, конъюнкцией и отрицанием;

4) 1 и 2 — значения, которые принимают пропозициональные переменные и формулы;

5) если a есть пропозициональная формула, то $[a]$ есть ее значение, т. е. число 1 или 2. Слово «пропозициональная» в дальнейшем будем иногда опускать, полагая, что будут иметься в виду пропозициональные переменные, формулы, константы.

Формулы образуются из переменных и констант по определенным правилам. Функция, которая каждой комбинации значений переменных, входящих в данную формулу, ставит в соответствие определенное значение самой формулы, называется пропозициональной. Пропозициональная логика исследует свойства пропозициональных функций. В рассматриваемом случае аргументы (переменные, входящие в формулы) и функции (формулы, содержащие эти переменные) принимают только два значения. Поэтому функции называются двузначными, а изучающий их раздел логики — двузначной логикой. Пропозициональные константы обозначают типы пропозициональных функций.

Установлено, что функции от трех и более аргументов можно определить через унарные (от одного аргумента) и бинарные от двух аргументов) Это определение состоит в следующем: для каждой функции от трех и более аргументов (обозначим ее через a) может быть найдена формула b, которая содержит те же самые переменные и знаки только унарных и бинарных функций и которая равнозначна ей, т. е. $[a] = [b]$ при любых комбинациях значений переменных. Поэтому мы ниже будем рассматривать лишь унарные и бинарные функции. Установлено также, что из множества унарных и бинарных функций можно выбрать некоторые в качестве основных таким образом, что через них определяются остальные (в только что указанном смысле). Такая система основных функций (в частности, это может быть одна функция Шеффера) называется функционально полной.

Примем следующее определение формулы:

1) переменная есть формула;

2) если a есть формула, то Na есть формула;

3) если a и b суть формулы, то Fab есть формула, где F есть любая бинарная константа A, K, C и т. д.;

4) нечто есть формула только в силу (1–3).

Вхождение в формулу:

1) a входит (есть вхождение) в a, Na, Fab, Fba;

2) если a входит в b, а b входит в c, то a входит в c;

3) одна формула входит в другую лишь в силу 1 и 2.

В качестве основных функций примем N и K, которые определим следующим образом:

1) $[Kab] = \max([a], [b])$,

т. е. значение Kab равно большему из значений формул a и b;

2) $[Na] = 2 - [a] + 1$.

Система пропозициональной логики с основными функциями K и N функционально полна.

Прочие из указанных в начале параграфа функций определяются через K и N так:

3) $[Aab] = [NKNaNb]$;

4) $[Cab] = [NKaNb]$;

5) $[Dab] = [KAabANaNb]$;

6) $[Eab] = [KCabCba]$.

Легко показать, что

$[Aab] = \min([a], [b])$,

т. е. значение Aab равно меньшему из значений формул a и b,

$[Cab] = \min(3 - [a], [b])$,

$[Dab] = \min(\min([a], [b]),\ \min(3 - [a], 3 - [b]))$,

$[Eab] = \max(\min(3 - [a], [b]),\ \min(a, 3 - [b]))$.

Табличные определения введенных функций имеют такой вид:

a	Na
1	2
2	1

a	b	Kab	Aab	Cab	Dab	Eab
1	1	1	1	1	2	1
1	2	2	1	2	1	2
2	1	2	1	1	1	2
2	2	2	2	1	2	1

Примем, наконец, определения:

1) формула a есть тавтология (общезначима), если и только если $[a] = 1$ при всех наборах значений переменных, входящих в нее;

2) формула a выполнима, если и только если $[a] = 1$ по крайней мере для одного набора значений переменных, входящих в нее;

3) формула a есть противоречие (невыполнима), если и только если $[a] = 2$ при всех наборах значений переменных, входящих в нее.

Используя введенные определения, можно показать, что приводимые ниже формулы суть тавтологии:

$AaNa$ — закон исключенного третьего;
$DaNa$ — закон исключенного третьего;
$NKaNa$ — закон противоречия;
$CNNaa$ — закон снятия двойного отрицания;
$CaNNa$ — закон введения двойного отрицания;
$ENKabANaNb$ — закон Де Моргана;
$ENAabKNaNb$ — закон Де Моргана,
$EKKabcKaKbc$ — закон ассоциативности;
$EAAabcAaAbc$ — закон ассоциативности;
$CCabCNbNa$ — закон контрапозиции;
$CKabKba$ — закон коммутативности конъюнкции;
$CAabAba$ — закон коммутативности дизъюнкции;
$EKaAbcAKabKac$ — закон дистрибутивности;
$EaKbcKabAac$ — закон дистрибутивности;
Eaa — закон тождества.

Есть разные способы построения двузначной пропозициональной логики (см., например, [33]). Употребляются разные выражения для ее обозначения: «двузначная алгебра логики», «двузначное матричное построение», «двузначное истинностное построение».

§ 3. Классическое пропозициональное исчисление

Чтобы выяснить, является та или иная произвольно взятая формула тавтологией или нет, надо пересмотреть всевозможные комбинации значений входящих в нее переменных и для каждой комбинации установить значение формулы в соответствии с принятыми определениями. Аналогично для выполнимости и невыполнимости.

Но имеется другой способ решения этой задачи. Он заключается в следующем: из множества тавтологий выбираются некоторые в качестве основных и указываются правила получения из них всех прочих тавтологий Выбранные таким образом тавтологии называют аксиомами, а правила получения из них других тавтологий — правилами выхода

из аксиом. Сам способ называют аксиоматизацией. Логическая система, посредством которой таким способом охватываются все тавтологии двузначной пропозициональной логики, называется классическим пропозициональным исчислением

Имеется множество различных способов построения классического пропозиционального исчисления Мы здесь примем построение, данное в работе [7], изменив только символику и терминологию. Обозначения, определение формулы и определения вхождения в формулу те же, что и выше, с одним отличием: первичные логические константы суть A, K, C и N.

Аксиомы классического пропозиционального исчисления:

1) $CxCyx$;
2) $CCxCyzCCxyCxz$;
3) $CKxyx$;
4) $CKxyy$;
5) $CCxyCCxzCxKyz$;
6) $CxAxy$;
7) $CyAxy$;
8) $CCxzCCyzCAxyz$;
9) $CCxyCNyNx$;
10) $CxNNx$;
11) $CNNxx$.

Правила вывода:

1) из a получается b путем подстановки формулы c на место переменной x во всех местах, где x входит в a (правило подстановки);

2) из Cab и a получается b (правило modus ponens).

Определение доказуемой формулы: формула a есть доказуемая в классическом пропозициональном исчислении формула, если и только если она есть одна из аксиом 1 – 11 или получается из аксиом по правилам вывода (1) и (2).

Для D и E можно принять сокращенные определения или дополнительные аксиомы

$$CExyKCxyCyx,$$
$$CKCxyCyxExy,$$
$$EDxyKAxyANxNy,$$

если они включаются в число первичных констант.

Построенное выше исчисление обладает следующими свойствами:

1) если a есть тавтология в двузначной пропозициональной логике, то a есть доказуемая в классическом пропозициональном исчислении формула;

2) если a есть доказуемая в классическом пропозициональном исчислении формула, то a есть тавтология в двузначной пропозициональной логике.

В первом случае говорят, что классическое пропозициональное исчисление дедуктивно полно относительно двузначной пропозициональной логики. В случае выполнения обоих пунктов говорят, что классическое пропозициональное исчисление и двузначная пропозициональная логика дедуктивно эквивалентны.

Мы не рассматриваем прочих вопросов, относящихся к классическому пропозициональному исчислению (они подробно изложены, например, в [7], [33], [36] и т. п.), поскольку они не имеют существенного значения в данном контексте.

Конечно, классическое пропозициональное исчисление имеет свои цели, независящие от гипотезы двузначности, и свою самостоятельную историю. Но нам здесь важно подчеркнуть то, что оно изобреталось (явно или неявно) с таким расчетом, чтобы получалась система дедуктивно эквивалентная двузначной пропозициональной логике.

§ 4. Двузначная концепция логики

Построенные выше двузначная пропозициональная логика и классическое пропозициональное исчисление образуют формальный (логический) аппарат, допускающий различные интерпретации. Эти интерпретации разделяют на внелогические и внутрилогические.

Примером внелогической интерпретации является интерпретация в терминах электрический сетей. Здесь, например, переменные рассматриваются как контакты сети, значения переменных — как положения контактов (1 как «замкнуто», 2 как «разомкнуто»), логические константы — как способы соединения контактов (K — как последовательное, A — как параллельное). Внелогические интерпретации мы специально рассматривать не будем, поскольку нас интересует область самой логики.

В случае внутрилогических интерпретаций приведенные логические системы используются как средства исследования свойств логических знаков и, соответственно, логических правил (законов), для выполнения и уточнения (для экспликации) смысла логических знаков и определения класса законов логики. При этом переменные рассматриваются как простые высказывания, формулы — как высказывания,

образованные из простых высказываний и логических знаков, значения 1 и 2 — как значения истинности высказываний (соответственно как истинность и ложность).

Приведем основные внутрилогические интерпретации. Первая интерпретация состоит в следующем: знаки K, A, D и N рассматриваются соответственно как логические знаки «и», «или» (нестрогое и строгое) и «не»; знаки Cxy и Exy рассматриваются как сокращения для $ANxy$ и $KANxyAxNy$. При этом определения знаков K, A, D и N выступают как экспликации (выявления и уточнения смысла) свойств соответствующих знаков языка, а тавтологии и доказуемые формулы — как экспликации правил логики. Например, доказуемая формула $DxNx$ есть экспликация закона исключенного третьего, взятого в форме «Либо x, либо не-x», а тавтология $DxNx$ — того же знака, взятого в форме «x либо истинно, либо ложно». Аналогично $AxNx$, поскольку $EAxNxDxNx$.

Вторая интерпретация состоит в том, что K, A, D и N рассматриваются как в первом случае, но Cxy и Exy рассматриваются соответственно как «Если x, то y» и «x, если и только если y».

Третья интерпретация состоит в том, что первый знак C в тавтологии и доказуемых формулах рассматривается как знак логического следования, знаки K, A, D и N рассматриваются как в первом, так и во втором случае, остальные вхождения знака C рассматриваются как в первом или как во втором случае. Коротко говоря, эта интерпретация первого знака C имеет такой вид: если Cxy есть тавтология (или доказуемая формула), то из x логически следует y. Такая интерпретация правомерна, поскольку к логическому следованию предъявляют только следующие требования: 1) из истинной посылки x должно получиться истинное следствие y; 2) если следствие y ложно, то ложна и посылка x. Тавтологии (и доказуемые формулы) удовлетворяют этим требованиям.

Двузначная концепция логики проявляется, далее, в том, что на основе двузначной пропозициональной логики и классического пропозиционального исчисления строятся прочие разделы логики — логика предикатов, силлогистика, модальная логика и т. п. (причем, используются все три приведенные выше интерпретации). Поскольку при этом происходит просто присоединение к ним каких-то новых знаков, определений, аксиом, правил и т. д., то все их тавтологии и доказуемые формулы сохраняют силу.

Двузначная концепция логики не означает того, что все проблемы логики решаются в духе гипотезы двузначности высказываний. В логике имелись и имеются проблемы, для решения которых вообще не имеет значения тот или иной ответ на вопрос о числе значений истинности высказываний.

Глава 2

Возникновение многозначной логики

§ 1. Понятие многозначной логики

По аналогии с определением двузначной логики дадим определение многозначной логики. Многозначная логика есть область (раздел, направление) логических исследований, в основе которых лежит принцип (гипотеза) многозначности высказываний: высказывания могут быть не только истинными и ложными, но могут иметь другие значения истинности; число значений истинности высказываний может быть больше двух (может быть любым конечным числом и даже бесконечным). Эти исследования охватывают: 1) разработку логических систем, базирующихся на допущении многозначности высказываний; 2) использование таких (можно сказать, многозначных) логических систем для решения различных проблем логики. В первом случае речь идет об аппарате многозначной логики, во втором — о многозначной концепции логики.

В словесном выражении отличие многозначной логики от двузначной совершенно ничтожно. Но оно, как увидим, обозначает весьма существенный перелом в логических исследованиях, который имеет много общего с возникновением неевклидовой геометрии и неклассической физики.

С того момента, когда в логике был провозглашен принцип двузначности высказываний, всегда находились люди, подвергавшие этот принцип сомнению. Эти сомнения имели вполне здравую основу. В частности, в рамках этого принципа возникали затруднения при оценке значений истинности высказываний о будущих событиях, высказываний, в которых не указано время или место событий, высказываний, получаемых при условии взаимоисключающих опытов, высказываний о ненаблюдаемых и несуществующих событиях, высказываний о переходных состояниях и т. п. Аналогичные трудности возникали при попытках строить модальную логику. На эти факты указывается во многих работах, в частности — в [27], [38], [53], [44].

Но поскольку сомнения такого рода не реализовались в форме логических систем, не приводили к созданию логической теории, они имели ценность исторических фактов, но не более. Требовалось создание определенных условий внутри самой логики, чтобы они смогли

сыграть роль стимулов к построению многозначных логических систем и вообще к разработке многозначной логики как особого направления логических исследований. Из этих условий в первую очередь следует назвать внедрение математических методов в область логики, разработку пропозициональной логики (матричный метод) и способность чисто формального подхода к логическим проблемам. Не случайным поэтому является то обстоятельство, что многозначная логика начала свое существование сравнительно недавно, а именно — начиная с двадцатых годов нашего столетия. Основателями ее являются Лукасевич (1920 г.) и Пост (1921 г.). Существенную роль в становлении многозначной логики сыграли критика Брауэром закона исключенного третьего (1908, 1924 гг.).

§ 2. Трехзначная логика Лукасевича

Исторически первой многозначной логической системой является трехзначная пропозициональная логика, построенная Лукасевичем [39, 40].

Исходя из анализа модальных высказываний, Лукасевич пришел к выводу, что для описания свойств этих высказываний не может быть использована двузначная логика. Одна из линий его аргументации имеет следующий вид. Пусть Ma означает «Возможно, что a». Формула $CaMa$ («Если a, то возможно, что a») очевидно, интуитивно приемлема. Потому она должна быть тавтологией и, соответственно, доказуемой в логической системе. Формулы же $CMaa$ («Если возможно, что a, то a») и Ma нельзя принять в качестве обязательных. Поэтому они не должны быть тавтологиями и доказуемыми. Такого же рода предпосылки принимаются и для необходимости.

Легко показать, что Ma не может быть функцией от a в двузначной логике. В последней имеется лишь четыре унарные функции: $[Va] = 1$, $[Fa] = 2$, $[Sa] = [a]$ и $[Na] = 3 - [a]$. Пусть $[Ma] = [Va]$. Тогда Ma есть тавтология, что противоречит интуитивным предпосылкам. Пусть $[Ma] = [Fa]$. Тогда при $[a] = 1$ получим, что $[CaMa] = 2$, что также противоречит интуитивным предпосылкам. Аналогично обстоит дело с допущениями $[Ma] = [Sa]$ и $[Ma] = [Na]$, так как в первом случае будет тавтологией $CMaa$, а во втором не будет тавтологией $CaMa$.

Первоначально Лукасевич считал, что для модальной логики требуется логика, в которой помимо обычных значений истинности «истинно» и «ложно» фигурирует третье значение «нейтрально». Для нас здесь не имеет значения то, насколько справедливы были суждения Лукасевича о модальных высказываниях. Важен результат — построение трехзначной пропозициональной логики. Последняя имеет следующий вид.

Значения пропозициональных переменных и формул (истинностные значения):

1) 1 — соответствует «истинно»;
2) $\frac{1}{2}$ — соответствует «нейтрально»;
3) 0 — соответствует «ложно».

Основные функции суть C и N, которые определяются так:

1) $[Na] = 1 - [a]$;
2) $[Cab] = \min(1, 1 - [a] + [b])$.

Через них определяются другие функции:

3) $[Aab] = [CCabb]$;
4) $[Kab] = [NANaNb]$.

Можно показать, что

$[Aab] = \max([a], [b])$,
$[Kab] = \min([a], [b])$.

Формула a есть тавтология, если и только если $[a] = 1$ при всех комбинациях значений переменных, входящих в a.

Посредством таблиц функции N, C, F и K определяются так:

a	Na
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

Cab	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Kab	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

Aab	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

Отметим некоторые важные следствия, вытекающие из принятых определений. Не все тавтологии двузначной логики суть тавтологии в трехзначной логике Лукасевича.

Так обстоит дело, например, с законами противоречия $NKaNa$ и исключенного третьего $AaNa$; при $[a] = \frac{1}{2}$ будет $[Na] = \frac{1}{2}$ и $[AaNa] = \frac{1}{2}$; аналогично $[KaNa] = \frac{1}{2}$ и $[NKaNa] = \frac{1}{2}$. Легко убедиться также в том, что не будут тавтологиями формулы $CCNaaa$,

$CCaNaNa$, $CCaKbNbNa$, и т. п., являющиеся тавтологиями в двузначной логике. Тогда как формулы $CNNaa$ и $CaNNa$ остаются тавтологиями в логике Лукасевича (ниже мы увидим, что первая из них не будет тавтологией в трехзначной логике Гейтинга).

Не всегда формулы, равнозначные в двузначной логике, равнозначны в логике Лукасевича. Таковы, например, формулы Aab и $CNab$ при $[a] = \frac{1}{2}$ и $[b] = \frac{1}{2}$ получим $[Aab] = \frac{1}{2}$ и $[CNab] = 1$. Имеется, однако, функция B^1, удовлетворяющая равенству $[B^1_{ab}] = [CNab]$. Для нее $[B^1ab] = \min(1, [a] + [b])$. Аналогично не равнозначны Kab и $NCaNb$: при $[a] = \frac{1}{2}$ и $[b] = \frac{1}{2}$ получим $[Kab] = \frac{1}{2}[NcaNb] = 0$. Имеется функция B^2 такая, что $[B^2ab] = [NCaNb][B^2ab] = \max(0, [a] + [b] - 1)$.

Обращаем внимание на то, что в логике Лукасевича не являются тавтологиями отрицания законов противоречия и исключенного третьего: при $[a] = 1$ будет $[NNKaNa] = 0$ и $[NAaNa] = 0$. В общем виде можно сказать: если a есть тавтология в двузначной логике, то Na не есть тавтология в логике Лукасевича. Это обусловлено тем, что все тавтологии логики Лукасевича суть тавтологии в двузначной логике. В самом деле, если исключить третье значение $\frac{1}{2}$, то определения трехзначных функций C и N становятся определениями соответствующих двузначных функций.

Если истинностные значения суть 1 (истинно), 2 (нейтрально) и 3 (ложно), то определения функций примут такой вид:

$$[Na] = 3 + 1 - [a],$$
$$[Cab] = \min(3 - [a] + 1, [b]),$$
$$[Aab] = \min([a], [b]),$$
$$[Kab] = \max([a], [b]).$$

В этой форме совершенно ясно видно, что двузначная логика может быть получена из трехзначной логики Лукасевича путем исключения значения 2, замены значения 3 значением 2 и замены числа 3 в определениях N и C числом 2. Так что логику Лукасевича, в известном смысле, можно рассматривать как своеобразное обобщение двузначной.

Система трехзначных функций C—N, как показал Слупецкий, не является функционально полной, т. е. не все трехзначные функции могут быть записаны только с помощью знаков функций C и N. Такова, например, функция Слупецкого, определяемая

$$[Ta] = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad [Ta] = 2$$

(если истинностные значения суть 1, 2 и 3). Система же $C - N - T$ является функционально полной.

Тарский [42] и Вайсберг [66] аксиоматизировали трехзначную логику Лукасевича. Аксиомы таковы:

1) $CxCyx$;
2) $CCxyCCyzCxz$;
3) $CCCxNxxx$;
4) $CCNyNxCxy$.

Правила вывода — правило подстановки и modus ponens. Это исчисление не является дедуктивно полным относительно трехзначной логики $C - N - T$. Добавив к нему аксиомы

5) $CTxNTx$;
6) $CNTxTx$,

Слупецкий [60] сформулировал дедуктивно полное исчисление.

§ 3. Другие системы Лукасевича

Как уже говорилось, стимулом к построению многозначной логики у Лукасевича послужило исследование модальных высказываний. Позднее Лукасевич [43], [44] пришел к выводу, что при построении модальной логики должно быть сохранено классическое пропозициональное исчисление. Он построил четырехзначную логику, которая отвечает этому требованию.

Четырехзначную логику Лукасевич строит таким методом. Пусть 1 и 2 — значения двузначной логики; 1, 2, 3 и 4 — значения четырехзначной логики; C^2 и N^2 — функции двузначной логики; C^4 и N^4 — функции четырехзначной логики. Переход от значений двузначной логики к значениям четырехзначной осуществляется по правилу: пара числе 11 заменяется на 1, пара 12 — на 2, пара 21 — на 3, пара 22 — на 4. Функции C^4 и N^4 определяются так:

1) $[C^4(a^1, a^2)(b^1, b^2)] = [C^2a^1b^1], \quad [C^2a^2b^2]$;
2) $[N^4(a, b)] = [N^2a], \quad [N^2b]$.

Если, например, $[a^1] = 1$, $[a^2] = 2$, $[b^1] = 2$ и $[b^2] = 1$, то $[C^2a^1b^1] = 2$ и $[C^2a^2b^2] = 1$. Справа от знака равенства получаем пару чисел 21, т. е. значение 3 в четырехзначной логике. Первый аргумент C^4 имеет значение 2; на месте первого аргумента в определении C^4 стоит (a^1, a^2); поскольку $[a^1] = 1$ и $[a^2] = 2$, имеем пару чисел 12,

которой соответствует значение 2. Второй аргумент (рассуждая аналогично) имеет значение 3. Таким образом, если $[a] = 2$ и $[b] = 3$, то $[C^4ab] = 3$. Подобным образом устанавливается значение для всех прочих комбинаций значений a и b. Аналогично — для N^4. Этот способ построения многозначной системы, называемый умножением матриц, был предложен, как утверждается в [71], Яськовским. Он легко обобщается как способ построения 2^n-значных логик, где $n \geqslant 2$.

Матрицы C^4 и N^4 имеют вид:

x	Nx
1	4
2	3
3	2
4	1

Cxy	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

Тавтологиями являются формулы, всегда принимающие значение 1. В системе $C^4 - N^4$ все тавтологии двузначной логики точно так же являются тавтологиями.

Лукасевичем и Тарским [42] была впервые в истории логики описана бесконечно-пропозициональная логика (1930 г.) с основными функциями C и N. Определяются они так же, как выше. Истинностные значения суть действительные числа в интервале от 0 до 1 включительно. Например, если $[a] = 0{,}35$ и $[b] = 0{,}571$, то $[Cab] = \min(1, 1 - 0{,}35 + 0{,}571) = 1$, $[Na] = 0{,}65$, $[Nb] = 0{,}429$.

Тавтологии принимают значение 1, которое соответствует истине. Значение 0 соответствует ложности.

Лукасевич предположил, что все тавтологии бесконечнозначной логики $C - N$ могут быть получены с помощью правил подстановки и modus ponens из следующих аксиом:

1) $CxCyx$;
2) $CCxyCCyzCxz$;
3) $CAxyAyx$;
4) $ACxyCyx$;
5) $CCNxNyCyx$.

При этом Axy есть сокращение для $CCxyy$. Это утверждение Лукасевича в 1935 г. доказал Вайсберг [66], [67]. Позднее независимо от него другое доказательство дали Роуз и Россер [57], затем Ханг [19]. Мередит [47] доказал зависимость аксиомы 4 от остальных, а Тюркетт вывел ее только из аксиом 1, 2 и 3 [65].

Бесконечная (как и трехзначная) логика Лукасевича есть фрагмент двузначной в том смысле, что все их тавтологии суть тавтологии

в последней, а все доказуемые в соответствующих исчислениях формулы доказуемы в классической пропозициональной логике (но, как мы уже видели, не всегда наоборот). В трехзначной логике имеются формулы, не имеющие силы в бесконечнозначной.

Лукасевич связал идею бесконечнозначной логики с исчислением вероятностей, рассматривая истинностные значения как степени вероятности высказываний.

§ 4. Многозначная логика Поста

Независимо от Лукасевича построил и вскоре после него опубликовал свою многозначную систему Пост [48]. В отличие от Лукасевича Пост исходил из чисто формальных соображений. Он допустил, что пропозициональные переменные и содержащие их формулы принимают значения из множества данных n значений ($n \geqslant 2$) и рассматривал n-значные пропозициональные функции. Очевидно, такой подход стал возможен лишь при условии, что в логике уже привыкли отвлекаться от смысла выражений «истинно» и «ложно», заменяя их любыми удобными знаками и сосредоточивая внимание на чисто логических отношениях, и вместо высказываний брать любые аргументы и функции, определенные этими отношениями.

Было бы не совсем точно утверждать (как это сделано в [3]) будто Пост не интересовался вопросом интерпретации многозначности высказываний. Он полагал, что многозначные высказывания можно интерпретировать посредством двузначных следующим образом. Высказывание X, принимающее n значений истинности, можно рассматривать как класс, состоящий из $n-1$ двузначных высказываний $X^1, \ldots, X^{n-1}$. Если все высказывания этого класса истинны, то X имеет значение истинности, допустим, t_1; если все $X^1, \ldots, X^{n-1}$ истинны, кроме одного, то X имеет значение t_2; ...; если все $X^1, \ldots, X^{n-1}$ ложны, то X имеет значение t_n. Завирский [70] усматривает в этой интерпретации связь с понятием вероятности.

Система Поста имеет такой вид (мы ее примем в принятой здесь символике):

1) значения истинности суть $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$, где n — конечное число;

2) основные функции суть циклическое отрицание и дизъюнкция, определяемые равенствами

а) $[N^p a] = [a] + 1$ при $[a] \leqslant n-1$,
$[N^p a] = 1$ при $[a] = n$;

б) $[Aab] = \min([a], [b])$

(эта система функционально полна, при $n = 2$ функции N^p и A суть обычные двузначные функции);

3) тавтологией является формула, которая всегда (при любых комбинациях значений входящих в нее переменных) принимает такое значение i, что $1 \leqslant i \leqslant s$, где $1 \leqslant s < n - 1$; значения $1, \ldots, s$ называются выделенными или отмеченными; возможно, что $s > 2$.

Через N^p и A определяются прочие функции, в том числе — конъюнкция и отрицание в смысле Лукасевича. Последнее называют симметричным отрицанием. Обозначим его через N^{L}. Для них имеют силу равенства:

$$[N^{\text{L}}a] = n - [a] + 1,$$
$$[Kab] = \max([a], [b]).$$

Посредством таблицы циклическое отрицание Поста определяется так:

a	$N^p a$
1	2
2	3
...	...
$n-1$	n
n	1

Интерес здесь представляет то, что многозначные функции Поста (и Лукасевича), суть обобщения двузначных. Причем обобщение это может идти по разным линиям. Так, N^p и N^{L} суть обобщения двузначного N: при $n = 2$ они оба совпадают с ним. Но для первого имеет силу равенство $[nN^p a] = [a]$, где n перед N указывает на то, что перед a записано n раз N. Для второго же $[N^{\text{L}}N^{\text{L}}a] = [a]$.

Пост разработал метод формализации (аксиоматизации) функционально полной n-значной пропозициональной логики с произвольным числом отмеченных значений. Заметим, что проблема формализации функционально неполной пропозициональной логики была решена позднее (Слупецкий, Вайсберг).

§ 5. Возникновение многозначной концепции логики

Говоря о становлении многозначной логики, мы имеем в виду не только появление ее формального аппарата, но и возникновение многозначной концепции логики. Исторически первой попыткой такого рода можно считать попытку самого Лукасевича построить модальную логику на основе многозначной пропозициональной логики.

Попытка осуществить это на основе трехзначной логики, отвергающей двузначную (и соответствующее ей классическое пропозициональное исчисление) оказалась несостоятельной, и Лукасевич позднее ее отверг и обратился к четырехзначной логике, которая сохранила классическое исчисление.

Вопрос о возникновении многозначной концепции логики теснейшим образом связан с вопросом о возникновении интуиционистского направления в логике. Конечно, критика закона «исключенного третьего» и построение логического исчисления, в котором этот закон (или его эквивалент) недоказуем, сами по себе еще не означали перехода к многозначной логике в смысле построения ее формального аппарата. Однако это направление в логике оказалось тесно связанным с идеями многозначной логики, ибо критика закона исключенного третьего затрагивала самую основу двузначной логики — принцип двузначности высказываний. Кроме того, здесь была предпринята первая (после Лукасевича) попытка использования самого аппарата многозначной логики для обоснования намерений этого направления.

Исходным пунктом послужило следующее утверждение Брауэра [16], [17]: безграничное действие закона исключенного третьего имеет силу только для той части математики (и, значит, для той части естествознания), которая развертывается внутри некоторой определенной конечной математической системы (на которую проецируется определенная конечная математическая система).

В одной из философских статей [31] Гейтинг приводит следующий пример. Возьмем утверждение: всякое целое число, большее единицы, есть либо простое, либо сумма двух простых, либо сумма трех простых. Неизвестно, так это или нет, хотя во всех рассмотренных случаях (а их — конечное число) это так. Назовем исключительным число, которое не удовлетворяет приведенному утверждению. Существует такое число или нет? Мы не можем указать такое число и не можем вывести противоречие из допущения его существования. Отсюда делается вывод о неприменимости закона исключенного третьего в таких случаях (как увидим ниже, этот закон не объявляется ложным, просто он не принимается в качестве закона в рассуждениях, имеющих дело с такого рода фактами).

В двузначной логике из закона исключенного третьего выводится равнозначность двойного отрицания x и x, то есть выводится $KCNNxxCxNNx$ (и наоборот). Брауэр предложил ослабить этот закон, принимая только одну его часть, $CxNNx$, и исключая другую, $CNNxx$ (исключая, по его терминологии, принцип, согласно которому из абсурдности x следует x). Гейтинг [30], [32] разработал логическую систему, исходя из этого основания.

Трехзначная пропозициональная логика Гейтинга имеет такой вид. Значения истинности суть 1, $\frac{1}{2}$ и 0 (мы принимаем эти обозначения для того, чтобы легче было сравнить с логикой Лукасевича). Тавтология принимает значение 1. Основные функции суть отрицание N и импликация C, которые определяются так:

1) $[Cab] = 1$, если $[a] \leqslant [b]$,
$[Cab] = [b]$, если $[a] > [b]$;

2) если $[a] = 1$ или $\frac{1}{2}$, то $[Na] = 0$,
если $[a] = 0$, то $[Na] = 1$.

Конъюнкция и дизъюнкция определяются как у Лукасевича.

Легко видеть, что функции C и N у Гейтинга отличны от таковых у Лукасевича. Первые обозначим C^{H} и N^{H}, вторые — C^{L} и N^{L}. Из определений видно, что не всегда $[C^{\mathrm{H}}ab] = [C^{\mathrm{L}}ab]$ и не всегда $[N^{\mathrm{H}}a] = [N^{\mathrm{L}}a]$.

Посредством таблиц функции C^{H} и N^{H} определяются так:

a	N_a^{H}
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

C_{ab}^{H}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

Импликация Гейтинга отличается от импликации Лукасевича только значением для комбинации $[a] = \frac{1}{2}$ и $[b] = 0$, а отрицание — значением для $[a] = \frac{1}{2}$. Но эта «мелочь» имеет весьма существенные последствия.

Из определений следует, что $CNNaa$ и $AaNa$ не являются тавтологиями в трехзначной логике Гейтинга, поскольку при $[a] = \frac{1}{2}$ получим $[CNNaa] = \frac{1}{2}$ и $[AaNa] = \frac{1}{2}$. Формула $CaNNa$ остается тавтологией (так что пожелание Брауэра выполнено). Тавтологией является также $AAaNaNNa$, которую можно рассматривать как своеобразное обобщение закона исключенного третьего (в силу того, что NNa не равнозначно a, этот дизъюнктивный член отбросить нельзя).

Формулы $NAaNa$ и $NCNNaa$ тавтологиями в логике Гейтинга не являются. Они здесь вообще никогда не имеют значения 1, т. е. невыполнимы. Это достаточно показательный пример (как и в случае с $NAaNa$ и $NNKaNa$ в логике Лукасевича) того, что отрицание какого-либо логического закона ни в коем случае нельзя понимать

как признание (утверждение) отрицания этого закона. Многозначная логика не вступает в противоречие с двузначной. Она, прежде всего, есть обобщение последней: исключение «дополнительных» (сравнительно со значениями, соответствующими истинности и ложности) значений истинности так или иначе ведет к тому, что из многозначной получается двузначная логика.

Гейтинг построил пропозициональное исчисление, получившее название интуиционистского. Пропозициональные исчисления, эквивалентные гейтинговскому, построили Лукасевич, Генцен [23] и другие авторы. Независимо от Гейтинга формальный аппарат для логики, не опирающийся на закон исключенного третьего, наметил Колмогоров [5], [37], а Гливенко [24], [25] развил идеи Колмогорова, построив пропозициональное исчисление, которое получило название конструктивистского [8]. Оно эквивалентно гейтинговскому исчислению.

Интуитивисткое пропозициональное исчисление связано с трехзначным матричным построением Гейтинга следующим образом: все доказываемые в первом формулы суть тавтологии во втором, так что если некоторая формула не является тавтологией в трехзначной логике Гейтинга, то она недоказуема в интуиционистском исчислении. Формулы $CNNaa$, $AaNa$ и т. п. такими тавтологиями не являются. Значит, они недоказуемы в рассматриваемом исчислении. Таким образом, многозначная логика здесь явилась удобным средством обоснования того, что формулы, которые желательно исключить из правил логики, не попадут в их число каким-то неявным способом.

Интуиционистское пропозициональное исчисление, однако, не эквивалентно трехзначной логике Гейтинга. Например, формулы

$$ACabCba \quad \text{и} \quad CCNNaaAaNa$$

недоказуемы в этом исчислении, хотя они суть тавтологии в трехзначной логике Гейтинга. Как показал Гёдель [26], невозможно построить многозначную логику с конечным числом значений истинности, которая была бы эквивалентна интуиционистскому пропозициональному исчислению.

Глава 3

Аппарат многозначной логики

§ 1. Аппарат многозначной логики

На фоне бурного развития других разделов и направлений современной (математической) логики прогресс в области многозначной логики выглядит довольно спокойным, неторопливым. Это объясняется целым рядом причин, из которых здесь достаточно упомянуть следующие: 1) сама идея многозначности высказываний многим лицам, имеющим какое-то влияние на организацию и направление логических исследований, до сих пор кажется чем-то еретическим, надуманным; 2) такой мощный стимул развития логики, как потребности современной техники в области многозначной логики действуют пока еще слабо; 3) преимущества многозначной логики в решении проблем логики пока еще не обнаружили себя достаточно широко и убедительно, а сама разработка аппарата многозначной логики есть дело гораздо более сложное сравнительно с аналогичными темами двузначной логики.

Однако со времени опубликования работ Лукасевича и Поста в многозначной логике накопилось довольно большое число работ, содержащих серьезные результаты. Выше мы уже упоминали работы Вайсберга, Слупецкого, Яськовского, Гёделя, Россера, Тюркетта, Мередита, Роуза, Ханга. В 1952 г. была опубликована книга Россера и Тюркетта [53]. Ни в какой мере не претендуя на библиографическую полноту, назовем еще работы Россера и Тюркетта [54–57], [64], [65], Вебба [68], [69], Бочвара [1], [2], Яблонского [11], Роуза [57], Ханга [18], [19], Беллуца [13], [14], Рутледжа [58], Джоба [34], Скарпеллини [59], Гаврилова [3]. В этой главе мы охарактеризуем аппарат многозначной логики в самой общей форме. Этот аппарат охватывает пропозициональную логику и логику предикатов. По нашему мнению, последнюю можно отнести также к сфере многозначной концепции логики. Но это говорит лишь о том, что наше разделение на аппарат и концепцию не строго и безусловно.

§ 2. Гипотезы многозначности

Обратимся прежде всего к многозначной пропозициональной логике. В ее основе лежат, как уже отмечалось, гипотезы многозначности

высказываний. Именно гипотезы, а не одна какая-то гипотеза, ибо здесь возможны и на самом деле имеют место вариации.

Всякая гипотеза многозначности включает в себя: 1) указание (задание) множества значений истинности, которые принимают пропозициональные формулы; 2) признание того, что одна и та же формула не может сразу принимать два различных значения. Обычно вторая часть гипотезы явно не формулируется, поскольку она содержится в самом способе определения пропозициональных функций. Значения истинности, удовлетворяющие второму условию, будем называть основными. Ниже мы увидим, что возможны значения истинности, которые этому условию не удовлетворяют.

Гипотезы многозначности разделяются на конечные и бесконечные. Первые, в свою очередь, разделяются на такие виды: 1) допускается определенное множество значений истинности (трехзначные, четырехзначные и т. п.) логики; помимо приведенных выше примеров можно указать на работы [1], [11], [36], [52], [21]; 2) допускается любое конечное множество значений (например, работы [11], [48], [53], [57], [68]); 3) допускается класс конечных множеств значений (например, работы [28], [71]). Примером гипотезы третьего типа является допущение 2^n значений, где $n \geqslant 1$. Бесконечные гипотезы разделяются на счетно-бесконечные и несчетнобесконечные (континуальные). Пример для первых — множество значений состоит из 0, 1 и бесконечного множества дробей $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Пример для вторых — множество значений есть множество действительных чисел на отрезке $[0, 1]$.

§ 3. Функции

Основные пропозициональные функции суть функции, которые определяются так: для каждой комбинации значений переменных указывается значение, которое принимает формула, содержащая эти переменные, и знак определенной функции. Так что в определениях основных функций фигурируют значения истинности и выражения обычного языка или некоторого эксплицирующего их искусственного языка. По отношению к многозначным функциям эту роль могут выполнять константы классической логики. Такого рода определения можно назвать семантическими.

Производными пропозициональными функциями являются такие, которые определяются как сокращения для формул, содержащих знаки пропозициональных переменных и основных функций. Если a есть сокращение для b, то в a входят: 1) все переменные, входящие в b, и только эти переменные; 2) знак вновь вводимой производной функции. Такого рода определения можно назвать синтаксическими. В синтаксических определениях значения истинности не фигурируют. Они

имеют либо вид $[a] = [b]$, либо вид «a есть сокращение для b», где выражение «есть сокращение» обычно заменяется каким-либо символом. Для каждой производной функции может быть получено и семантическое определение.

Семантические определения суть матрицы. Они могут быть заданы разными способами: посредством таблиц, математических равенств и неравенств, предложений «Если X, то Y» (где в X перечисляются значения переменных, а в Y указывается значение функции). Табличный метод получил широкое распространение в логике. Он имеет достоинство наглядности, но громоздок и не всегда применим.

Основные функции являются независимыми, если и только если среди них нет такой, которая может быть синтаксически определена через другие. Число основных независимых функций может быть конечным и бесконечным. Пример для последнего случая — класс функций $Q^i x$, определяемых так $[Q^i x] = i$, если $[x] = i$, и $[Q^i x] = 0$ в остальных случаях. Если $0 \leqslant i \leqslant 1$, то класс таких функций бесконечен.

Пропозициональные многозначные функции можно разбить на две группы другим образом: 1) простые функции; они определяются так, что для каждой комбинации значений аргументов указывается одно и только одно значение функции; 2) суммарные функции; они определяются так, что по крайней мере для одной комбинации значений аргументов указывается, что функция может принимать любое одно из данных двух или более значений. Пример суммарной функции: если $[x] \leqslant s$, то $[Hx] > s$, и если $[x] > s$, то $[Hs] \leqslant s$, где $1 \leqslant s \leqslant n$. При $n = 4$ и $s = 2$ в случае $[x] = 1$ функция Hx может принимать любое из значений 3 и 4. Если функция суммарная, то имеется по крайней мере две различные простые функции, каждая из которых удовлетворяет ее семантическому определению. С помощью суммарных функций можно строить синтаксические определения простых, но с помощью одних только простых функций синтаксически определить суммарную функцию невозможно, что очевидно.

Если в определение некоторой (простой или суммарной) функции входят какие-либо варьируемые знаки, то семантическое определение этой функции фактически есть определение класса функций. Так, приведенное выше определение $Q^i x$ есть определение класса функций, поскольку в зависимости от i получаются различные функции. Число элементов этого класса равно числу значений истинности. Аналогично в зависимости от различных n и s получаются определения различных суммарных функций, являющихся элементами класса функций Hx.

Вопрос о выборе основных и производных функций, с помощью которых развертывается система утверждений, образующих данную логическую систему, вообще говоря, есть дело вкуса, случая и формальных удобств. Однако в многозначной логике сложилась традиция обычно

выбирать функции, аналогичные двузначным импликации, конъюнкции, дизъюнкции и отрицанию, а также такие функции, с помощью которых можно определить эти привычные функции или доказать какие-либо касающиеся их теоремы. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

§ 4. Функциональная полнота

Система основных функций данной (с заданным множеством значений, которые принимают аргументы и функции) многозначной пропозициональной системы является функционально полной, если и только если любая функция может быть синтаксически определена через функции этой системы. Примеры функционально полных и неполных систем мы уже приводили. Заметим лишь, что n-значная (с любым конечным числом значений) логика, основывающаяся лишь на одной функции Вебба [68], [69] является функционально полной (доказательство см., например, в [11]).

Решение проблем функциональной полноты дает возможность свести изучение функций некоторого построения с заданным числом значений истинности к изучению свойств основных функций. Но это не означает, что функционально неполные построения не играют никакой роли и не представляют интереса. Они могут использоваться для исследования определенных классов формул и решения отдельных задач.

Задачи многозначной логики в отношении проблемы полноты не сводятся к выяснению того, полна или нет та или иная система основных функций. Здесь разрабатывается более сложная система утверждений, можно сказать — теория критериев полноты (см., например, [11], [34], [62]).

§ 5. Тавтологии

Множество значений истинности разбивается на два непустые подмножества. Значения, принадлежащие к одному из них, называются отмеченными (утверждающими), а принадлежащие к другому — неотмеченными (отрицающими). Тавтологией (общезначимой формулой) называется формула, которая при любых комбинациях значений входящих в них переменных принимает отмеченное значение.

В отличие от двузначной логики в многозначной логике число отмеченных значений может быть больше одного. Так, в системах Лукасевича отмеченным является только одно значение, а в системе Поста — любое число значений, меньшее общего числа значений. Это существенным образом сказывается на определении класса тавтологий.

Если допустить, например, что в трехзначной логике Лукасевича значение $\frac{1}{2}$ точно так же есть отмеченное значение, то формулы $AaNa$ и $NKaNa$ окажутся тавтологиями. Аналогично в трехзначной системе Гейтинга становится тавтологией формула $CNNaa$, если включить значение $\frac{1}{2}$ в число отмеченных.

Формула, которая по крайней мере для одной комбинации значений переменных принимает отмеченное значение, называется выполнимой. Формула является невыполнимой (противоречием), если для всех комбинаций значений переменных принимает неотмеченное значение. Число последних точно так же может быть равно двум или более. Как видим, все эти понятия суть обобщения соответствующих понятий двузначной логики.

В двузначной логике (и в классическом исчислении соответственно) вводятся понятия нормальных (или канонических) форм — дизъюнктивных, конъюнктивных, импликативных (см. [7], [33], [36]). Нормальной формой данной формулы называется равнозначная ей формула, удовлетворяющая некоторым стандартным условиям. Приведение формул к нормальной форме дает способ по виду формулы (без проверки в соответствии с семантическими определениями или без доказательства из аксиом) судить о том, является она тавтологией (или, соответственно, доказуемой формулой) или нет. Такого рода исследования ведутся и в области многозначной логики (см., например, [34]).

Выбор гипотезы многозначности, основных функций и отмеченных значений определяет тип многозначной логической системы.

§ 6. Аксиоматизация

Аксиоматизацией многозначной пропозициональной логики называют построение аксиоматической системы (пропозиционального исчисления), которая удовлетворяет следующим условиям: 1) все тавтологии данной многозначной логики выводятся (доказуемы) в данном исчислении; 2) все тавтологии выводятся в данном исчислении, все доказуемые в этом исчислении формулы суть тавтологии данной многозначной логики.

Как и в двузначной логике, здесь в первом случае исчисление называют дедуктивно полным относительно данного многозначного матричного построения, а во втором — дедуктивно эквивалентным. Иногда здесь употребляют термин «формализация», что делает этот термин еще более неопределенным. Вместо системы аксиом может быть взята система аксиомных схем Но это означает лишь то, что нет правила подстановки, а вместо переменных фигурируют любые формулы (т. е. правило подстановки не формулируется явным образом).

Проблема аксиоматизации довольно основательно разработана в многозначной логике. Мы имеем в виду работы Лукасевича, Поста, Вайсберга, Слупецкого, Россера, Тюркетта и ряд других авторов [13], [14], [19], [20], [22], [26], [29], [34], [42], [48], [50], [53–59], [64–67]. Она решена для функционально полных и неполных систем, для конечнозначных и бесконечнозначных, для одного отмеченного значения и для произвольного числа отмеченных значений. Подробно этот вопрос рассмотрен в книге Россера и Тюркетта [53]. Для каждой многозначной системы может быть найдено хотя бы одно дедуктивно эквивалентное аксиоматическое построение, но не всегда наоборот [53].

Примеры аксиоматизации мы уже приводили. Приведем еще дедуктивно полную аксиоматическую систему для n-значной логики (значения истинности суть $1, 2, \ldots, n$; $n \geqslant 2$) с произвольным числом отмеченных значений (отмеченные значения $1, \ldots, s$, где $1 \leqslant s < n$). Эта система изложена в [56]. Правило вывода в ней — modus ponens для C. Функции C, A и K определены семантически как у Лукасевича. Функция I^k семантически определяется так:

$$[I^k a] = 1, \quad \text{если} \quad [a] = k,$$

$$[I^k a] = n, \quad \text{если} \quad [a] \neq k.$$

Формула $\overset{k}{\Gamma}_i a^i b$ определяется так:

$$\text{если} \quad [\overset{k}{\Gamma}_i a^i b] = [b], \quad \text{то} \quad k < i,$$

$$\text{если} \quad [\overset{k}{\Gamma}_i a^i b] = [Ca^k \overset{k-1}{\Gamma}_i a^i b], \quad \text{то} \quad k \geqslant i.$$

Например, $[\overset{5}{\Gamma}_3 a^3 b] = [Ca^5 Ca^4 Ca^3 b]$. Аксиомные схемы системы имеют такой вид:

1) $CbCab$;
2) $CCCabaa$;
3) $CCabCCbcCac$;
4) $\overset{n}{\Gamma}_1 CI^1 abb$;
5) $CI^1 aa$;
6) $\overset{m}{\Gamma}_1 I^k a^r I^l F^i(a^1, \ldots, a^m)$,

где $1 \leqslant i \leqslant s$, $m \geqslant 1$, $k = [a^r]$, $l = [F^j(a^1, \ldots, a^m)]$, $1 \leqslant r \leqslant m$, $F^j(a^1, \ldots, a^m)$ суть основные функции ($j \geqslant 1$), такие, что через них синтаксически определяются C и I^k.

Аксиоматические построения сами по себе не являются двузначными или многозначными. Возьмем, например, систему аксиом Тарского—Бернайса. Ее можно рассматривать как аксиоматизацию двузначной логики с основной функцией C. Но можно рассматривать и как аксиоматизацию четырехзначной логики с основной функцией C, матрица которой получается путем умножения двузначных матриц по методу Яськовского (это показано в работе Расёвой [50]). Так что то или иное аксиоматическое построение может быть расценено как построение в области многозначной логики лишь в том случае, если указано многозначное матричное построение, аксиоматизацией которого оно является, — если дана его многозначная семантическая интерпретация. В ряде случаев на возможность такой интерпретации есть указания в самой аксиоматике, как это сделано в приведенных выше системах Россера и Тюркетта.

Дедуктивную полноту аксиоматического построения в рассмотренном выше смысле называют также семантической полнотой в отличие от полноты синтаксической. Последняя имеет место тогда, когда присоединение к аксиомам новой формулы, независимой от них, ведет к противоречию или к тому, что любая формула становится выводимой. Вопрос о синтаксической полноте исчислений в области многозначной логики специально еще не исследован.

§ 7. Логика предикатов

В современной логике до возникновения многозначной логики и независимо от нее после ее возникновения сложилась определенная проблематика, ставшая традиционной. Эта проблематика, как мы видели, была перенесена в область многозначной пропозициональной логики. Затем в многозначную логику была перенесена и проблематика логики предикатов. Это сделано в работах Россера и Тюркетта, Мостовского [46], Ханга [14], Скарпеллини [59], Беллуца [13], Рутледжа [58], Хей [29] и других авторов. Причем, пока эта проблематика в многозначной логике имеет сугубо формальный характер. Вопрос о возможности таких интерпретаций многозначной логики предикатов, которая хотя бы в некоторой мере приближалась к интуитивной ясности, пока еще только ставится как вопрос правомерный и интересный. Идеи многозначной логики охватили пока только логику предикатов первой ступени. Получены некоторые интересные результаты, касающиеся не только n-значной, но и бесконечнозначной логики. Установлено, например, что нет полной аксиоматизации с конечным или счетным множеством аксиом (аксиомных схем) и конечным или счетным множеством правил вывода для бесконечнозначной логики

предикатов [53], невозможна полная аксиоматизация бесконечнозначной логики предикатов Лукасевича [59], возможно дедуктивно полное бесконечнозначное исчисление одноместных предикатов [58] и т. д.

Всякое исчисление предикатов строится путем присоединения к некоторому пропозициональному исчислению дополнительных элементов алфавита (индивидные переменные, переменные предикаты, константы обоих видов, кванторы), добавлений в определение формулы, аксиом (или аксиомных схем) и правил вывода, содержащих индивидные переменные, кванторы и т. д. В качестве пропозиционального исчисления могут быть взяты классическое или интуиционистское (или конструктивистское) пропозициональное исчисление, системы строгой [45] или сильной [12] импликации и другие логические системы.

Классическое исчисление предикатов строится путем присоединения к классическому пропозициональному исчислению следующих дополнений (мы ограничимся исчислением первого порядка). Дополнение к обозначениям (к алфавиту):

1) $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^1, \alpha^2, \ldots$ — индивидные переменные;
2) $P, P^1, P^2, \ldots$ — предикаты;
3) $\exists, \forall$ — кванторы.

Дополнение к определению формулы:

1) если $\alpha, \alpha^1, \ldots, \alpha^m$ $(m \geqslant 2)$ суть индивидные переменные, а P есть предикат, то $P(\alpha)$ и $P(\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$ суть предикатные формулы;
2) предикатные формулы суть формулы;
3) пропозициональные формулы суть формулы;
4) если X есть формула, то $(\exists \alpha)X$ и $(\forall \alpha)X$ суть формулы.

Индивидная переменная α входит в X в следующих случаях:

1) α входит в $P(\alpha)$;
2) α^i входит в $P(\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$, где $i = 1, \ldots, m$;
3) если α входит в Y, а Y входит в X, то α входит в X.

Вхождение α в X называется связанным, если и только если α входит в Y и $(\exists \alpha)Y$ или $(\forall \alpha)Y$ входит в X, и свободным в остальных случаях.

Дополнение к системе аксиом [7]:

1) $CP(\alpha)(\exists \beta)P(\beta)$;
2) $C(\forall \alpha)P(\alpha)P(\beta)$.

Дополнение к правилам вывода [7]:

1) правила подстановки для свободных и связанных индивидных переменных;
2) правила введения кванторов.

Интуиционистское исчисление предикатов получится, если эти же дополнения присоединить к интуиционистскому пропозициональному исчислению [32].

Нас здесь интересует прежде всего такой вопрос: в каком смысле классическое исчисление предикатов является двузначным, что такое двузначная логика предикатов?

Классическое исчисление предикатов расценивается как двузначное не само по себе, а лишь при условии его двузначной семантической интерпретации. Смысл ее в отношении пропозиционального исчисления мы рассмотрели. Остановимся здесь лишь на соответствующей интерпретации указанных выше дополнений.

Прежде всего задается область U значений для индивидных переменных (каким-то образом указывается множество индивидов, которые будут считаться значениями индивидных переменных). Эта область может состоять из одного, двух и т. д. индивидов: она может быть и бесконечной. Будем индивиды (т. е. значения индивидных переменных) записывать символами α с нижними индексами.

Допускается, что для каждого предиката P множество индивидов U может быть разбито на два непересекающиеся подмножества U^t и U^f такие, что:

1) если $\alpha_i \in U^t$, то $[P(\alpha)] = 1$;

2) если $\alpha_i \in U^f$, то $[P(\alpha)] = 2$

(знак $\in$ есть знак включения элемента в множество). Аналогично для пар, троек и т. д. (для любых энок) индивидов. Пусть U_n есть множество всех энок ($n \geqslant 1$), составленных из элементов U. Оно разбивается на два подмножества U_n^t и U_n^f такие, что

1) если $\{\alpha_1, \ldots, a_n\} \in U_n^t$, то $[P(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)] = 1$;

2) если $\{\alpha_1, \ldots, a_n\} \in U_n^f$, то $[P(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)] = 2$.

Примем теперь определения, устанавливающие условия приписывания формулам с кванторами истинностных значений (в X при этом нет других свободных индивидных переменных, кроме α; так что значение X зависит только от значения α):

1) $[(\forall \alpha)X] = 1$, если и только если $[X] = 1$ для любых значений индивидной переменной α;

2) $[(\exists \alpha)X] = 1$, если и только если $[X] = 1$ по крайней мере для одного значения индивидной переменной α.

Понятие общезначимой формулы (тавтологии) можно распространить на любые формулы, включая формулы с кванторами:

1) формула X является общезначимой в U, если и только если для любых комбинаций значений индивидных переменных из этой области

и любых комбинаций значений пропозициональных переменных, входящих в X, $[X] = 1$;

2) формула X общезначима, если она общезначима в любой области индивидов.

Так как классическое исчисление предикатов (первой ступени) дедуктивно полно относительно такой двузначной интерпретации, то (и лишь постольку) его называют иногда двузначным. Сама эта интерпретация называется двузначной логикой предикатов.

Но аналогичным образом мы можем поступить и в многозначной логике, изменив немного ход рассуждения. Сохраним все приведенные выше дополнения, кроме аксиом и правил вывода. Пусть формулы принимают значения истинности из множества значений V. Число его элементов m может быть больше двух. Пусть индивидные переменные принимают значения из множества индивидов U. Последнее разбивается на m непересекающихся подмножеств энок ($n \geqslant 1$) индивидов (выбранных из элементов U) таких, что:

1) если $\alpha_i \in U_1^j$, то $[P(\alpha)] = j$;

2) если $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in U_n^j$, то $[P(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)] = j$,

где $i \in V$.

Если значения истинности суть $1, 2, \ldots, m$, то условия приписывания формулам с кванторами значений истинности примут такой вид:

1) $(\forall \alpha)X$ имеет наименьшее из возможных значений истинности X;

2) $(\exists \alpha)X$ имеет наибольшее из возможных значений истинности X.

Понятие общезначимой формулы можно теперь определять так:

1) формула X общезначима в области U, если и только если для любых комбинаций значений индивидных переменных из этой области и любых комбинаций значений пропозициональных переменных, входящих в нее, она принимает отмеченное значение истинности;

2) формула X общезначима, если она общезначима в любой области индивидов.

Теперь можно ставить вопрос о том, дедуктивно полно или нет некоторое исчисление предикатов относительно такого рода многозначной интерпретации, а также ставить задачу отыскания аксиоматизации для таких многозначных построений. Мы привели лишь самую простую иллюстрацию для связи многозначной логики с исчислением предикатов. Здесь возможны вариации, зависящие от типа многозначной пропозициональной логики, от типа области индивидов, от типа предикатов.

Приведем в заключение пример аксиоматизации многозначной логики предикатов, базирующейся на многозначной системе Лукасевича. Это исчисление изложено в [29].

Аксиомные схемы суть:

1) $CXCYX$;

2) $CCXYCCYZCXZ$;

3) $CAXYAYX$;

4) $CCNXNYCYX$;

5) $CK(\exists\alpha)X(\exists\alpha)X(\exists\alpha)KXX$;

6) $CX(\exists\alpha)Y$,

где X есть результат подстановки β на место всех свободных вхождений α в Y, и в Y нет такого вхождения $(\exists\beta)Z$, в которое входит α;

7) $C(\exists\alpha)X(\exists\beta)Y$,

где Y (X) есть результат подстановки β (α) на место всех свободных вхождений α (β) в X (в Y);

8) $C(\forall\alpha)CXYC(\exists\alpha)XY$,

где α не свободна в Y;

9) $CCX(\exists\alpha)Y(\exists\alpha)CXY$,

где α не свободна в X.

Правила вывода — modus ponens и правило обобщения (из X получается $(\forall\alpha)X$).

Глава 4

Двузначная и многозначная логика

§ 1. Принципы двузначности и многозначности

Прежде всего надо различать принцип двузначности, который состоит в допущении двух и только двух взаимоисключающих значений истинности высказываний, и утверждение «X или не-X», где X есть любое высказывание. На уровне только двузначной логики это различение либо вообще не осуществляется, либо считается несущественным, поскольку эти утверждения здесь так или иначе совпадают. На уровне же многозначной логики различие их выступает с полной очевидностью, — один из примеров того, что переход к многозначной логике дает возможность для более тонкого анализа в самой двузначной логике.

В самом деле, принцип многозначности состоит в допущении того, что число взаимоисключающих значений истинности может быть более двух. Такое допущение уже нельзя записать утверждением, подобным «X или не-X». Теперь требуется утверждение «$[X] = i^1$ или $[X] = i^2$ или...», где $[X] = i^i$ читается как «X имеет значение истинности i^i». И при этом для каждого значения сохраняет силу утверждение «$[X] = i^i$ или $[X] \neq i^i$» или «X имеет значение i^i или X не имеет значения i^i». Обозначив «X имеет значение i^i» через Y, получим утверждение «Y или не-Y», т. е. частный случай того утверждения, которое приведено выше в начале параграфа.

Возвращаясь к двузначной логике, мы принцип двузначности должны записать в форме «$[X] = i^1$ или $[X] = i^2$». И при этом предполагается, что «$[X] = i^1$ или $[X] \neq i^1$» и «$[X] = i^2$ или $[X] \neq i^2$», т. е. предполагаются какие-то законы логики, отличные от самого этого принципа. В этом нет ничего парадоксального: построение двузначной и многозначной логики есть решение содержательной задачи; решение это осуществляется на языке, обладающем определенными логическими свойствами; строящиеся логические системы могут использоваться для экспликации этих свойств языка, но язык обладает этими свойствами до них и независимо от них.

Таким образом, принцип двузначности есть утверждение «Всякое высказывание либо истинно, либо ложно», но не утверждения «Всякое высказывание либо истинно, либо не является истинным» и «Всякое

высказывание либо ложно, либо не является ложным». Первое есть частное допущение в рамках логики как науки, вторые же суть частный случай действия логических правил самого языка. Первое может быть *заменено в логике другими гипотезами* (например, «Всякое высказывание либо истинно, либо ложно, либо неопределенно»), вторые же сохраняют силу при всех обстоятельства как условия построения логических теорий.

В этой главе, говоря о взаимоотношении двузначной и многозначной логики, мы будем иметь в виду исключительно взаимоотношения логических систем, построенных на основе принципов двузначности и многозначности.

Но имеется многозначное обобщение принципа двузначности: «Всякое высказывание имеет либо утверждающее (отмеченное), либо *отрицающее (неотмеченное) значение истинности*». На языке пропозициональной логики для случая n-значной системы: для любой формулы a либо $1 \leqslant [a] \leqslant s$, либо $s < [a] \leqslant n$. Это допущение вводится по аналогии с двузначным разбиением множества высказываний на два непересекающиеся подмножества в интересах точного исследования их свойств в рамках науки логики.

§ 2. Двузначные и многозначные функции

Многозначные функции по отношению к двузначным можно разделить на две группы:

1) функции, имеющие аналоги в двузначной логике;
2) функции, не имеющие таких аналогов.

Эти понятия надо уточнить, поскольку они имеют важное значение для последующих рассуждений.

Пусть 1 и 2 суть значения истинности двузначной логики, а i и k — значения многозначной логики, которые считаются соответствующими 1 и 2. Функция F^n многозначной логики есть аналог функции F^2 двузначной логики в том и только в том случае, если выполнено следующее условие: после исключения из семантического определения F^n всех значений, кроме i и k, и замены i и k соответственно на 1 и 2 получается семантическое определение F^2. Определим, например, некоторую функцию таблицей

$\frac{a}{b}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	1
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

После исключения значения $\frac{1}{2}$ и замены 0 на 2 получим таблицу двузначной функции

$\frac{a}{b}$	1	2
1	1	1
2	2	2

Функции не имеют двузначных аналогов в том случае, если после устранения всех значений, кроме i и k, и замены последних на 1 и 2 не получится семантическое определение двузначной функции. Например, если в таблице трехзначной функции

$\frac{a}{b}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	0	0

вычеркнуть значения $\frac{1}{2}$ и заменить 0 на 2, то получим таблицу

$\frac{a}{b}$	1	2
1	1	
2		2

которая не определяет никакую двузначную функцию. Все функции T_a^j такие, что $[R_a^j] = j$ $(j \neq i,\ j \neq k)$ не имеют аналогов в двузначной логике, что очевидно.

Возможны различные многозначные аналоги для одной и той же функции. Таковы, как мы видели, многозначные отрицания Лукасевича и Гейтинга для двузначного отрицания, многозначные импликации Лукасевича и Гейтинга для двузначной импликации и т. д.

Можно ввести ослабленное понятие аналоговой многозначной функции. Пусть $i^1, \ldots, i^s$ суть все отмеченные значения, а $i^{s+1}, \ldots, i^n$ — все неотмеченные. Функция F^n многозначной логики есть ослабленный аналог функции F^2 двузначной логики в том и только в том случае, если выполнено следующее условие: после замены всех $i^1, \ldots, i^s$ на 1 и замены всех $i^{s+1}, \ldots, i^n$ на 2 в семантическом определении F^n получается определение F^2. Очевидно, что не всякая многозначная функция есть ослабленный аналог двузначной. Например, функция,

определяемая таблицей (звездочкой обозначены отмеченные значения)

$\frac{a}{b}$	1	2	3	4
1*	1	2	1	4
2*	4	1	2	4
3	3	2	1	3
4	2	1	1	4

не имеет аналога в двузначной логике, поскольку после замены получим таблицу

$\frac{a}{b}$	1	1	2	2
1	1	1	1	2
1	2	1	1	2
2	2	1	1	2
2	1	1	1	2

не удовлетворяющую принципу двузначности (при $[a] = 1$ и $[b] = 2$ эта функция сразу принимает оба значения 1 и 2). А функция, определяемая таблицей

$\frac{a}{b}$	1	2	3	4
1*	1	2	3	4
2*	2	1	4	4
3	1	1	2	2
4	1	1	2	2

является ослабленным аналогом функции

$\frac{a}{b}$	1	2
1	1	2
2	1	1

Но двузначного аналога в определенном выше неослабленном смысле эта функция не имеет.

От аналогии отличается обобщение двузначных функций. При этом определение функции не меняется, вводится лишь новая гипотеза о значениях истинности. Так, имея определения $[Aab] = \min([a], [b])$, $[Kab] = \max([a], [b])$ и $[Na] = n - [a] + 1$ (где $n = 2$), мы можем осуществить обобщение функций A, K и N, приняв лишь допущение $n \geqslant 2$ (значения суть $1, 2, \ldots, n$).

Обобщающая функция не всегда есть аналог двузначной. Так, определение отрицания Поста превращается в определение двузначного отрицания при $n = 2$, поскольку при этом $[Na] = 1$ при $[a] = 2$.

Но это говорит лишь о том, что двузначное отрицание относится к классу функций, которые правильнее будет называть не отрицанием, а отрицанием Поста. Лишь при фиксированном n мы получим функцию, которую и следует сравнивать с двузначным отрицанием. Очевидно, что при $n = 3$ отрицание Поста не есть аналог двузначного, поскольку при $[a] = 1$ мы получим $[Na] = 2$, а не 3. Но если значения суть действительные числа отрезка $[0, 1]$, и мы определили $[N_a^{\text{L}}]$ как $1 - [a]$, то N_a^{L} есть аналог и в то же время обобщение двузначного отрицания.

Вопрос о выборе основных и производных функций, с помощью которых происходит развертывание логической системы в некоторую совокупность утверждений о свойствах многозначных функций, есть вопрос сугубо формальный. Однако сложилась традиция выбирать аналоги наиболее употребимых двузначных функций, — импликации, отрицания, конъюнкции и нестрогой дизъюнкции. Функции Aab и Kab обычно определяются так: если одна определяется как $\max([a], [b])$, то другая определяется как $\min([a], [b])$. Функция N обычно определяется как симметричное отрицание Лукасевича или как циклическое отрицание Поста. Употребляется также отрицание, являющееся ослабленным аналогом двузначного. Аналогично обстоит дело с импликацией. Оно вводится с таким расчетом, чтобы выполнялись следующие условия. Для ослабленного аналога: 1) если Cab и a имеют отмеченные значения, то b имеет отмеченное значение; 2) если Cab имеет отмеченное и b неотмеченное значение, то a имеет неотмеченное значение. Для неослабленного аналога: 1) если $[Cab] = i$ и $[a] = i$, то $[b] = i$; 2) если $[Cab] = i$ и $[b] \neq i$, то $[a] \neq i$ (здесь i есть значение, соответствующее отмеченному значению двузначной логики). Трехзначная импликация Лукасевича есть неослабленный аналог двузначной. Пост вводит импликацию, являющуюся ослабленным аналогом двузначной.

Этот выбор «привычных» функций говорит о том, что и многозначная логика тяготеет к тем логическим формам, которые употребляются в обычных и научных языках и экспликацией которых являются двузначные функции A, K, C, N и другие. Но в принципе возможно построение многозначной логики, все функции которой не имеют двузначных аналогов.

§ 3. Отрицание

Вопрос об отрицаниях в многозначной логике и об их отношении к двузначному отрицанию следует рассмотреть особо как вопрос чрезвычайно важный. Он важен не только потому, что отрицание фигурирует

в большинстве логических построений, но и как прекрасный пример значения многозначной логики для анализа логических форм вообще.

В двузначной логике в силу совпадения истинности с отмеченным значением, ложности с неотмеченным значением и принципа двузначности со смыслом знаков «не», «и» и «или» обычной речи все свойства отрицания выступают слитно, как одно свойство. В многозначной же логике происходит расщепление этих свойств, так что они распределяются по разным формам отрицаний, и совмещение их всех в одной форме в общем случае для произвольного числа значений истинности и отмеченных значений оказывается невозможным.

Для удобства возьмем логику со значением $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$ и отмеченными значениями $1, \ldots, s$ $(1 \leqslant s < n)$. Символы N^i будут обозначать классы унарных функций, обладающих соответствующим свойством. Перечислим основные свойства отрицаний:

1) если $[a] = 1$, то $[N^1 a] = n$;
2) если $[a] = n$, то $[N^2 a] = 1$;
3) N^3 обладает свойствами N^1 и N^2;
4) если $1 \leqslant [a] \leqslant s$, то $s < [N^4 a] \leqslant n$;
5) если $s < [a] \leqslant n$, то $1 \leqslant [N^5 a] \leqslant s$;
6) N^6 обладает свойствами N^4 и N^5;
7) $[a] = [b]$,

где по крайней мере в одной из a и b фигурирует N, а формулы a и b различаются так, что в одной из них имеется знак функции, отсутствующий в другой; например, $[NNa] = [a]$, $[Aab] = [NKNaNb]$ и т. п.; число таких N в общем случае (для любого n) не ограничено;

8) если $1 \leqslant [a] \leqslant s$, то $1 \leqslant [b] \leqslant s$, где a и b различаются как в пункте 7; при этом не обязательно $[a] = [b]$.

Симметричное отрицание Лукасевича обладает свойствами N^3, но не всегда обладает свойствами N^4 и N^5. Так, если в трехзначной логике отмеченные значения суть 1 и 2, то возможно $[a] = s$ и $[N_a^{\mathrm{L}}] = s$. Если же отмеченное значение есть лишь 1, то возможно $[a] > s$ и $[N_a^{\mathrm{L}}] > s$. Циклическое отрицание Поста не всегда обладает свойствами N^1, N^4 и N^5. В общем случае оно обладает лишь свойством N^2. Отрицание N^6 обладает тем свойством, что $1 \leqslant [AaN^6 a] \leqslant s$ и $1 \leqslant [N^6 KaN^6 a] \leqslant s$. Через него и A можно определить ослабленный аналог двузначной импликации, приняв определение $[Cab] = [AN^6 ab]$.

Очевидно, что отрицание N^6 есть ослабленный аналог двузначного отрицания, а N^3 — неослабленный. Совмещение свойств N^3 и N^6 в одном отрицании (а это возможно) будем называть сильным аналогом

двузначного отрицания. Возможность такого аналога видим из таблицы

a	Na
1	n
2	i^1
...	...
s	i^l
$s+1$	k^1
...	...
$n-1$	k^m
n	1

где $i^1, \ldots, i^l$ суть значения из множества значений $s+1, \ldots, n$, а $k^1, \ldots, k^m$ суть значения из множества значений $1, \ldots, s$. Однако из этой же таблицы видно, что в общем случае (для любого n и s) невозможно построить определение N такое, чтобы $[NNa] = [a]$ (в частности, это невозможно, если число отмеченных значений не равно числу неотмеченных). Так что полный аналог двойного отрицания в многозначной логике в общем случае невозможен.

§ 4. Двузначные и многозначные формулы

Выше, рассматривая многозначные системы Лукасевича, Гейтинга и другие, мы относительно некоторых тавтологий двузначной логики говорили, что они перестают быть тавтологиями в данной многозначной системе, а относительно некоторых других — что они остаются тавтологиями. Какие у нас были для этого основания?

Определим, например, функции A и N таблицами (отмеченные значения — 1 и 2):

$\frac{a}{b}$	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	1	2	3

a	N^1a
1	3
2	2
3	1

a	N^2a
1	2
2	1
3	2

В системе A—N^2, очевидно, формула $AaNa$ будет тавтологией, а в системе A—N^1 нет. Можем ли мы сказать, что в первом случае двузначная тавтология $AaNa$ остается тавтологией, а во втором — нет? Конечно, нет: здесь отсутствует база для сравнения функций двузначной и многозначных систем, функции A и N не являются аналогами двузначных функций, обозначаемых этими же буквами.

Сравнение формул (тавтологий, в частности) многозначной и двузначной логических систем имеет смысл в том и только в том случае, если предварительно установлена аналогия соответствующих функций и если для сравнения выбираются формулы со знаками аналогичных функций. В отношении систем Лукасевича и Гейтинга сравнение было уместно потому, что было выполнено это условие.

Когда говорят, что в многозначной логике не все законы двузначной логики сохраняют силу, то в сознании людей, несведущих в многозначной логике, это заявление порой вызывает мистический трепет перед тайнами природы, или, наоборот, сознание явной нелепости. На самом же деле это довольно банальный факт, если точно установить, о чем идет речь (о каких законах и при каких условиях).

Указанное условие сравнения двузначных и многозначных формул можно обобщить как условие для сравнения формул n-значной и m-значной логик вообще, где $(n \geqslant m \geqslant 2)$. В таком случае m-значная логика выступает как подсистема по отношению к n-значной.

§ 5. Двузначные и многозначные тавтологии

Пусть a есть любая тавтология двузначной логики, а $F^1, \ldots, F^k$ $(k \geqslant 1)$ — знаки всех функций, фигурирующих в ней. Пусть дана многозначная логика со значениями истинности $1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 3)$ и отмеченными значениями $1, \ldots, s$ $(1 \leqslant s < n)$. Мы утверждаем: при любом n и s можно построить такие n-значные аналоги $F^1, \ldots, F^k$, что формула a будет тавтологией в функционально полной n-значной логике, и можно построить такие n-значные аналоги $F^1, \ldots, F^k$, что формула a тавтологией здесь не будет.

Для доказательства этого утверждения достаточно взять трехзначную логику, функции A и N и тавтологию $AaNa$: все функции двузначной логики синтаксически определимы через A и N; все тавтологии двузначной логики равнозначны между собой и равнозначны $AaNa$; если наше утверждение верно в трехзначной логике, то на случай любого n оно рассматривается тривиально просто (2 рассматриваем как s или как $s+1$ в зависимости от его роли в трехзначной логике, 3 рассматриваем как n, а для всех прочих значений аргументов приписываем функциям значения, допустим, 1).

В трехзначной логике возможны следующие отрицания и дизъюнкции, аналогичные двузначным:

a	N^1a	N^2a
1	3	3
2	1	3
3	1	1

A^1ab	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	1
3	1	1	3

A^2ab	1	2	3
1	1	3	1
2	3	2	3
3	1	3	3

Формула A^1aN^1a есть тавтология, а формула A^2aN^2a не есть тавтология в случае $s = 1$ и в случае $s = 2$.

Таким образом, в рамках одной и той же многозначной системы законы двузначной логики сохраняются в одном смысле и не сохраняются в другом. Это обстоятельство лишает какой бы то ни было ценности всякие ссылки на многозначную логику при критике формальной логики.

Приведенные выше обобщения двузначной дизъюнкции обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и идемпотентности. Но они не могут быть определены как $\min([a], [b])$. Так что они не являются полным аналогом двузначной дизъюнкции. Но понятие полного аналога не лишено смысла.

§ 6. Основные законы логики

В традиционной (старой, дометематической) логике законы тождества, исключенного третьего и противоречия считались основными. Но мы выделили их здесь не только из уважения к их прошлым заслугам. С законами исключенного третьего и противоречия связаны различного рода философские дискуссии.

Выражение «закон исключенного третьего» обозначает: 1) утверждение «X или не-X» (где X — любое высказывание); 2) тавтологию или доказуемую формулу $AaNa$. Причем последнюю называют законом исключенного третьего лишь постольку, поскольку она читается подобно первому утверждению (вводится как его экспликация или интерпретируется так). А отсюда следует очень важный вывод.

Когда заявляют, что закон исключенного третьего не всегда применим, то справедливость этого заявления зависит не от ссылок на логические системы, в которых $AaNa$ не является тавтологией или доказуемой формулой, а исключительно от смысла знаков «или» и «не» в утверждении «X или не-X». Многозначные системы строятся на основе соглашений. И не представляет труда ввести такие аналоги A и N, такое определение тавтологии, что $AaNa$ не будет тавтологией. Аналогично обстоит дело с аксиоматическим построением: от нас зависит принятие таких аксиом и правил вывода, что $AaNa$ не будет доказуемой формулой. Формула $AaNa$ исключается из числа тавтологий и доказуемых формул тех или иных логических систем потому, что она понимается как «a или не-a», и по каким-то причинам принято решение исключить последнее выражение из числа правил логики. А эти причины лежат вне логики. В логических системах без $AaNa$ лишь реализуется сужение правил логики за счет закона исключенного третьего и ничего более.

Аналогично обстоит дело с законом противоречия: тавтология или доказуемая формула $NKaNa$ называется законом противоречия лишь постольку, поскольку она есть экспликация утверждения «Не может быть, чтобы было X и не-X» (или «Не бывает так, что X и не-X») или интерпретируется так; вопрос о судьбе закона противоречия точно также не зависит от многозначной логики. Ниже мы этот вопрос рассмотрим специально.

Выражение «закон тождества» обозначает запрет подмены понятий (и в этом смысле он математической логикой не затрагивается), а также тавтологию или доказуемую формулу Caa (или $KCaaCaa$) и утверждение «Из X следует X» (или «Если X, то X»). Не представляет труда построить многозначный аналог C такой, что Caa не будет тавтологией, например, такой:

Cab	1	2	3
1	1	2	3
2	1	3	1
3	1	2	1

Если 1 есть отмеченное значение, то при $[a] = [b] = 2$ получим $[Cab] = 3$.

§ 7. Непротиворечивость

Понятие непротиворечивости матричных построений обычно не вводится, так как противоречия в таких построениях исключаются самими определениями. Но для решения некоторых проблем понятие непротиворечивости полезно.

Пусть: a — любая формула; i и k — любая пара различных значений истинности, $i \neq k$, N^s — ослабленный аналог двузначного отрицания; N — любой неослабленный аналог двузначного отрицания; K — аналог двузначной конъюнкции. В двузначной логике N^s и N совпадают. Примем определение. Матричное построение непротиворечиво, если и только если выполнены следующие условия:

1) не может быть, чтобы для одной и той же комбинации значений переменных, входящих в a, $[a] = i$ и $[a] = k$;

2) формула KaN^sa невыполнима (всегда имеет неотмеченное значение).

Другое определение дано в [53].

Возникает вопрос: можно или нет построить непротиворечивую многозначную систему, в которой является тавтологией Na, если a есть тавтология двузначной логики? При этом, конечно, предполагается, что все знаки функций в a суть аналоги соответствующих двузначных.

Несложное рассуждение показывает, что построить такую многозначную систему нельзя. Если формула есть тавтология в многозначной системе, то она есть тавтология и в двузначной при том условии, что все входящие в нее знаки функций суть аналоги знаков двузначных функций. Если Na есть тавтология в многозначной системе, то она есть тавтология в двузначной логике. Но если a и Na обе суть тавтологии, то тавтологией (а значит, выполнимой формулой) будет $KaNa\ KaN^s a$ (в силу совпадения N^s и N в двузначной логике). А это исключено, ибо двузначная логика непротиворечива.

Таким образом, относительность «законов логики» нельзя понимать вульгарно, а именно — как возможность признания в качестве «законов» отрицаний «законов» двузначной логики. Выше мы отмечали, что в системах Лукасевича, Гейтинга и других не являются тавтологиями формулы $NAaNa$, $NNKaNa$ и т. п. Этот факт, как видим, не случаен. Он выражает элементарное условие правильности логического исследования — его непротиворечивость.

Формула $KaNa$ может быть выполнимой в многозначной логике лишь при следующих условиях:

1) a выполнима;

2) среди отмеченных значений, которые может принимать a, есть по крайней мере два такие i и k, что при $[a] = i$ также и $[Na] = i$ или $[Na] = k$.

Таким образом, здесь N не есть сильный аналог двузначного отрицания. Аналогично для формул $NNKaNa$ и $NAaNa$. Так что и в этом случае многозначная логика не дает оснований для различного рода философских спекуляций.

§ 8. Построение многозначной логики средствами двузначной

Гипотеза многозначности состоит, как уже отмечалось, не только из допущения какого-то числа возможных значений истинности, но также из допущения двузначности высказываний о значениях формул: высказывание либо имеет некоторое значение, либо не имеет его; если оно имеет некоторое значение, то не имеет при этом других; если не имеет некоторого значения, то имеет какое-то одно из оставшихся; либо $[a] = i$, либо $[a] \neq i$; либо $[a] > i$; либо $[a] \leqslant i$ и т. п. Это обстоятельство позволяет высказать утверждение, что язык двузначной логики может быть использован для построения многозначной [53, 10].

Можно ли строить многозначную систему, оперируя языком другой многозначной системы? В принципе, можно. Однако здесь уместно высказать два соображения практического порядка. Первое: эта другая

многозначная система не есть нечто привычное; она должна быть предварительно построена; для решения же последней задачи опять-таки требуется какой-то данный язык и т. д.; в конце концов нам придется положиться на здравый смысл, на привычные правила рассуждения, на навыки оперирования средствами «обычного» языка.

Второе соображение: использование одной многозначной логики при построении другой означает признание многозначности высказываний $[a] = i$; но при определении многозначных функций мы опираемся на допущение, что $[a] = i$, или $[a] \neq i$; a дана; высказывание «$[a] = i$» истинно, если $[a] = i$, и ложно (не является истинным), если $[a] \neq i$; если в определении функции для некоторой комбинации значений переменных не указывается значение функции, то тем самым определяется класс функций; так что по условиям построения третье значение истинности высказываний $[a] = i$ не может иметь места.

§ 9. Сравнение аксиоматизаций

Сравнение аксиоматических построений, конструируемых в области двузначной и многозначной логики имеет смысл лишь в том случае, если выполнены следующие условия:

1) указаны матричные построения, которые они аксиоматизируют (указана семантическая их интерпретация);

2) между логическими константами установлено соответствие благодаря их семантическим определениям.

Например, сравнивая аксиоматику трехзначной логики Лукасевича и классическое пропозициональное исчисление, мы рассматриваем трехзначные C и N как аналоги двузначных. Прочие их сравнения выходят за рамки нашей темы.

Пусть имеется аксиоматическое построение A^n, дедуктивно полное относительно многозначного матричного построения M^n. Классическое пропозициональное исчисление обозначим A^2, а двузначную пропозициональную логику M^2. Пусть a есть доказуемая в A^n формула. Возможны два случая:

1) все логические константы, входящие в a, суть аналоги классических (устанавливаем это, сравнивая соответствующие функции M^n и M^2); в таком случае a доказуема в A^2 (a доказуема в A^n, значит, она есть суть тавтология в M^n и, следовательно, в M^2; а все тавтологии M^2 доказуемы в A^2);

2) в a имеется по крайней мере одна логическая константа, которой соответствует функция в M^n, не имеющая аналога в M^2; в таком случае a не есть доказуемая в A^2 формула (в M^2, значит, и в A^2 вообще

нет такой формулы; поэтому нельзя сказать, что a есть недоказуемая в A^2 формула); например, $CNTxTx$ не есть доказуемая в A^2 формула, поскольку этот символ вообще не есть формула в M^2 и в A^2.

Не всякая доказуемая в A^2 формула доказуема в A^n в общем случае (для любых M^n и соответствующих A^n).

Одно замечание о терминах «классическая логика» и «неклассическая логика». Чаще эти термины употребляют в таком смысле:

1) классическая логика — M^2, A^2 и логические системы, эквивалентные A^2 (например, натуральное исчисление Генцена);

2) неклассическая логика — логические системы, не имеющие матричных интерпретаций, различного рода сужения A^2, аксиоматизации многозначных систем и т. д.

Встречаются и другие употребления. Поэтому мы избегаем пользоваться этими выражениями.

Но из сформулированного выше пункта 2 следует: если a доказуема в A^2 и недоказуема в A^n, то отсюда не следует, что в A^n доказуема Na (если такая формула доказуема в A^n, то она доказуема в A^2, что невозможно в силу непротиворечивости A^2). Так что и с этой точки зрения никаких противоречий между многозначной и двузначной логикой нет, а аксиоматические построения в многозначной логике не могут дать оснований «теориям», оправдывающим логические противоречия.

§ 10. Двузначные и многозначные кванторы

Если в отношении пропозициональных функций в многозначной логике возможен выбор различных аналогов двузначных функций, то в отношении кванторов требование аналогии предопределено: либо $\forall$ и $\exists$ суть обобщения соответствующих двузначных кванторов, либо это другие знаки, лишь по написанию похожие на них.

Пусть $\forall^2$ и $\exists^2$ суть двузначные кванторы; $\forall^n$ и $\exists^n$ суть многозначные кванторы; значения истинности суть числа; если $i < k$, то i ближе к значению, соответствующему истине. Уместны такие определения, посредством которых обобщаются двузначные кванторы:

1) $[(\forall^n\alpha)X] = i$, если $K(\exists^2\alpha)([X] = i)(\forall^2\alpha)([X] \leqslant i)$;

2) $[(\exists^n\alpha)X] = i$, если $K(\exists^2\alpha)([X] = i)(\forall^2\alpha)([X] \geqslant i)$.

Если многозначные кванторы суть аналоги двузначных, то о соотношении многозначной и двузначной логики исчисления предикатов можно в общей форме сказать то же, что говорилось выше о соотношении пропозициональных систем (отсутствие противоречий между ними, двузначность высказываний $[(\forall\alpha)X] = i$, $[(\exists\alpha)X] = i$ и т. п.)

§ 11. Переходы

Из рассмотренного выше видно, какими путями можно переходить от двузначной логики к многозначной, и наоборот.

Из двузначной логики можно получить многозначную разными путями. Простейший случай — допущение числа значений истинности более двух. При этом определения двузначных функций должны быть построены так, чтобы они не были зависимы от гипотезы о числе значений. Так, если мы приняли $[Wab] = (\max([a], [b]) + 1)(\mathrm{mod}\, n)$, то одно только допущение $n \geqslant 2$ превращает нашу систему в многозначную. Но переход к многозначной системе этим не исчерпывается: требуется еще определение отмеченных значений. Будет полученная многозначная система функционально полной или нет, должно быть выяснено для каждой системы основных функций особо. В нашем случае система будет функционально полной, а при переходе от функционально полной двузначной системы $C - N$ получается функционально неполная многозначная система.

Другой простой случай перехода от двузначной логики к многозначной — «расширение» двузначных матриц. Возьмем, например, двузначные таблицы для C и N, заменим значение 2 на 3, раздвинем 1 и 3, а в промежуток впишем значение 2. Получим таблицы:

x	Nx
1	3
2	
3	1

Cxy	1	2	3
1	1		3
2			
3	1		1

Теперь, в зависимости от стоящей задачи, вписываем в пустые места значения функций из множества значений 1, 2 и 3. Или возьмем, например, таблицу двузначной дизъюнкции и припишем третье значение 3:

Axy	1	2	3
1	1	1	
2	1	2	
3			

Опять-таки в зависимости от задачи в пустые места вписываем нужные значения. Таким способом определена слабая дизъюнкция в [36] (пустые места заполнены знаками 3). Какими свойствами будет обладать полученная система, из свойств исходной системы априори усмотреть нельзя. Понятие тавтологии должно быть определено вновь.

Выше мы уже рассмотрели метод умножения двузначных матриц, посредством которого получаются многозначные матрицы. В работе [4] приведен метод построения матриц для $(n + 1)$-значной логики

на основе матриц для n-значной логики, предложенной Яськовским. При таком переходе от n-значной логики к $(n+1)$-значной все тавтологии второй суть тавтологии в первой (отмеченное значение 1).

Из многозначных систем получаются двузначные путем допущения $n = 2$ и исключения значений, отличных от значений двузначной логики.

§ 12. Двузначные формулы в многозначной логике

В многозначной логике возможны формулы, которые принимают m значений из n возможных значений, где $m \leqslant n$. Среди них интерес представляют формулы, которые принимают только значения, соответствующие значениям двузначной логики, — двузначные формулы. Такой является, например, формула $N^{\text{Н}}x$, где $N^{\text{Н}}$ есть отрицание Гейтинга.

Такого рода двузначные формулы можно построить, используя знаки функций, в определениях которых фигурируют и другие значения. Например, в трехзначной логике Лукасевича формулы Cxy, Kxy, Axy и Nx принимают все три значения истинности $1, \frac{1}{2}$ и 0. Но с помощью функций C, K, A и N можно построить формулы, принимающие только два значения 1 и 0. Такой является, в частности, формула $CAxNxKxNx$, в чем легко убедиться: если $[x] = \frac{1}{2}$, то $[Nx] = \frac{1}{2}$, $[AxNx] = \frac{1}{2}$, $[KxNx] = \frac{1}{2}$, $[C\frac{1}{2}\frac{1}{2}] = 1$.

§ 13. Привилегированность двузначной логики

С возникновением многозначной логики стало возможным рассматривать двузначную логику как частный случай n-значной логики (при $n \geqslant 2$). Однако двузначная логика имеет привилегии перед прочими частными случаями n-значных логик.

Мы неоднократно обращали внимание на следующие факты:

1) «рабочими» функциями многозначной логики выбираются обычно такие, которые являются аналогами двузначных N, C, K, A, D, E; в случае с N выбираются такие, которые обладают по крайней мере одним из свойств двузначного отрицания;

2) из числа значений выбираются такие два, которые соответствуют значениям двузначной логики, и относительно этих значений обобщаются двузначные функции;

3) множество значений разбивается на два непересекающиеся подмножества утверждающих и отрицающих значений, что является аналогом и обобщением принципа двузначности; все утверждающие

значения рассматриваются как соответствующие утверждающему значению двузначной логики (истине), а все отрицающие — отрицающему (ложности).

Эти факты не случайны. Двузначная и многозначная логика суть направления, разделы, средства и т. п. в рамках одной науки логики, исследующей в обоих случаях одни и те же объекты. Например, многозначную импликацию стремятся определить так, чтобы для нее выполнялся modus ponens (для отмеченных значений вообще; для значения, соответствующего истине, в том числе). Это делается не просто из желания соблюсти аналогию с двузначной импликацией, а из желания ввести именно экспликацию, которую можно было бы интерпретировать как «если..., то...» или как логическое следование. А для последних modus ponens имеет силу. Так что это стремление к аналогии обусловлено, в конечном счете, общностью интерпретации. Короче говоря, привилегированное положение двузначной логики обусловлено прежде всего тем, что она раньше многозначной логики взялась за исследование определенного рода объектов.

Но дело не только в историческом приоритете. Если бы двузначная логика не давала удовлетворительных средств для описания этих объектов, она не удержалась бы в рамках науки логики, не стала бы тем, что привыкли назвать словом «логика». Для подавляющего большинства исследованных случаев употребления определенного рода логических знаков двузначная логика дала вполне удовлетворительные средства экспликации. А в тех случаях, когда здесь оказывается возможной критика, она обычно не затрагивает гипотезу двузначности, а идет по линии учета каких-то требований интуиции и новых фактов оперирования логическими знаками в науке. Так, при определении понятия логического следования через главный (в принятой здесь символике — первый) знак импликации в двузначных тавтологиях и доказуемых в классической пропозициональной логике формулах получаются «парадоксы» импликации: формулы вида $CaCba$, $CaCNab$, $CKaNab$, $CaAbNb$ и т. п. рассматриваются как несоответствующие интуиции. Здесь не имеет значения, верны или нет такого рода суждения. Важно то, что упреки идут совсем не с точки зрения идей многозначности высказываний. В следующей главе мы покажем, что даже тогда, когда критика затрагивает самые основы двузначной логики, речь идет не о замене двузначной логики на многозначную, а лишь об использовании идей и аппарата последней в решении вполне конкретных проблем логики.

Двузначная логика оказалась хорошим средством логических исследований, сохраняющим значение и в условиях развития многозначной логики, по одной причине, на которую обычно не обращают внимания. Причина эта состоит в том, что двузначная логика фактически рассматривается как... однозначная. На самом деле, в ней

принимается одно и только одно значение истинности — «истинно». Второе же значение есть лишь отрицание первого: высказывание «X не является истинно (неистинно)» берется как высказывание, приписывающее X другое значение истинности, отличное от истинности. Когда в таких случаях употребляют термин «ложно», то неявно принимают соглашение считать выражение «X ложно» тождественным по смыслу с выражением «X неистинно». И поскольку логику интересуют правила получения истинных высказываний из истинных же высказываний, то такой подход достаточно эффективен. Он ни в какой мере не упраздняется в многозначной логике. Лишь в том случае, когда «ложно» и «неистинно» не тождественны по смыслу в силу исходных соглашений (определений), отрицание истинности совпадает с ложностью только в рамках гипотезы двузначности высказываний («Высказывание либо истинно, либо ложно»). А эта гипотеза может быть заменена другими.

Таким образом, в двузначной логике в недифференцированном виде содержится логика, сохраняющая силу при любых гипотезах о числе значений истинности. Это частный случай n-значной логики.

§ 14. Множественность и единство логики

Выяснение взаимоотношений двузначной логики и многозначной, различных многозначных систем между собой, между различными способами построения логических систем, — все это в совокупности составляет решение общего вопроса о множественности и единстве логики.

Множественность логики есть факт, выражающийся в наличии большого числа разнообразных логических систем, — факт, не свойственный традиционной (дометематической) логике, если не принимать во внимание различие в способе изложения, в полноте охвата и в трактовке одного и того же материала. Возникновение многозначной логики сделало эту множественность еще более ощутимой. Естественно, встает проблема единства логики как науки.

Единство логики, как и всякой науки, не может быть установлено на базе каких-то чисто априорных постулатов раз и навсегда. Оно может быть установлено лишь на базе конкретного исследования логических систем на том или ином этапе развития логики. В порядке подведения некоторых итогов тому, что говорилось выше, сделаем несколько общих замечаний на этот счет.

Прежде всего следует сказать, что единство логики базируется на соблюдении (в качестве нормы, разумеется) требования непротиворечивости не только внутри отдельных ее систем, но и в сравнении

различных систем. Две логические системы не противоречат друг другу, если и только если не существует такой формулы a, что в одной системе a есть тавтология или доказуемая формула, а в другой — Na (все знаки функций, входящих в a, интерпретируются одинаково, а N есть аналог двузначного отрицания). Если существует такая a, что в одной системе является тавтологией или доказуемой формулой a, а в другой — Na, то системы противоречат друг другу.

Единство логики, далее, выражается в том, что сами логические системы становятся предметом исследования: изучаются их различия и отношения, принципы построения, общие свойства и особенности отдельных групп и т. д. Между различными системами устанавливаются определенные связи. Помимо указанной выше дедуктивной полноты можно назвать еще отношение обобщения в книге Россера и Тюркетта (обобщаются работы Слупецкого), включения (логика Бочвара включается в логику Клини), изоморфизм (в трехзначной логике Бочвара содержится часть, изоморфная двузначной логике).

Единство логики, наконец, выражается в том, что имеются некоторые общие понятия и принципы, лежащие в основаниях двузначной и многозначной логики, в основаниях разнообразных логических систем. Мы имеем в виду при этом отнюдь не некоторое стабильное и общепризнанное состояние науки логики, а необходимую тенденцию развития логики, не исключающую разнообразия точек зрения на логику, способов построения, широты охвата материала и т. д. Одно то, что в самых различных логических системах приходится иметь дело с понятиями высказывания, истинности, ложности, значениями истинности вообще, вывода и т. п. (или с соответствующими им понятиями формулы, аргумента, функции, значения, преобразования и т. д.) говорит о том, что логические системы объединяются в нечто цельное.

Таким образом, единство логики мы понимаем не как построение одной всеобъемлющей дедуктивной (в частности, аксиоматической) системы, а как подвижное многообразие связей и отношений различного рода идей, теорий, направлений, проблем и т. д. В первом смысле оно явно неосуществимо, во втором смысле оно есть реальный факт или, во всяком случае, господствующая тенденция логики.

Заметим в заключение, что термином «логика» называют не только логику в целом, но и ее отдельные фрагменты, системы, направления. Во втором случае говорят об индуктивной и дедуктивной логике, о модальной логике, о логике Лукасевича и Поста и т. п. Но это не играет серьезной роли, если только из контекста всегда ясно, о чем идет речь.

Глава 5

Многозначная концепция логики

§ 1. Эмпирические основания логики

Какой является логика в целом с точки зрения числа допускаемых значений истинности? В истории логики взгляд на нее как на двузначную вплоть до последнего времени был господствующим. Да и сейчас еще многим двузначность представляется прирожденным ее свойством. Однако в настоящее время приходится признать, что логика в целом не является двузначной, как не является и многозначной. И это не только потому, что возникла многозначная логика, но прежде всего потому, что вопрос о числе значений истинности высказываний не является и никогда не был исходным вопросом логики. Он был и является исходным вопросом лишь при построении отдельных логических теорий и при решении некоторых логических проблем, каждая из которых по отдельности не исчерпывает содержания и проблематики всей науки. Хотя это обстоятельство можно обнаружить, рассматривая логику даже на ее ранних этапах развития, однако возникновение многозначной логики заставило обратить на него внимание фактически.

Принципы построения отдельных логических систем, призванных решать те или иные частные задачи науки логики, и принципы построения логики в целом существенно различаются, — наука в целом оценивается с иной точки зрения, чем ее отдельный фрагмент. Так, при построении некоторой логической теории вопрос о ее взаимоотношениях с другими логическими теориями является внешним, не касающимся ее структуры, тогда как для логики в целом этот вопрос есть вопрос ее внутреннего строения.

При рассмотрении логики в целом как особой отрасли научного исследования обнаруживается то, что она является эмпирической наукой в своих исходных основаниях, по источнику проблематики и по критериям оценки ее теоретических результатов. Об этом говорит хотя бы уже тот факт, что непосредственной эмпирической реальностью, с которой она имеет дело прежде всего, является язык. Во всяком случае, в логике явно или не явно фигурируют соображения, носящие эмпирический характер и образующие ее основания. Развитие логики

за последнее столетие, выразившееся по преимуществу в разработке логических исчислений и общих принципов их построения, отодвинуло эти эмпирические основания логики на задний план, но не ликвидировало их: как бы логика ни понималась, они дают себя знать при попытках анализа ее общих понятий — «высказывание», «предикат», «истинно», «следует» и т. п. Многочисленные логические исчисления строятся с прямой целью дать уточнение и систематическое развитие свойств таких привычных явлений языка, как знаки «и», «или», «если..., то...», «необходимо», «возможно», «должно», «допустимо» и т. п.

Что же касается отдельных логических систем, то в большинстве случаев решающее значение при построении их имеет отыскание условий дедукции из некоторых принятых предпосылок. При этом вообще могут не приниматься во внимание какие бы то ни было эмпирические соображения. Известны многочисленные случаи, когда то или иное теоретическое построение лишь при условии учета его связей с другими исследованиями может быть расценено как логическое (например, многозначная логическая система Поста).

Ссылка на эмпирические основания логики в рассматриваемом случае имеет принципиальную важность. Ведь говоря о двузначной логике, мы вынуждены говорить о высказываниях и о значениях истинности высказываний. Но что это такое? При построении отдельных логических систем этот вопрос можно обойти различными способами: 1) можно принять соответствующие термины как неопределяемые или интуитивно ясные; 2) можно знаки высказываний и значения истинности рассматривать чисто формально, допуская их интерпретацию в терминах самых различных предметных областей (например, не в терминах логики, а в терминах электрических сетей); 4) можно вообще пользоваться математической терминологией («аргумент», «функция», «значение», «переменная» и т. п.), как это делалось выше. Но это не решает поставленного вопроса логики в целом.

Очевидно, ответ на поставленный вопрос должен заключаться прежде всего в описании процесса абстрагирования высказываний как определенных знаковых структур, а этот процесс опирается на наблюдение, отбор, анализ, сравнение и стандартизацию способа изображения непосредственно данных факторов языка и навыков оперирования им. Достаточно сказать, например, что субъектно-предикатная структура высказываний может быть принята в логике предикатов как нечто само собой разумеющееся лишь постольку, поскольку она в логике давно была абстрагирована из эмпирически данных предложений.

Значения истинности суть свойства высказываний. Причем это такие свойства, которые нельзя обнаружить в наблюдаемом языке на тех же основаниях, что и сами высказывания. Высказывания суть вещные

структуры. В целом ряде случаев, выбираемых в качестве примеров для осуществления их абстрагирования, они совпадают с видимым или слышимым расчленением предложений, а в других случаях предложениям можно придать некоторый стандартный вид — вид высказываний. Значения истинности не являются элементами структуры языка. В языке встречаются лишь знаки (слова, выражения, символы), обозначающие их («истинно», «ложно», «бессмысленно», «неопределенно» и т. п.). И эти знаки обозначают некоторые результаты сопоставления данных высказываний с чем-то другим, отличным от них. В частности, это может быть сопоставление опытных высказываний с некоторыми наблюдаемыми ситуациями. А такого рода факты, опять-таки, должны быть известны и поняты в логике в целом, чтобы допущения неопределяемых значений истинности приобрели собственно логический смысл.

Точно так же обстоит дело и с правилами оперирования высказываниями. Всем известно, что в большинстве случаев при построении отдельных понятий и суждений, при построении теорий в рассуждениях и т. д. ссылок на логику не делают, а опираются на некоторые привычные навыки. Наблюдение последних образует отправной пункт логики как особой науки. Обобщенное их описание, усовершенствование, выявление скрытых свойств и взаимоотношений, изобретение и предвидение новых приемов такого рода и т. д. — такова задача логики как особой области науки, что бы при этом ни думали о своей собственной деятельности те или иные специалисты логики, группы логиков и даже целые направления и эпохи.

§ 2. Многозначность высказываний

Многозначная концепция логики имеет эмпирические основания в том факте, что число значений истинности высказываний может быть более двух, — в факте многозначности высказываний. Вопрос о понимании значений истинности высказываний является для нас здесь центральным и исходным.

При построении многозначных логических систем рассмотренного выше типа просто допускают, что некоторое (задаваемое) множество знаков есть множество значений истинности (пропозициональных значений). Строятся эти системы в логических терминах («высказывание», «значение истинности», «истинно», «ложно» и т. п.) или в математических терминах («переменная», «формула», «значение», $0, 1, 2, \ldots$), роли при этом не играет. Смысл выражений «x имеет значение i» (или «x имеет значение истинности i»), где x есть простое, атомарное высказывание, остается неопределенным.

Но логические системы, если их взять в контексте развития познания в целом, строятся не просто ради удовлетворения каких-то эгоистических интересов их создателей, а с целью использования их для решения конкретных научных задач. А при желании применять логику совершенно необходимо выяснить смысл терминов «истинно», «ложно» и других знаков истинностных значений [31] Если в двузначной логике еще можно в какой-то мере сослаться на привычную ясность слов «истинно» и «ложно», то в многозначной логике такие ссылки уже недопустимы. Что означает, например, истинностное значение с номером 20? Без специальной договоренности ответить на такого рода вопросы невозможно. Хотя большинство авторов работ по многозначной логике стараются избежать интерпретации своих построений, однако накопился достаточно разнообразный фактический материал и по этой линии.

Имеющиеся интерпретации весьма разнообразны не только по предметной области (нормативные высказывания [35], релейно-контактные схемы [9], [10], [11], математические рассуждения [1], [2], [36], язык квантовой механики [15], [21], [52], теория вероятности [51], [70], логическое следование [12] и т. п.), но и по некоторым общим чертам. Можно указать следующие два основных типа интерпретаций:

1) нелогические интерпретации, при которых формулы (высказывания) рассматриваются как предметы некоторой предметной области, а их значения (значения истинности) — как возможные свойства таких предметов; например, при такой интерпретации формулы рассматриваются как контакты и системы контактов электрической сети, а их значения — как возможные положения контактов; такого рода интерпретации имеют логический интерес лишь в связи с интерпретацией функций;

2) логические интерпретации, при которых формулы рассматриваются именно как высказывания, а значения формул — как значения истинности высказываний, подобные привычным истинности и ложности; ниже мы приведем несколько примеров таких интерпретаций.

Пример 1 (из [11]). Пусть некоторый отрезок разбит на n равных частей. Рассмотрим положение частицы a, имеющей конечные размеры, на этом отрезке. Возьмем высказывание «a находится внутри отрезка с номером i». Оно считается истинным, если частица a действительно находится внутри отрезка с номером i, ложным, если частица a не имеет точек в отрезке с номером i, и неопределенным, если частица a имеет точки в двух смежных отрезках или покрывает пограничную точку отрезка. Аналогичный пример приведен в [53] (рассматривается переходное состояние предмета, когда невозможно установить, находится он в некоторой области пространства или нет). В такого рода

случаях третье значение истинности понимается не просто как отрицание истинности или ложности, но и как нечто позитивное: если кто-то утверждает, что высказывание неопределенно, мы точно знаем, что он хочет этим сказать о некоторой области действительности.

Пример 2 (из [21]). Пусть на шкале некоторого измерительного прибора нанесены деления 1, 2 и 3, и стрелка может показывать эти и только эти деления (исключим для простоты все промежуточные положения). Возьмем, далее, такие высказывания: 1) «Стрелка показывает деление 1»; 2) «Стрелка показывает деление 4»; 3) «Стрелка показывает одно из делений 1, 2 и 3». Первое будет истинным, если стрелка показывает 1, и ложным, если стрелка показывает 2 или 3. И то и другое может случиться. Но второе высказывание никогда не будет истинным, так как такого деления на шкале прибора вообще нет. Третье высказывание будет всегда истинным, так как стрелка обязательно показывает одно из положений 1, 2 и 3. Здесь значения истинности высказываний определяются путем сопоставления высказываний с действительностью, которую они отражают. Возможны четыре случая, которые можно назвать (допустим) так: абсолютно истинно (третье высказывание), абсолютно ложно (второе высказывание), возможно истинно и возможно ложно (первое высказывание).

Пример 3 (из [49]). Если учесть различие прошлого и настоящего времени, то возможны четыре значения истинности: 1) истинно вчера и сегодня; 2) истинно вчера и ложно сегодня; 3) ложно вчера и истинно сегодня; 4) ложно вчера и сегодня. Хотя здесь все четыре значения определяются через истинность и ложность, однако берется одно и то же высказывание и сопоставляется с четырьмя различными ситуациями во времени. Аналогично вводятся значения истинности с учетом настоящего и будущего времени, а также других более сложных временных соотношений.

Пример 4 (из [52]). Говорить об истинности и ложности высказываний правомерно лишь тогда, когда возможно осуществить их проверку. Если проверка высказывания невозможна, т. е. его нельзя подтвердить и опровергнуть, то оно должно быть оценено как неопределенное (в общем, каким-то третьим значением истинности). К числу таких высказываний относятся высказывания о ненаблюдаемых объектах. Подобным же образом третье значение понимается в [36]: истинность и ложность нельзя установить алгоритмически. В таких случаях третье значение истинности ставится в зависимость от возможности проверки. Но сама эта возможность в свою очередь зависит (косвенно, опосредованно) от объективных условий познания. Так что и здесь, в конечном итоге высказывания сопоставляются с чем-то внешним по отношению к ним.

Пример 5. Возьмем простейшее атрибутивное высказывание, изобразимое схемой «Предмет S имеет свойство P». Пусть высказывание такого рода является эмпирическим. Возможны следующие варианты сопоставления его с некоторой ситуацией: 1) предмет S не существует в данной ситуации; 2) существует предмет S в данной ситуации или нет, установить невозможно; 3) предмет S существует в данной ситуации и действительно имеет свойство P (высказывание истинно); 4) предмет S существует в данной ситуации, но он не имеет свойства P (высказывание ложно); 5) предмет S существует в данной ситуации, но невозможно установить, имеет он свойство P или нет. Как видим, истинность и ложность учитывают лишь два из пяти возможных случаев.

Если взять более сложные, чем в примере 5, структуры высказываний, то число возможных вариантов сопоставления их с некоторыми ситуациями будет возрастать. А каждый тип (вариант) может быть обозначен особым значением истинности. Так что число значений истинности не является ограниченным какой-то абсолютной природной необходимостью. Оно ограничивается историческими обстоятельствами, а в отображающей их науке — способом подхода к их классификации.

Пример 6. Понятие «значение истинности» охватывает оценку высказываний по степеням приближения, возможности, точности и т. п. В принципе число таких оценок есть несчетное множество. Многозначный характер высказываний в таких случаях очевиден. Использование аппарата многозначной логики в таких случаях вполне естественно, если выполнено одно условие: множество значений истинности можно точно задать. В частности, это можно сделать для степеней возможности (Лукасевич, Рейхенбах и др.). Пусть степени возможности суть действительные числа в интервале от 0 до 1 включительно. Если заданы степени возможности простых высказываний, то степени возможности сложных высказываний можно установить посредством определений многозначных функций.

Ограничение числа значений истинности двумя в истории логики было связано с самыми различными мотивами. Отметим два из них. Во-первых, в логике учитывались такие случаи, когда оценка значений истинности высказываний ставилась в зависимость от одного и только одного шага проверки. Для этого исключались случаи непроверяемости высказываний, учитывались логические ударения и т. п. Во-вторых, высказывания оценивались по принципу: «Либо дело обстоит так, как говорится в высказывании, либо не так (как-то иначе)». А это «не так» не анализировалось в общем виде. В применении же к частным случаям оно было ясно из контекста.

§ 3. Значения истинности

Несмотря на различия приведенных выше примеров (а число их можно продолжить), в них усматривается нечто общее:

1) значения истинности суть различные результаты сопоставления высказываний с некоторым фактическим положением дел в данных областях познания;

2) сопоставления осуществляются в соответствии со структурой высказываний, как некоторые упорядоченные процедуры;

3) рассмотрение простейших примеров показывает, что возможно более двух значений истинности;

4) если известно, каков значение истинности высказывания, то известно, каково фактическое положение вещей в данной области, с которой ассоциируют данное высказывание;

5) выражение «X имеет значение истинности i» означает, что результат некоторых операций (скажем, проверочных операций) с X обозначается знаком i;

6) определить значения истинности как таковые — значит определить смысл знаков i.

Различение значений истинности и обозначающих их знаков существенно для нашей темы. Не представляет труда допустить любое число знаков $i^1, i^2, \ldots$ и придумать правила приписывания их некоторым видам сложных высказываний. Труднее указать соответствующие этим знакам процедуры (процедуры проверки) для простых высказываний.

Из сказанного выше следуют два чрезвычайно важных вывода:

1) все значения истинности могут быть определены через значение «истинно»;

2) введение трех и более значений истинности не является фатальной необходимостью.

Относительно первого вывода заметим следующее. Значение «истинно» определяется по схеме Тарского: высказывание X истинно, если и только если X. Это еще не означает того, что мы тем самым определили термин «истинно» для любых структур высказываний. Например, мы знаем, что высказывание «Если Y, то Z» истинно в том и только в том случае, когда на самом деле имеет место: если Y, то Z. Но когда это «на самом деле» имеет место? Ясно, что схема Тарского ответа не дает. Но мы допустим здесь, что значение «истинно» определено для всех случаев. Тогда прочие значения определяются по схеме: X имеет значение истинности i, если и только если Y истинно. Например, высказывание «Предмет S имеет свойство P» ложно, если и только если высказывание «Предмет S не имеет свойства P» истинно.

Относительно второго вывода надо сказать, что не всякая абстрактно мыслимая возможность непременно должна реализоваться. В данном случае — не обязательно нужно вводить большое число значений истинности, если это не диктуется важными причинами. Однако наука логика обязана так или иначе констатировать фактические возможности в отношении значений истинности для всех исследуемых структур высказываний.

Разработка же многозначных логических систем и различного рода «экспериментальные» попытки их использования могут породить спрос на аппарат многозначной логики и стимулировать развитие многозначной концепции логики.

Из сказанного, далее, следует, что не структура высказываний зависит от числа значений истинности, а, скорее, наоборот — число возможных значений истинности зависит от структуры высказываний. Это утверждение верно даже в отношении таких структур, логические знаки которых определяются как функции истинности. Пусть, например, имеется высказывание X, которое состоит из высказываний $Y^1, \ldots, Y^m$ $(m \geqslant 1)$ и логического знака F. Последний, допустим, определен так:

1) пусть $a^1, \ldots, a^m$ суть любые высказывания, в том числе — $Y^1, \ldots, Y^m$, что соответствует пониманию пропозициональных формул как высказываний; пусть b есть высказывание, построенное из $a^1, \ldots, a^m$ и F;

2) если $a^1, \ldots, a^m$ имеют значения истинности соответственно $i^1, \ldots, i^m$, то b имеет значение k;

3) и так для всех комбинаций значений истинности $a^1, \ldots, a^m$. Но если мы теперь имеем конкретное высказывание X, а не определение F, то от наличия в структуре X знака F зависит число возможных значений истинности X.

Из сказанного также следует, что правомерно определять значения истинности высказываний применительно к их структурам, но неправомерно определять само высказывание через значения истинности. В логической литературе часто встречается определение высказывания как такого объекта, в отношении которого уместно говорить об истинности и ложности (высказывание — то, что может быть истинно или ложно. К подобным определениям прибегают и в многозначной логике, добавляя еще дополнительные (сверх истинности и ложности) значения. Такого рода «определения» извинительны только как грубая форма записи намерения рассматривать высказывания исключительно с той точки зрения, что они имеют какие-то значения истинности.

Иногда значения истинности понимают как характеристику состояния человека. Например, рассматривают значения «известна истин-

ность», «известна ложность» и «неизвестно, истинно или ложно» [36]. Первое соответствует истинности, второе — ложности, а третье образует новое значение истинности. Третье значение понимается также, как «значение несущественно» («не играет роли»). Однако в таких случаях фактически имеют место не значения истинности, а просто три (или более) возможностей в познании, которые лишь могут быть описаны с помощью терминов «истинно» и «ложно».

§ 4. Основные и производные значения истинности

При введении значений истинности по схеме, приведенной в предшествующем параграфе, возможно определение неисключающих значений. Для них могут быть истинными утверждения типа: если X имеет значение истинности i, то X имеет значение истинности k; если X не имеет k, то X не имеет i. Например, для примера 5 из предшествующего параграфа примем обозначения: 1) случаи 1 и 2 — высказывание непроверяемо; 2) если предмет S в данной ситуации существует, высказывание проверяемо; 3) случай 3 — высказывание истинно; 4) случай 4 — высказывание ложно; 5) случай 5 — высказывание неопределенно; 6) если высказывание ложно или истинно, то оно определенно. Очевидно, если высказывание истинно, то оно проверяемо; аналогично для ложности и неопределенности. Если высказывание не является проверяемым, то оно не является истинным, ложным, неопределенным. Если высказывание истинно (ложно), оно определенно; если высказывание не является определенным, то оно не является истинным (ложным). Логические системы многозначной логики строятся на допущениях лишь основных значений истинности, которые исключают друг друга. Для них, естественно, подобные соотношения не имеют места.

Соотношения основных и производных значений истинности определяются схемой: X имеет значение истинности i, если и только если X имеет одно и только одно из значений $k^1, \ldots, k^m$ $(m \geqslant 2)$ и только из этих значений. В приведенном примере: X определенно, если и только если X истинно или ложно.

Каким бы путем не вводились основные значения истинности, они должны быть перечислены именно как основные, что равносильно принятию утверждения: X имеет либо значение i^1, либо значение $i^2, \ldots$, либо значение i^n, где $i^1, i^2, \ldots, i^n$ суть все основные значения.

Другими словами, перечень основных значений должен быть задан как исчерпывающий и равновозможный. Поясним последнее. Мы приводили выше примеры введения значений истинности, которые можно представить как ряд последовательных делений, в простейшем случае —

дихотомических делений: 1) проверяемо и непроверяемо; 2) проверяемое — определенное и неопределенное; 3) определенное — истинное и ложное. Основные значения истинности суть концы ветвей получающегося дерева. Однако в итоге при этом получается такое утверждение: (X непроверяемо) или ((X неопределенно) или ((X истинно) или (X ложно))). Из этого утверждения не следует «X непроверяемо или X неопределенно или X истинно или X ложно», где «или» употребляется, как и в первом утверждении, в исключающем смысле (хотя следование от второго к первому имеет место). Поэтому второе утверждение должно быть принято как первичное, а не как следствие.

§ 5. Функция истинности

Рассматривая пропозициональные переменные как любые простые высказывания, а формулы — как образованные из них сложные высказывания, мы получим из определений пропозициональных функций определения некоторых структур высказываний. В этих определениях значения истинности сложных высказываний выступают как функции от значений истинности составляющих их простых высказываний, — сложные высказывания представляются как функции истинности простых. Знаки пропозициональных функций интерпретируются как типы функций истинности (зависимостей) такого рода.

Важно обратить внимание на следующее обстоятельство. Пусть X есть высказывание, построенное из некоторого множества высказываний и знака функции истинности F. Этот логический знак не имеет никакого другого смысла, кроме того, который ему придается определяющей его матрицей. И если он рассматривается как экспликация какого-то знака Q языка, употреблявшегося до этого определения, то он может быть экспликацией Q лишь в той мере, в какой он неявно был знаком функции истинности. Например, знаки K и A суть экспликации знаков «и» и «или» лишь постольку, поскольку для последних выполняются условия: «X и Y» истинно тогда и только тогда, когда истинны оба X и Y, «X или Y» истинно тогда и только тогда, когда истинно по крайней мере одно из X и Y.

Факты показывают, что логические знаки обычных и научных языков лишь частично могут быть эксплицированы как знаки функций истинности. Возьмем, например, высказывания типа «Если X, то Y». В каком смысле функция C есть экспликация знака «если..., то...», мы говорили. Здесь важно другое. Высказывания такого типа получаются различными способами. Назовем два из них: 1) если из одного X или из X и некоторого множества высказываний $Z^1, \ldots, Z^k$, которые считаются истинными, логически следует (выводится) Y, то

можно записать «если X, то Y»; 2) в результате опытного исследования устанавливается, что наступление одних событий (фиксируются в X) ведет к наступлению других событий (фиксируются в Y); и хотя здесь нет отношения логического следования, результат может быть записан в форме «Если X, то Y». Эта форма пригодна в обоих случаях потому, что истинность Y оказывается зависимой от истинности одного только X. Но при этом значение истинности «Если X, то Y» не есть функция значений истинности X и Y. В первом случае высказывание истинно, если есть правила, позволяющие сделать вывод, и не является истинным, если таких правил нет. Во втором случае высказывание истинно, если каждый раз наступление одного события ведет к наступлению другого (а уверенность в этом зависит от выполнения правил опытного исследования), и не является истинным, если этого нет. В обоих случаях X может не быть истинным при истинном Y и при неистинном Y. Исключается лишь одно: неистинное Y при истинном X. Но они строятся с таким расчетом, чтобы этому требованию удовлетворить.

Возьмем другой пример — высказывания «Возможно, что X». Если X истинно, то и «Возможно, что X» истинно. А как быть в случае, когда X не является истинным? Здесь возможно, что наше высказывание истинно. Но возможно и то, что оно не является истинным. А каким именно оно является, зависит не от значения истинности X, а от анализа каких-то обстоятельств и условий осуществления событий по определенным критериям (схемам). И никакие многозначные матрицы не заменят необходимости такого анализа.

Короче говоря, в отдельных случаях и для отдельных форм высказываний можно осуществить проверку, зная значения истинности входящих в их состав простых высказываний. Но представить все формы высказываний и полностью каждую из форм как функцию истинности составляющих высказываний есть дело невозможное.

Для знаков функций есть, конечно, некоторые предпосылки и аналоги в обычной речи. Но это — лишь «зародыши». В принципе же введение этих знаков как особых структурных (входящих в структуру высказываний) логических знаков есть результат изобретательной деятельности логики. Это — отличный пример того, что логика не просто описывает то, что уже вошло в обиход, но продолжает стихийную деятельность человечества по изобретению логических форм на профессиональном уровне, уточняя и отшлифовывая сделанное и предлагая нечто новое. Сказанное верно уже в отношении двузначной логики. И тем более верно в отношении многозначной логики, которая еще более «оторвалась» от языков науки.

Задача, таким образом, состоит не столько в том, чтобы воспринять результаты логики просто как описание привычных логических

средств языка (хотя и эта задача логикой выполняется) и сказать себе: «Наконец-то мы знаем свойства логических средств языка, которыми вполне успешно оперировали на протяжении веков и без помощи... логики!». Задача состоит прежде всего в том, чтобы найти приложения для вновь изобретенных логических средств. Они найдены для двузначной логики. Такого рода исследования ведутся и в отношении аппарата многозначной логики.

Ошибочно думать, будто аппарат многозначной логики еще не есть логика, будто его еще надо применять в области логики, и тогда получиться нечто логическое. Аппарат многозначной логики сам по себе есть часть содержания науки логики, в какой бы терминологии он ни развивался. И если при этом оказывается весьма неопределенной граница между логикой и математикой, то это говорит лишь об историческом характере этой границы.

§ 6. Многозначные функции как виды связей

Семантическое определение каждой многозначной функции можно представить как совокупность высказываний вида «Если X^i, то Y^i», где в X^i указывается некоторая комбинация значений переменных, а в Y^i — значение, которое принимает при этом формула, содержащая эти переменные и определяемый знак функции и не содержащая никаких других знаков; в $X^1, \ldots, X^k$ перечислены всевозможные комбинации значений переменных, а набор значений функции в $Y^1, \ldots, Y^k$ характеризует тип функции.

Будем теперь интерпретировать: 1) переменные как любые предметы; 2) значения переменных — как возможные свойства или состояния этих предметов; 3) формулу, содержащую переменные и вводимый знак функции, — как предмет, отличный от упомянутых выше; 4) значения этой формулы — как возможные свойства этого предмета. В таком случае семантическое определение многозначной (как и двузначной) функции можно рассматривать как определение некоторого типа связи между предметами, названными в пункте (1), и предметом, названным в пункте (3).

Определение функции теперь будет состоять из пунктов такого вида: «Если предметы $S^1, \ldots, S^m$ $(m \geqslant 1)$ имеют набор свойств (находятся в состояниях) соответственно $i^1, \ldots, i^m$, то предмет S^n имеет свойство (находится в состоянии) i^n», где $i^1, \ldots, i^m$ суть свойства (тождественные или различные в любых комбинациях) из множества U^1 возможных свойств предметов S^i, i^n есть свойство из множества U^2 возможных свойств предмета S^n. Назовем $S^1, \ldots, S^m$ первыми, а S^n — вторым по порядку.

Фактически так обстоит дело при внелогических интерпретациях пропозициональных функций двузначной и многозначной логики. Так, рассматривая знак конъюнкции как знак последовательного соединения контактов, предполагают следующее: если контакты S^1 и S^2 замкнуты, то цепь замкнута; если по крайней мере один контакт разомкнут, то цепь разомкнута. Обращаем внимание на то, что цепь есть предмет, отличный от контактов, а замкнутость цепи и контактов — не одно и то же свойство. Употребляемая символика скрывает это, поскольку формула, содержащая переменные и определяемый знак функции, выполняет роль знака второго по порядку предмета, содержит знаки первых по порядку предметов и указывает на тип их связи.

Глава 6

Приложения многозначной логики в логике

§ 1. Приложения многозначной логики

Приложения многозначной логики можно разбить на две группы:

1) непосредственные, при которых аппарат многозначной логики получает интерпретацию в терминах той или иной предметной области;

2) косвенные, при которых многозначная логика используется в исследованиях проблем логики, а результаты таких исследований могут быть использованы в применении к языкам наук на общих основаниях.

Примером приложений первой группы являются технические приложения логики. Что касается приложений второй группы, то они охватывают:

1) выявление фактически встречающихся случаев многозначности высказываний, выяснение взаимоотношений соответствующих значений истинности и последствий, вытекающих из этого (правил оперирования многозначными высказываниями);

2) использование идей и аппарата многозначной логики в качестве эвристических средств при решении проблем логики.

Использование, о котором говорится во втором пункте, может быть связано с исследованием, указанным в первом пункте, и может быть совершенно независимым от него. Первое условие назовем смысловым, второе — формальным (на этой терминологии мы не настаиваем).

§ 2. Формальные приложения

В логике получил широкое распространение метод доказательства независимости системы аксиом путем построения многозначных матриц. Так, независимость системы аксиом Тарского—Бернайса доказывается с помощью многозначных матриц (см. [50]). При этом сами аксиомы суть тавтологии двузначной логики. В [45] четырехзначные матрицы используются для обоснования независимости системы аксиом, содержащей знак строгой импликации и возможности. Так что

никакой смысловой связи многозначных матриц и исследуемой логической системы здесь нет. Вместо одних матриц здесь можно придумать другие пяти, шести и т. п. значные, дающие тот же результат.

Следующий пример может показаться читателю несколько обескураживающим, поскольку с ним исторически было связано возникновение многозначной логики: мы имеем в виду модальную логику Лукасевича. Но одно дело — исторические мотивы: невозможность построить определения модальных знаков на базе двузначной логики способствовала выдвижению идей многозначной логики. И другое дело — характер взаимоотношения многозначного построения и логической теории.

При построении модальной логики в качестве некоторого «технического» средства можно использовать (как это сделано, в частности, в [27]) трехзначную логику Лукасевича со значениями 0, $\frac{1}{2}$ и 1. К функциям C, A, K, N добавим еще такие функции:

x	F_x^1	F_x^2
0	0	1
$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	0

Через них определим F^3 и F^4:

$$[F^3x] = [F^2Nx],$$

$$[F^4x] = [F^1Nx].$$

Будем теперь интерпретировать F^1x как Mx («Возможно, что x»), F^2x — как NMx («Невозможно, что x»), F^3x — как Lx («Необходимо, что x»), и F^4x — как NLx («Не необходимо, что x»). Очевидно, тавтологии со знаками F^1, F^2, F^3, F^4 будут интерпретироваться как правила для модальных высказываний. Например, AF^2xF^1x — как $AMxNMx$, AF^3NxF^3x — как $ALNxLx$ и т. п.

В четырехзначной логике Лукасевича к матрицам C^4 и N^4 добавляются матрицы для возможности M и необходимости L:

x	Mx	Lx
1	1	2
2	1	2
3	3	4
4	3	4

Теперь тавтологии со знаками возможности и необходимости рассматриваются как законы модальной логики. Эта матричная модальная

логика эквивалентна аксиоматической системе модальной логики Лукасевича [43], [44], которая получается путем присоединения к аксиомам классического пропозиционального исчисления модальных аксиом

$$CxMx,$$
$$EMxMNNx,$$

(где Eab есть сокращение для $KCabCba$) и определения Lx как сокращения для $NMNx$, которое можно точно так же записать формулой

$$ELxNMNx.$$

Аксиоматическое построение модальной логики Лукасевича уже само по себе есть определение свойств модальных высказываний и не зависит от каких бы то ни было матричных построений. В модальной логике вообще можно обойтись без многозначных матриц. Можно использовать другие матрицы, отличные от четырехзначных, например, шестнадцатизначные, построенные методом умножения матриц. И результат в последнем случае будет тот же.

Отметим, наконец, что определение модальных знаков многозначными матрицами не дает способа установления значений истинности модальных высказываний через значения истинности немодальных высказываний (в таблице для необходимости, например, вообще отсутствует значение 1, соответствующее истинности). Сказанного достаточно, чтобы сделать вывод об отсутствии жесткой «смысловой связи» модальной логики с какой-то одной определенной многозначной системой. Это, однако, не исключает того, что модальные высказывания принимают более двух значений истинности.

Следующий пример связан с системой строгой импликации Аккермана [12]. Система Аккермана должна, по идее, устранить так называемые «парадоксы» материальной импликации и строгой импликации Льюиса, т. е. в ней не должны быть доказуемыми некоторые формулы, которые считаются несоответствующими интуитивному пониманию логического следования, — формулы $CaAbNb$, $CaCNab$ и т. п. Задача многозначного матричного построения состоит здесь в следующем: все доказуемые в системе сильной импликации формулы суть тавтологии в матричном построении; формулы, считающиеся «парадоксальными», не являются тавтологиями, значит, они недоказуемы в системе сильной импликации.

Многозначное матричное построение, удовлетворяющее этой задаче, имеет такой вид. Значения истинности суть 0, 1, 2, 3, 4, 5. Отмеченные значения суть 3, 4 и 5. Отрицание определяется, как у Поста, т. е.

$$[Nx] = 5 - [x].$$

Импликация определяется матрицей

Cxy	0	1	2	3	4	5
0	3	3	3	3	3	3
1	0	3	3	0	3	3
2	0	0	3	0	0	3
3	0	0	0	3	3	3
4	0	0	0	0	3	3
5	0	0	0	0	0	3

Но той же задаче удовлетворяет четырехзначное построение, в котором N, K и A определяются как у Лукасевича, C определяется матрицей

Cxy	0	1	2	3
0	2	2	2	2
1	0	2	2	2
2	0	1	2	2
3	0	0	0	2

Отмеченные значения суть 2 и 3. Имеются и другие матричные интерпретации систем строгой импликации (см., например, [53]).

§ 3. Смысловые приложения

С примером смыслового приложения мы уже встречались в разделе об интуиционистской логике Сходство этого примера с системой Аккермана явное: там тоже требовалось «обосновать» исключение некоторых формул из числа доказуемых. Но в случае с логикой Гейтинга в основе лежало признание высказываний, которые не являются истинными и ложными

Одним из примеров смыслового приложения многозначной логики являются работы Бочвара [1], [2]. Бочвар построил свое трехзначное исчисление с целью разрешения парадоксов классической математической логики путем формального доказательства бессмысленности определенных высказываний. Бочвар различает высказывания, имеющие смысл, и высказывания бессмысленные. Высказывание имеет смысл, если оно истинно или ложно. Высказывание, имеющее смысл, называется предложением. Бочвар далее различает:

1) внутреннюю форму утверждения, отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации — соответственно x; не-X; X и Y; X или Y; если X, то Y;

2) внешнюю форму — соответственно: X верно; X ложно; X верно и Y верно; X верно или Y верно; если X верно, то Y верно.

Для предложений эти формы эквивалентны. Различие их для высказываний обнаруживается при подстановке на место X (или Y) бессмысленного высказывания: в первом случае получим бессмысленное высказывание, во втором — нет. Мы охарактеризуем систему Бочвара в принятой у нас символике.

Значения истинности суть 1 (истинно), 2 (бессмысленно) и 3 (ложно). Отмеченное значение — 1. Основные функции (внутренняя конъюнкция, внутреннее отрицание, внешнее отрицание и внешнее утверждение):

1)

Kab	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	2
3	3	2	3

2) $[Na] = 4 - [a]$;

3) $[N^*a] = 3$, если $[a] = 1$ или $[a] = 2$,
$[N^*a] = 1$, если $[a] = 3$;

4) $[Va] = 1$, если $[a] = 1$,
$[Va] = 3$, если $[a] = 2$ или $[a] = 3$.

Производные функции (внешние функции, аналогичные внутренним, отмечаем звездочкой):

5) $[Aab] = [NKNaNb]$;
6) $[Cab] = [NKaNb]$;
7) $[Rab] = [KCabCba]$;
8) $[K^*ab] = [KVaVb]$;
9) $[A^*ab] = [AVaVb]$;
10) $[C^*ab] = [CVaVb]$;
11) $[R^*ab] = [KC^*abC^*ba]$;
12) $[Sab] = [KR^*abR^*NaNb]$;
13) $[Ta] = [NAVaN^*a]$.

Для функции T матрица имеет вид

a	Ta
1	3
2	1
3	3

Очевидно, если формула Ta есть тавтология, то $[a] = 2$, т.е. a бессмысленна.

Затем строится узкое исчисление предикатов. Обозначения:

1) (a) и (Ea) — классические кванторы;
2) $(\forall a)$ и $(\exists a)$ — неклассические кванторы;
3) $f, f^1, f^2, \ldots$ — предикатные переменные.

Сокращающие определения:

1) $(Ea)f(a) = Df \cdot N(a)Nf(a)$;
2) $(\exists a)f(a) = Df \cdot (Ea)Vf(a)$;
3) $(\forall a)f(a) = Df \cdot (a)Vf(a)$.

Определение доказуемой формулы:

1) тавтологии трехзначной логики (I) суть доказуемые формулы;
2) формулы II суть доказуемые формулы;
3) формулы, получаемые из I и II по правилам III, суть доказуемые формулы.

Формулы II:

1) $C^*(a)f(a)f(b)$;
2) $C^*f(b)(\exists a)f(a)$;
3) $C^*T(a)f(a)(\exists a)Tf(a)$;
4) $C^*(\exists a)Tf(a)T(a)f(a)$.

Правила III:

1) из a и b получается Kab;
2) из a и C^*ab получается b;
3) подстановка на место переменных всех трех видов (как в классическом исчислении);
4) из $C * ab$ получается $C^*a(a)b$, из C^*ba получается $C^*(\exists a)ba$, где a не входит в связанном виде в b.

Расширенное исчисление предикатов получается путем расширения области индивидов за счет включения в нее всех формул, возможных в узком исчислении.

Цель построенного исчисления — устранить парадоксы Рассела и Вейля путем доказательства бессмысленности соответствующих выражений. Парадокс Рассела является чисто логическим. Получается он так. Предикат от одного переменного называется предикатом свойства. Вместо $f(a)$ для краткости будем писать φ. Выражение φ означает свойство, которое принадлежит самому себе. Приняв определение

$$Pd(\varphi) = Df \cdot \varphi(\varphi),$$

в классической логике получим доказуемую формулу

$$RNPd\,(NPd)\,Pd(NPd).$$

Парадокс Вейля получается при условии присоединения к классическому исчислению предикатов определения

$$H(d) = Df\cdot\,(E\varphi)KQ(d,\varphi)N\varphi(d),$$

где область значений d есть множество символов, обозначающих свойства, а область значений φ — множество самих свойств (формулы $Q(d,\varphi)$ читается как «d обозначает φ»), и доказуемых формул:

1) $Q(«H», H)$;

2) $CQ(«H», \varphi)(f)Cf(\varphi)f(H)$

(их смысл — «H» обозначает H и только H). В расширенной таким образом классической логике оказывается доказуемой формула

$$RH(«H»)NH(«H»).$$

В обоих случаях получается, что существует такая формула a, для которой имеет силу

$$RaNa,$$

т. е. доказуема логически противоречивая формула.

В логике же Бочвара, однако, доказуемы формулы

$$TPd(NPd),\quad TNPd(NPd),\quad TH(«H»),\quad TNH(«H»),$$

т. е. выражения

$$Pd(NPd),\quad NPd(NPd),\quad H(«H»),\quad NH(«H»)$$

бессмысленны.

Другим примером смысловых приложений многозначной логики являются работы, в которых идеи и аппарат многозначной логики используются для преодоления ряда философских и логических трудностей квантовой механики. Это, например, работы Биркгофа и Неймана [15], Детуш-Феврие [21], Рейхенбаха [52] и других авторов. Здесь высказываются различные точки зрения. Отметим две из них.

По мысли Детуш-Феврие, логическая теория есть теория бытия, отражающая общие свойства мира. Одна логическая теория может быть истинной для одной части мира и неистинной для другой. Двузначная логика истинна для макромира, но не для микромира. Для последнего вместо двузначной имеет силу трехзначная логика дополнительности.

Иной концепции придерживается Рейхенбах. По его мнению, логическая теория не претендует на то, чтобы быть истинной общей теорией мира. Она относится лишь к языку науки, в частности, к языку микрофизики и языку макрофизики), и может быть использована для устранения логических трудностей, возникающих без ее применения.

Книга квантовых явлений, полагает Рейхенбах, написана на языке трехзначной логики. Говорить об истинности или ложности высказываний можно лишь тогда, когда можно осуществить их проверку. Если последняя невозможна, высказывания не являются истинными и не являются ложными. Их, в таком случае, следует оценивать третьим значением истинности, допустим, «неопределенно». К числу неопределенных относятся высказывания о ненаблюдаемых объектах. И если физик придерживается привычных способов рассуждения, уместных для микроявлений, он приходит к «казуальным аномалиям» (частица производит одновременные воздействия на места, в которых она сама не находится; поле внезапно стягивается в точечный объект и т п.) Выход Рейхенбах видит в зачислении ряда высказываний о микроявлениях (о ненаблюдаемых объектах) в класс неопределенных. Для установления же правил оперирования с ними нужна трехзначная логика.

Трехзначная логика Рейхенбаха имеет (в нашей записи) такой вид. Значения истинности суть 1 (истинно), 2 (неопределенно) и 3 (ложно). Отмеченное значение есть 1. Употребляются следующие функции:

N^1x —циклическое отрицание;
N^2x — диаметральное отрицание;
N^3x — полное отрицание;
Kxy — конъюнкция;
Axy — дизъюнкция;
C^1xy — стандартная импликация;
C^2xy — альтернативная импликация;
C^3xy — квазиимпликация;
R^1xy — стандартная эквивалентность;
R^2xy — альтернативная эквивалентность.

Они определяются матрицами

x	N_x^1	N_x^2	N_x^3
1	2	3	2
2	3	2	1
3	1	1	1

x	y	Kxy	Axy	C^1xy	C^2xy	C^3xy	R^1xy	R^2xy
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	3	2	2	3
3	1	3	1	3	3	3	3	3
1	2	2	1	1	1	2	2	3
2	2	2	2	1	1	2	1	1
3	2	3	2	3	1	2	2	3
1	3	3	1	1	1	2	3	3
2	3	3	2	1	1	2	2	3
3	3	3	3	1	1	2	1	1

В системе Рейхенбаха являются тавтологиями формулы

$R^1xN^2N^2x$,

$R^1xN^1N^1N^1x$,

$R^1N^3xN^3N^3N^3x$,

$R^1N^3xAN^1xN^1N^1x$,

т. е. правило двойного отрицания сохраняется только для диаметрального отрицания. Закон исключенного третьего для диаметрального отрицания не сохраняется. Для циклического отрицания имеет силу закон исключенного четвертого

$$AAxN^1xN^1N^1x \quad \text{и} \quad R^1AxN^1N^1xN^3x.$$

Закон противоречия сохраняется в таких формах:

$$N^3KxN^3x, \quad N^3KxN^1x, \quad N^3KxN^2x.$$

Правила Де Моргана сохраняются только в форме

$$[N^2Kxy] = [AN^2xN^2y] \quad \text{и} \quad [N^2Axy] = [KN^2xN^2y].$$

Дистрибутивные законы сохраняются, как в двузначной логике. Правило контрапозиции сохраняется в двух формах:

$$R^1C^1N^2xyC^1N^2yx \quad \text{и} \quad R^1C^2N^3xyC^2N^3yx.$$

Разложение эквивалентности сохраняется в форме

$$R^1R^1xyKCxyCyx$$

и

$$R^2R^2xyKKC^2xyC^2yxKC^2N^2xN^2yC^2N^2yN^2x.$$

Разложение импликации сохраняется в форме

$$R^1C^2xyN^1N^2AN^3xy.$$

Приведение к абсурду сохраняется в форме

$$R^1C^1C^1xN^3xN^3x \text{ и } C^2C^2xN^3xN^3x.$$

Для высказываний, принимающих значения только истинно (1) и ложно (3), закон исключенного третьего сохраняется для диаметрального отрицания: если x есть только истинно-ложное высказывание, то AxN^2x есть тавтология.

Таким образом, в построении Рейхенбаха, как и в логике Бочвара, происходит как бы дифференциация логических знаков и относящихся к ним правил, — получается более богатый и тонкий аппарат для анализа взаимоотношений высказываний в науке.

Среди формул, которые можно построить с помощью введенных выше знаков трехзначных функций, содержатся такие, которые всегда истинны, всегда ложны, всегда неопределенны, только истинны или ложны, только истинны и неопределенны, только ложны и неопределенны, могут принимать все три значения. Из них Рейхенбах выделяет формулы, имеющие характер формул двузначной логики (являющиеся только истинными или ложными). По его мнению, законы квантовой механики помещаются именно в этот класс истинно-ложных формул (в интерпретации — высказываний). Получается интересная ситуация: законы квантовой механики двузначны, а правила рассуждения для них формулируются в трехзначной логике. Но это вполне соответствует пониманию логики как средства усовершенствования языка науки.

Пусть x, y, z интерпретируются как высказывания. Если для двух высказываний x и y истинно утверждение

$$R^2AxN^1xN^1N^1y,$$

то такие высказывания Рейхенбах называет дополнительными (или дополняющими). Поскольку AxN^1x истинно тогда, когда x истинно и когда x ложно, то N^1N^1y должно быть истинным. А это имеет место тогда, когда y неопределенно. Таким образом, x и y дополняют друг друга, если в отношении них выполняется следующее: если x истинно или ложно, то y неопределенно. Условие дополнительности симметрично, т. е. если истинно приведенное выше утверждение, то истинно

$$R^2AyN^1yN^1N^1x.$$

Условие дополнительности можно сформулировать для трех и более высказываний. Для трех высказываний оно имеет вид

$$KR^2AxN^1xN^1N^1yR^2AyN^1yN^1N^1z.$$

Условие дополнительности можно использовать, например, для описания фактов взаимного ограничения точности измерения величин (в частности, соотношения неопределенностей):

$$C^2A[(e^1, t) = u][N^1(e^1, t) = u]N^1N^1[(e^2, t) = v],$$

что читается так: если верно или неверно, что значение e^1 во время t есть u, то высказывание о том, что значение e^2 во время t есть v, будет неопределенным. В силу симметричности, e^1 и e^2 можно поменять местами.

§ 4. Парадокс изменения

Нам представляется целесообразным использование идеи многозначности высказываний в решении парадокса изменения. Парадокс изменения есть обобщение известного парадокса Зенона «Движущееся тело находится и в то же время не находится в данном месте пространства». Его можно сформулировать так: 1) «Возникающий (исчезающий) предмет существует и в то же время не существует»; 2) «Изменяющийся предмет имеет и в то же время не имеет данное свойство».

Состояния предмета S, описываемые высказываниями «S имеет свойство P» («S существует») и «S не имеет свойства P» («S не существует»), назовем стационарными. Эмпирически замечены случаи, когда осуществляется переход предмета из одного состояния в другое. Такое состояние предмета назовем переходным. Для описания его не годятся оба высказывания о стационарных состояниях. Они оба в этом случае неверны. Вопрос о таких состояниях в литературе по многозначной логике обсуждался, например, в [53].

Запишем сказанное, используя логические знаки классической (и, соответственно, двузначной) логики. Пусть δ есть высказывание о наличии у изменяющегося предмета свойства о существовании предмета), а $N\delta$ — об отсутствии у этого предмета того же свойства (о том, что этот предмет не существует). Утверждение

$$KN\delta NN\delta$$

есть утверждение, истинное в отношении переходного состояния. Поскольку $NN\delta$ эквивалентно δ, будет истинно утверждение

$$K\delta N\delta$$

в отношении к переходному состоянию предмета. Это и есть парадокс изменения. Если a есть переменная, то, как следствие из него, получаем

$$(\exists a)KaNa.$$

На эту тему существует обширная литература. Мы не будет ее здесь обсуждать. Заметим лишь то, что в подавляющем большинстве случаев не видят чисто логической стороны парадокса и привлекают сложный материал из истории физики и математики, который, по нашему мнению, не имеет никакого отношения к данному парадоксу и лишь еще больше запутывает довольно простой вопрос.

Мы базируется здесь на двух простых, тесно связанных идеях. Первая идея принадлежит Колмогорову [5] и заключается в том, что надо различать два вида отрицания: отрицание соответствия предиката субъекту и отрицание высказывания в целом. Второе шире первого и не всегда сводится к нему. Обобщая эту идею, мы различаем два вида отрицания следующим образом:

1) частное отрицание, которое ставится перед логическим знаком (перед квантором, перед модальным знаком, перед знаком атрибутивности и т. п.);

2) общее отрицание, которое относится к высказыванию в целом («не так, как утверждается в некотором высказывании»).

Но такое различение ведет к заметным формальным последствиям лишь в том случае, когда приходится иметь дело с тремя и более возможностями: общее отрицание оказывается неоднозначным, а частное отрицание выступает как одна из возможностей. Это равносильно признанию многозначности высказываний. Именно так и обстоит дело в нашем случае. Так, если кто-то утверждает, что некоторый предмет S имеет свойство P, а мы ему скажем «нет» («дело обстоит не так»), то мы будем иметь в виду не обязательно второе стационарное состояние предмета S (он не имеет свойства P); мы можем иметь в виду также и переходное состояние. В плане значений истинности это означает, что рассматриваемое утверждение может сопоставляться с тремя различными состояниями предмета и, следовательно, иметь одно из трех различных значений истинности в зависимости от состояния.

Обозначим частное отрицание δ символом $\delta(N)$, а $N\delta$ будем рассматривать как общее отрицание. Знаки A, K и N будем рассматривать как знаки классического исчисления предикатов, эксплицирующие обычные «или», «и», «не», оставив пока в стороне матричную интерпретацию. Чтобы не усложнять дело, опустим случаи, когда высказывание невозможно проверить. Значения истинности рассматриваемых высказываний можно определить так:

1) «δ» истинно если δ; «δ» ложно, если $\delta(N)$; «δ» неопределенно, если $KN\delta N\delta(N)$;

2) «$\delta(N)$» истинно, если $\delta(N)$; «$\delta(N)$» ложно, если δ; «$\delta(N)$» неопределенно, если $KN\delta N\delta(N)$;

3) «$KN\delta N\delta(N)$» истинно, если $KN\delta N\delta(N)$, и ложно, если $A\delta\delta(N)$.

Высказывания δ, $\delta(N)$ и $KN\delta N\delta(N)$ в одно время принимают значение «истинно», в другое — «неопределенно», в третье — «ложно».

Частное отрицание обладает следующим свойством: оно может стоять только перед логическим знаком; причем перед одним логическим знаком может стоять не более одного знака частного отрицания. Это требование легко реализовать в определении формулы: последнее надо построить так, чтобы выражение, в котором знак частного отрицания фигурирует по крайней мере два раза подряд или фигурирует в неположенном для него месте, не считалось формулой. Очевидно, в высказываниях отступление от этого правила будет давать неправильно построенные высказывания. Отсюда следует, что всевозможные правила двойного отрицания для частного отрицания не имеют силы. Поэтому высказывание

$$KN\delta N\delta(N)$$

нельзя заменять на

$$K\delta N\delta,$$

поскольку оно означает: «Имеет место не состояние δ и не состояние $\delta(N)$, а третье, переходное состояние».

Здесь не представляется возможным рассмотреть последствия, вытекающие из различения общего и частного отрицаний для логики вообще. Ограничимся лишь кратким замечанием, непосредственно связанным с нашей темой.

В принципе, правила оперирования с высказываниями можно сформулировать и без матричных интерпретаций логических знаков. Но последние удобны, и в целом ряде случаев они так или иначе предполагаются в неявном виде. В рассматриваемом нами случае имеется одна особенность, с этой точки зрения представляющая интерес.

Пусть значения истинности суть 1 (истинно), 2 (неопределенно) и 3 (ложно). Сказанное выше о значениях истинности высказываний, содержащих δ, можно записать таблицами

δ	$\delta(N)$
1	3
2	2
3	1

δ	$KN\delta N\delta(N)$
1	3
2	1
3	3

Как видим, при чтении второй таблицы справа налево получается неоднозначный результат для значения 3.

Определение общего отрицания трехзначной матрицей при заданных условиях сталкивается с затруднениями. Для него надо сохранять

правила двойного отрицания, правила Де Моргана, законы исключенного третьего и противоречия классической логики — таков смысл, который ему фактически навязывается в языках (и мы его сохраняем в теории). Это — предпосылка. Выполнить это требование можно лишь в двузначной логике, в чем легко убедиться, пересмотрев все трехзначные варианты или в... однозначной, аналогичной, с формальной точки зрения двузначной.

Определим Na следующим образом:

1) если a является истинным, то Na не является истинным (если $[a] = 1$, то $[Na] \neq 1$);
2) если $[a] \neq 1$, то $[Na] = 1$;
3) если $[Na] = 1$, то $[a] \neq 1$;
4) если $[Na] \neq 1$, то $[a] = 1$;
5) если $[a] = 2$, то $[Na] \neq 1$;
6) если $[a] = 3$, то $[Na] \neq 1$.

В связи с таким определением N надо, соответственно, определить и знаки K и A:

1) если $[a] = 1$ и $[b] = 1$, то $[Kab] = 1$,
   если $[a] \neq 1$ или $[b] \neq 1$, то $[Kab] \neq 1$;
2) если $[a] \neq 1$ и $[b] \neq 1$, то $[Aab] \neq 1$,
   если $[a] = 1$ или $[b] = 1$, то $[Aab] = 1$.

Если мы условимся считать, что в матричном построении значения суть 1 и 4, отмеченное значение есть 1, то, заменив везде $[a] \neq 1$ на $[a] = 4$, мы получим обычную двузначную логику с функциями A, K и N.

Теперь можно показать, что утверждения

$A\delta\delta(N)$,

$A\delta KN\delta N\delta(N)$,

$A\delta(N)KN\delta N\delta(N)$

не всегда истинны. Это означает, что закон исключенного третьего не имеет силы для частного отрицания. Всегда истинными будут утверждения

$A\delta N\delta$,

$A\delta(N)N\delta(N)$,

$AKN\delta N\delta(N)NKN\delta N\delta(N)$,

$NK\delta\delta(N)$,

$NK\delta KN\delta N\delta(N)$,

$NK\delta(N)KN\delta N\delta(N)$.

Таким образом, закон исключенного третьего остается незыблемым для общего отрицания, а закон противоречия сохраняется и для частного отрицания. Поскольку

$$[N\delta(N)] \neq [\delta],$$

нельзя получить

$$CKN\delta N\delta(N)K\delta N\delta,$$

где Cab есть сокращение $ANab$.

§ 5. Многозначность высказываний и правила вывода

Центральная задача логики — исследование правил вывода (логического следования). Эти правила вырабатываются с таким расчетом, чтобы из истинных посылок получились истинные следствия. Так что при построении теории вывода достаточно оперировать термином «истинно». Сам же процесс вывода вообще не зависит от значений истинности посылок. При осуществлении выводов анализируют структуру посылок: выделяют термины, высказывания, логические знаки и взаимное их расположение. Зная правила, относящиеся к такого рода структурам, совершают переход к тому или иному разрешаемому этим правилом следствию. Если посылки не все истинны, то нельзя признать истинным следствие. Однако само получение следствий из посылок осуществляется по одним и тем же правилам как при истинных, так и при неистинных посылках. Благодаря этим обстоятельствам создается впечатление, будто многозначная логика не затрагивает теорию вывода; на последнюю влияют какие-то внелогические соображения; многозначная же логика в лучшем случае может использоваться как сугубо формальное средство в их реализации.

Рассмотренных примеров, однако, достаточно для того, чтобы убедиться в ошибочности такого впечатления. Во-первых, многозначная логика влияет на теорию вывода в связи с другими факторами и косвенно, через ряд промежуточных операций. Обнаруживание многозначности высказываний позволяет осуществить дифференциацию ряда имеющихся логических знаков и ввести новые. С другой стороны, потребность в новых логических знаках заставляет как-то модифицировать имеющиеся, что может получить обоснование путем допущения многозначности высказываний. А все это ведет к тому, что одни правила, связанные с этими логическими знаками, исключаются из числа всеобщих, другие дифференцируются и уточняются, третьи вводятся вновь и т. д. Во-вторых, влияние это не всегда обнаруживается явно, через конструирование многозначных логических систем. В предшествующем параграфе мы видели, что различение частного и общего

отрицания приобретает практический смысл лишь в связи с наличием трех взаимоисключающих возможностей, в описании свойств и взаимоотношений которых фигурируют эти отрицания. Последствия этого различения для правил вывода можно рассмотреть вообще не используя семантических терминов. Но это не устраняет того обстоятельства, что если сложившуюся здесь ситуацию воспроизвести в терминах значений истинности, то потребуется более двух значений.

Глава 7

Универсальность логики

§ 1. Проблема неуниверсальности логики

Существуют две концепции в понимании законов логики — концепция универсальности логики и концепция неуниверсальности логики. Сторонники первой концепции считают, что законы логики не зависят от особенностей той или иной предметной области: один и тот же закон логики не может в одной области исследования вести к правильным, а в другой — к неправильным результатам. Сторонники второй концепции утверждают нечто противоположное: законы логики зависят от предметной области, один и тот же закон логики в одних условиях ведет к истине, в других — к заблуждению.

Концепция неуниверсальности логики подкрепляется ссылками на интуиционистскую концепцию математики, на «логику микромира» и на различного рода парадоксы, создающие видимость допустимости логических противоречий.

Используя язык классической логики, основные пункты концепции неуниверсальности логики можно записать так:

$(\exists a)NCNNaa$,

$(\exists a)NAaNa$,

$(\exists a)KaNa$,

$(\exists a)(\exists b)NCKabKba$

и т. п. И, конечно, делаются ссылки на многозначную логику.

Но почему именно такие законы неуниверсальны, а не другие? Имеются ли все-таки законы, которые остаются универсальными? Ведь если допустить, что все законы неуниверсальны, то не останется никакой логики. Ответы на такого рода вопросы для концепции неуниверсальности логики затруднительны. По нашему мнению, эта концепция есть результат недоразумений.

§ 2. Законы логики

Законы логики суть соглашения относительно смысла некоторых знаков языка, относительно правил оперирования ими, а также вытекающие из этих соглашений следствия. Эти знаки суть знаки «и», «или»,

«не», «все», «некоторые», «следует» и т. п. В естественных языках эти соглашения вырабатывались стихийно, в результате длительной эволюции языка и истории познания. Каждому человеку они навязываются как нечто независящее от их воли. Потому правила оперирования ими представляются ему своего рода законами природы. Так, утверждение «X или не-X» воспринимается как некоторое всеобщее утверждение о мире, а не как соглашение о свойствах знаков «или» и «не». Принудительная сила законов логики для людей есть сила их собственных соглашений. Она кажется какой-то мистической силой лишь потому, что каждый отдельный человек усваивает язык в готовом виде и не волен отменить эти соглашения.

В силу того, что процесс выработки логических знаков языка протекает стихийно и в «контексте» прочих социальных явлений и процессов, естественным следствием этого является неоднозначность логических знаков, смешение различных логических знаков, неявное употребление их и т. п. Наука логика, изучая эти знаки и связанные с ними правила, осуществляет, вместе с тем, работу по их усовершенствованию — дифференцирует, устраняет двусмысленности, выявляет неявные свойства, устанавливает взаимоотношения различных знаков и т. п. Логика делает это, вводя особые знаки и принимая особые соглашения относительно их свойств и взаимоотношений. Соглашения, принятые в логике, рассматриваются как экспликаты для соглашений, сложившихся в языке исторически. Насколько первые близки ко вторым — это другой вопрос. Здесь есть свои проблемы (например, «парадоксы» материальной и строгой импликации). Для нас важно то, что формулируемые наукой логикой законы суть не что иное, как соглашения относительно свойств и взаимоотношений вводимых здесь знаков и следствия из этих соглашений. Методы современной логики это обнаруживают с полной очевидностью (аксиомы, правила вывода, определения функций и т. д. принимаются по соглашению, а не являются результатом эмпирических исследований). Так что с этой точки зрения ни о какой неуниверсальности законов логики и речи быть не может. Если кто-то сомневается в применимости какого-то закона логики в некоторых условиях, то это сомнение есть показатель того, что либо соглашения были построены плохо, либо сомневающийся вкладывает другой смысл в употребляемые логические знаки.

Иное дело — в различных условиях используются различные логические знаки и, естественно, различные логические правила. Например, в одном случае в рассуждении употребляется первая фигура силлогизма, а в другом — закон приведения к абсурду. Никакой дискуссии такого рода факты не вызывают, пока различие логических знаков явное. Но как только оказывается, что логические знаки очень близки

по смыслу и различие их не замечают, то возникают недоразумения, вроде концепции неуниверсальности законов логики. Такими, например, являются случаи смешения различных форм отрицания и конъюнкции, которые мы рассмотрим ниже.

Разумеется, соглашения о смысле логических знаков в языках и в науке логике нельзя считать вечными, неизменными и раз навсегда данными. Но этот факт не влияет на решение вопроса об универсальности логики: некоторое стабильное состояние предполагается при любом его решении.

§ 3. «Неуниверсальные» законы логики

Выше мы уже видели, что парадокс изменения есть следствие смешения частного и общего отрицания, построения рассуждения в рамках правил двузначной логики и несоответствующего им допущения третьего переходного состояния изменяющихся предметов. Здесь не представляется возможным проанализировать другие случаи кажущейся правомерности высказываний типа $KaNa$. Да в этом и нет необходимости. Если где-то подобное высказывание получилось как истинное, то заранее можно сказать: в этом случае K, N или оба эти знака употреблены в смысле, отличном от того, какой придан им в логике.

Исключение некоторых законов классической логики в интуиционистской логике основывается, как уже отмечалось, на обнаружении того обстоятельства, что высказывания могут быть не только истинными или ложными: имеются случаи, когда невозможно установить, истинно или ложно высказывание. Эту ситуацию можно точно так же рассматривать посредством различения общего и частного отрицания. Пусть $a(N)$ есть высказывание, которое отличается от a тем и только тем, что в нем имеется знак частного отрицания. Как и в случае с парадоксом изменения, утверждение $Aaa(N)$ будет уже не всегда верным. Но это не отменяет $AaNa$. Утверждение $Na(N)$ не всегда можно заменить на a. Но это не отменяет правила замены NNa на a, если такое правило принято при определении N. Поскольку общее и частное отрицание не различают, т. е. $a(N)$ рассматривают как Na, то исключение $AaNa$ и правила замены NNa на a фактически означает иное определение знака N, чем в классической логике.

Но если логическая теория хочет учесть фактически встречающееся различие общего и частного отрицания, то можно сохранить классическое отрицание как общее, а для частного принять дополнительное

определение:

1) $AAaa(N)KNaNa(N)$;
2) $NKaa(N)$;
3) $NKaKNaNa(N)$;
4) $NKa(N)KNaNa(N)$.

В связи с логикой микромира высказывается намерение исключить из числа законов логики (в частности) коммутативность конъюнкции, т. е. правила замены Kab на Kba. Это намерение оправдывается тем, что между объектами квантовой механики имеются какие-то временные соотношения, так что временный порядок может играть роль.

Нам представляется более целесообразным другой путь, а именно — ввести особый логический знак некоммутативной или упорядоченной конъюнкции. Будем для этой цели употреблять символ K°. Если даже мы допустим, что a и b двузначны (1 — истинно, 3 — ложно), то и при этом допущении $K^\circ ab$ окажется по крайней мере трехзначной в силу самого факта упорядоченности a и b. В самом деле, эту их упорядоченность (пусть a — первое по порядку) можно записать так: $[K^\circ ab] = 1$, если и только если $[a] = 1$ и $[b] = 1$; $[K^\circ ab] = 3$, если и только если $[a] = 1$ и $[b] = 3$. Какое значение будет иметь $K^\circ ab$ при $[a] = 3$? Это не может быть 1, что очевидно. Но это не может быть и 3, так как при этом исчезает ее отличие от Kab. Приходится допустить третье значение (неопределенно, 2). Теперь можно дать такую таблицу, учитывая возможность значения 2:

$K^\circ ab$	1	2	3
1	1	3	3
2	2	2	2
3	2	2	2

Из определения видно, что не всегда $[K^\circ ab] = [Kab]$ и не всегда $[K^\circ ab] = [K^\circ ba]$. Определив импликацию как у Лукасевича, получим: если $[a] = 2$ и $[b] = 1$, то $[CK^\circ abK^\circ ba] = 2$. Формула $CK^\circ abK^\circ ba$ не есть тавтология. Значит, среди правил вывода нет правила $K^\circ ab \vdash K^\circ ba$. Правила же $K^\circ ab \vdash a$ и $K^\circ ba \vdash b$ сохраняются.

§ 4. Логика и сферы мира

Различные сферы мира (предметные области) различаются с точки зрения тех логических знаков, которые используются при их описании. Так, в одних случаях уместна классическая конъюнкция, в других — неклассическая (упорядоченная). Различие используемых знаков ведет к тому, что используются различные логические законы. Но это

ни в коем случае не означает того, что одни и те же логические законы верны для одной области мира и неверны для другой.

Возможно, конечно, рассуждать таким образом логика отражает некоторые свойства действительности, опирается на онтологические обобщения; следовательно, различие свойств различных областей действительности (например, макромира и микромира, конечных и бесконечных множеств) порождает различие систем логических правил для наук, отражающих эти области. Но можно рассуждение построить иначе: несмотря на различие свойств различных сфер действительности, имеются некоторые общие свойства, отображаемые правилами логики; таким образом, делить мир на сферы, требующие для своего отображения различных правил логики, будет нелепым. Так что ссылки на отражение мира в такого рода случаях ничего не дают определенного.

Многозначная логика не дает никаких аргументов в пользу концепции неуниверсальности логики, хотя и можно построить любое число многозначных матриц, «оправдывающих» исключение любого закона классической логики. Скорее наоборот, обнаружение многозначности высказываний позволяет ввести коррективы в логические теории, осуществить нужные различения близких по смыслу логических знаков, определить новые знаки и т. п. Благодаря этому получают объяснение случаи кажущихся отклонений от законов логики. Есть одна и только одна логика для любых наук (для любых областей познания). Вопреки мнению отдельных философов, нет никакой особой «логики микромира», отличной от «логики макромира». Существуют различные разделы и направления в рамках одной логики, которые могут стимулироваться потребностями какой-то определенной области конкретных наук и иметь преимущественные приложения именно в них.

Литература

1. *Бочвар Д. А.* Об одном трехзначном исчислении // Математический сборник. 1938. Т. 4 (46), № 2.
2. *Бочвар Д. А.* К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления // Математический сборник. 1943. Т. 12 (54), № 3.
3. *Гаврилов Г. П.* О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. 1965. Т. 15.
4. *Зиновьев А. А.* Философские проблемы многозначной логики. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
5. *Колмогоров А. Н.* О принципе *tertium non datur* // Математический сборник. 1925. № 32.
6. *Кузнецов Б. Г.* Основы квантово-релятивистской логики // Логические исследования. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. М.: Физматгиз, 1959.
8. *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений // Труды Математического института АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 52.
9. *Шестаков В. И.* Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем // Вычислительная математика и вычислительная техника. Сб. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
10. *Шестаков В. И.* О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний // Применение логики в науке и технике. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
11. *Яблонский С. В.* Функциональные построения к k-значной логике // Труды Математического института АН СССР. 1958. Т. 51.
12. *Ackermann W.* Die Begründug eine strengen Implikation // Journal of Symbolic Logic. 1956. Vol. 21, № 2.
13. *Belluce L. P.* Further Results on Infinite-Valued Predicate Logic // Journal of Symbolic Logic. 1964. Vol. 29, № 2.
14. *Belluce L. P., Chang C. C.* A Weak Completeness Theorem for Infinite-valued First-order Logic // Journal of Symbolic Logic. 1963. Vol. 28.
15. *Birkhoff G., Neumann J. (von).* The Logic of Quantum Mechanics // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37, № 4.
16. *Brouwer L. E. J.* Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1924. Bd. 154. H. 1.
17. *Brouwer L. E. J.* Intuitionische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe // Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1925. Bd. 33.
18. *Chang C. C.* Algebraic Analysis of Many-valued Sentential Logic // Transactions of the American Mathematical Society. 1958. Vol. 88.

19. *Chang C. C.* New Proof of the Completeness of the Łukasiewicz Axioms // Transactions of the American Mathematical Society. 1959. Vol. 93.
20. *Clay R. E.* Note on Slupecki T-functions // Journal of Symbolic Logic. 1962. Vol. 27, № 1.
21. *Destouches-Février P.* La structure des théories physiques. Paris, 1951.
22. *Evans T., Schwartz P. B.* On Slupecki T-functions // Journal of Symbolic Logic. 1958. Vol. 23. № 3.
23. *Gentzen G.* Untersuchungen über das logiche SchlieŸen // Mathematische Zeitschrift. 1934–1935. № 39.
24. *Glivenko V. M.* Sur la logique de M. Brouwer // Academie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences. 1928. 5 serie. T. XIV.
25. *Glivenko V. M.* Sur quelques points de la logique de M. Brouwer // Academie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences. 1929. T. XV.
26. *Gödel K.* Zum intuitionischen Aussagenkalkül // Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. 1932. № 69.
27. *Creniewski H.* Elementy logiki formalnej. Warszawa, 1955.
28. *Creniewski H.* 2^{n+1} wartości logicznych // Studia filozoficzne. 1957. № 2. H. 3.
29. *Hay L. S.* Axiomatization of the Infinite-valued Predicate Calculus // Journal of Symbolic Logic. 1963. Vol. 28, №. 1.
30. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionischen Logik // Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse. 1930.
31. *Heyting A.* La conception intuitionste de la logique // Les etudes philosophique. 1956. № 2.
32. *Heyting A.* Intuitionism. Amsterdam, 1956.
33. *Hilbert D., Ackermann W.* Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin, 1938.
34. *Jobe W.H.* Functional Completeness and Canonical Forms in Many-valued Logics // Journal of Symbolic Logic. 1964. Vol. 29, № 2.
35. *Kalinowski J.* Teoria zdac normatywnych // Studia logica. 1953. T. 1.
36. *Kleene S. C.* Introduction to Metamathematics. New York, Amsterdam, Gröningen, 1952.
37. *Kolmogoroff A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Mathematische Zeitschrift. 1932. Bd. 35, № 1.
38. *Kotarbicski T.* Wykłady z dziejyw logiki. Łydź, 1957.
39. *Łukasiewicz J.* Logika tryjwartościowa // Ruch Filozoficzny. Lwyw, 1920. R. 5. № 9.
40. *Łukasiewicz J.* O pojkciu możliwości // Ruch Filozoficzny. Lwyw, 1920. R. 5. № 9.
41. *Łukasiewicz J.* Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III. R. XXIII. Warszawa, 1930.
42. *Łukasiewicz J., Tarski A.* Untersuchungen über den Aussagenkalkül // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział II. R. XXIII. Warszawa, 1930.

43. *Łukasiewicz J.* System logiki modalnej. Z zagadniec logiki i filozofii. Warszawa, 1961.
44. *Łukasiewicz J.* Aristotle's Syllogistic. Dublin, 1954.
45. *Lewis C. Y., Langford C. H.* Symbolic Logic. New York, 1932.
46. *Mostowski A.* Axiomatizability of Some Many Valued Predicate Calculi // Fundamenta mathematica. 1961. Vol. 50.
47. *Meredith C. A.* The Dependence of an Axiom of Łukasiewicz // Transactions of the American Mathematical Society. 1958. Vol. 87.
48. *Post E. L.* Introduction to a General Theory of Elementary Propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43, № 3.
49. *Prior A. N.* Time and Modality. Oxford, 1957.
50. *Rasiowa H.* O pewnym fragmencie implikacyjnego rachunku zdac // Studia ligica. 1955. T. III.
51. *Reichenbach H.* Wahrscheinlichkeitslehre. Leiden, 1935.
52. *Reichenbach H.* Philosophic Foundations of Quantum Mechanics. Berkeley, Los Angeles, 1946.
53. *Rosser J. B., Turquette A. R.* Many-valued Logics. Amsterdam, 1952.
54. *Rosser J. B., Turquette A. R.* A Note on the Deductive Completeness of M-valued Propositional Calculi // Journal of Symbolic Logic. 1950. Vol. 14, № 4.
55. *Rosser J. B.* Axiomatization of Infinite Valued Logic // Logique et Analyse. 1960. T. 11–12.
56. *Rosser J. B., Turquette A. R.* Axiom Schemes for M-valued Propositional Calculi // Journal of Symbolic Logic. 1945. Vol. 10, № 3.
57. *Rose A., Rosser J. B.* Fragment of Many-valued Statement Calculi // Transactions of the American Mathematical Society. 1958. Vol. 87.
58. *Rutledge I. D.* On the Definition of an Infinitely-many-valued Predicate Calculus // Journal of Symbolic Logic. 1960. Vol. 25, № 3.
59. *Scarpellini B.* Die Nichtaxiomatisdierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalkulus von Łukasiewicz // Journal of Symbolic Logic. 1962. Vol. 27, № 2.
60. *Słupecki J.* Pełny tryjwartościowy rachunek zdac // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III. R. XXIII. Warszawa, 1930.
61. *Słupecki J.* Pełny tryjwartościowy rachunek zdac // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III. R. XXIX. Warszawa, 1936.
62. *Słupecki J.* Kryterium pełności wielowartościowych systemyw logiki zdac // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III. R. XXIX. Warszawa, 1936.
63. *Słupecki J.* Pełny tryjwartościowy rachunek zdac // Roczniki Uniwersytetu Marii Curie—Skłądowskiej. Dział F. T. 1. Lublin, 1946.
64. *Turquette A. R.* Simplified Axioms for Many-valued Quantification Theory // Journal of Symbolic Logic. 1958. Vol. 23, № 2.
65. *Turquette A. R.* Independent Axioms for Infinite-valued Logic // Journal of Symbolic Logic. 1963. Vol. 28, № 3.
66. *Wajsberg M.* Aksiomatyzacja tryjwartościowego rachunku zdac // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III. R. XXIX. Warszawa, 1936.

67. *Wajsberg M.* Beiträge zum Metaaussagenkalkül // Monatsheft für Mathematik und Physik. 1935. Bd. 42.

68. *Webb D. L.* Generation of Any *n*-valued Logic by One Binary Operator // Proceedings on the National Academy od Sciences. 1935. Vol. 21.

69. *Webb D. L.* The Algebra od *n*-valued Logic // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III. R. XXIX. Warszawa, 1936.

70. *Zawirski Z.* Über das Verhältnis der mehrwertigen logik zur Wahrscheinlichkeitsrechung // Studia philosiphica. 1935. T. 1.

71. *Zawirski Z.* Geneza i rozwyj logiki intuicjonistycznej // Kwartalnik Filozoficzny. Kraków, 1946. T. XVI. Rz. 2–4.

72. *Zinoviev A. A.* Philosophical Problems of Many-valued Logic. Dordrecht-Holland, 1964.

Раздел III

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

В данном очерке излагается то понимание проблемы логического следования и тот способ ее решения, которые были намечены автором [3–5]. Сравнительно с упомянутыми работами здесь дается более краткое и более четкое изложение основной линии темы, опущены второстепенные детали, побочные вопросы и вариации одних и тех же идей, затрудняющие понимание сути дела, сделаны некоторые существенные исправления и дополнения. Проблема логического следования рассматривается здесь лишь на уровне общей теории логического следования.

§ 1. Одна особенность современной логики

Общеизвестно, что большая часть утверждений науки получается путем логического вывода из других утверждений, как логическое следствие последних. Общеизвестно также, что вопрос о том, когда одни утверждения логически следуют (выводятся, получаются по правилам логики, дедуцируются и т. п.) из других, с самого начала научной деятельности людей стал одним из центральных и получил разработку как основной вопрос особой науки — науки логики. И казалось бы, теперь читателя, интересующегося этим вопросом, достаточно отослать к учебникам логики и книгам, дающим более или менее полное и систематическое изложение теории вывода: последняя и дает развернутый ответ на вопрос о том, что такое логическое следование, эксплицирует (делает явным и уточняет) привычное его понимание.

Однако имеется ряд обстоятельств, позволяющих говорить о проблеме логического следования. Эти обстоятельства связаны с особенностями современной логики. Именно успехи современной логики в разработке теории вывода породили проблему логического следования, каким бы парадоксальным ни представлялся этот факт.

Современная логика есть прежде всего и по преимуществу совокупность определенного рода формальных построений (исчислений) и совокупность теоретических положений о правилах их конструирования, об их свойствах и взаимоотношениях. Эти построения допускают различные содержательные интерпретации. Использование их для описания каких-то сторон познавательной деятельности людей есть лишь одна из возможностей, хотя генетически оно и послужило предпосылкой их изобретения. Причем это использование связано с совокупностью довольно сложных абстракций и допущений, предполагает

некоторое предварительное понимание тех или иных познавательных операций. Естественно, встает вопрос о соответствии такого рода понимания этих познавательных операций и формул логических исчислений.

Дело в том, что формальные системы логики суть дедуктивные построения. При создании их первостепенное значение приобретают соображения удобства исследования их свойств, соображения математической простоты, изящества и т. п. Зачастую соображения, связанные с последующей интерпретацией их, вообще не принимаются во внимание. Следствием этого является возможность отрыва теоретических исследований от эмпирически данных фактов и возникновение несоответствий между этими фактами и интерпретированными некоторым образом формулами рассматриваемых построений. Разрешение же вопросов о том, как поступать с такого рода несоответствиями, требует какой-то системы абстракций и допущений, модификации имеющихся формальных построений и конструирования новых.

Но и независимо от указанных несоответствий преобладание дедуктивного метода ведет к существенной перестройке способов абстрагирования сравнительно с таковыми при «описательном» («эмпирико-аналитическом») методе, а значит — и к изменению отношения научных положений и эмпирических фактов. Дедуктивные построения уже нельзя рассматривать как продукт непосредственной абстракции от эмпирически данных фактов. Это, скорее, суть лишь удобные с какой-то точки зрения средства исследования этих фактов. Наконец, вообще невозможно судить о применимости тех или иных формальных построений в исследовании некоторой предметной области, если о ней нет никаких предварительных сведений, если она уже не изучена в какой-то мере на описательном уровне. В современной логике эта сторона дела оказалась сравнительно слабо развитой.

Все сказанное относится к логическому следованию в первую очередь. В самом деле, вполне законно встают следующие вопросы. Какими свойствами обладает логическое следование независимо от того или иного формального построения? Какие свойства данного формального построения позволяют использовать его для экспликации понятия логического следования и определения класса допустимых правил последнего? Каким априорным требованиям должно удовлетворять формальное построение, чтобы получить из него адекватную теорию логического следования? Что нужно добавить к данному формальному построению, чтобы получить теорию логического следования? Эти (и другие, связанные с ними) вопросы не стояли в старой (дометематической) логике. Они характерны лишь для современной логики. И лишь постольку, поскольку на них еще не даны исчерпывающие и бесспорные ответы, имеет смысл говорить о проблеме логического

следования. А в той мере, в какой на них даются конкретные ответы, складывается особое направление логики.

§ 2. Классическая теория логического следования

Буквами $A, B, C, X, Y, Z, A^1, A^2, \ldots, X^1, X^2, \ldots$ будем обозначать высказывания (суждения), употребляемые в обычных и научных языках. Тот факт, что из высказывания A по правилам логики получается (логически следует) высказывание B, будем записывать символом $A \vdash B$. Высказывание A называется посылкой, B — следствием или заключением.

Правила логического следования вырабатываются с таким расчетом, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия. Для современной логики характерно то, что класс этих правил устанавливается посредством тех или иных интерпретация логических исчислений. Так, класс правил логического следования для высказываний, построенных из простых высказываний с помощью знаков «не», «и», «или» и т. п., можно определить посредством классической пропозициональной логики.

Под классической пропозициональной логикой мы здесь имеем в виду следующее:

1) функционально полные двузначные матричные (истинностные) построения — двузначную пропозициональную алгебру; 2) аксиоматические построения (систему гильбертовского типа), дедуктивно эквивалентные двузначной пропозициональной алгебре, и вообще любые формальные системы, дедуктивно эквивалентные классическим аксиоматическим построениям (например, некоторые системы генценовского типа), — классические пропозициональные исчисления.

Проблема логического следования в ее специфической для современной логики форме и возникла в связи с интерпретацией классической пропозициональной логики в качестве общей теории дедукции.

Упомянутая выше интерпретация состоит в следующем:

1) пропозициональные формулы рассматриваются как высказывания;

2) знаки конъюнкции $(\cdot)$, нестрогой дизъюнкции $(\vee)$ и отрицания $(\sim)$ рассматриваются соответственно как «и», «или» (неисключающее) и «не»;

3) значения пропозициональных формул рассматриваются как истинность и ложность высказываний.

При такой интерпретации обнаруживается следующее свойство знака материальной импликации $(\supset)$: если $A \supset B$ истинно и A истинно, то B истинно. Оно позволяет рассматривать этот знак как

знак логического следования. В результате, тавтологии двузначной алгебры и доказуемые формулы классического исчисления, содержащие знак материальной импликации, получают интерпретацию как правила логического следования. Классическая пропозициональная логика здесь рассматривается как общая теория логического следования (вывода, дедукции). Эта концепция была высказана Расселом и Уайтхедом в «Principia Mathematica».

§ 3. Льюисовское направление

Льюису принадлежит также первое в современной логике решение поставленной им проблемы. Он построил для этой цели ряд логических систем $S^1 - S^5$, получивших название систем строгой импликации [35]. После Льюиса модальные понятия стали вводить как производные (см., например, [10], [46]).

«Парадоксы» материальной импликации можно исключить путем такой интерпретации классической логики: если $a \supset b$ есть тавтология или доказуемая формула классической логики, то $a \vdash b$ (Карнап [6], [25]). При этом в формуле только один знак материальной импликации интерпретируется как знак логического следования, и утверждение типа $a \vdash (b \supset a)$ и $\sim a \vdash (a \supset b)$ не ведут к «парадоксам». Но здесь получаются «парадоксы», подобные «парадоксам» строгой импликации.

Имеется значительная литература, в которой рассматриваются льюисовская система или предлагается другое решение породивших их проблем. Большая часть ее посвящена чисто формальным проблемам. Это, например, работы [16], [18], [22], [23], [30], [31], [37–41], [45], [46]. В работах такого рода льюисовские и другие подобные им логические системы принимаются как свершившийся факт и исследуются сами по себе. Породившие их причины (т. е. проблема логического следования) вообще не рассматриваются. Если предлагаются какие-то модификации этих систем, то последние сами (а не проблема логического следования) образуют предмет внимания и его отправной пункт. Другая часть упомянутой литературы связана с обсуждением самой проблемы логического следования. Это, например, работы [14], [15], [19], [26–29], [42–44], [47], [49]. В нашу задачу не входит обзор и анализ этих работ. Ограничимся лишь несколькими краткими замечаниями, которые достаточны (на наш взгляд) для первичной характеристики существа интересующего нас здесь направления в логике.

Одной из самых ранних логических систем, претендующих на роль общей теории дедукции и отличных от классической логики, является мало известная в логике система Орлова [8]. Сказать о ней здесь

интересно потому, что в ней отчетливо выражено само направление поисков решения проблемы логического следования и возможные здесь вариации.

Понятие материальной импликации, утверждает Орлов, шире понятия логического следования. Выражение $a \to b$ («Из a следует b») обладает свойствами материальной импликации и еще тем свойством, что a и b связаны по смыслу: a невозможно без b (как у Льюиса), a предполагает b, b есть условие истинности a и т. п. Вводится понятие совместности: a и b совместны, если из a (или из b) не следует отрицание b (соответственно а), т. е. $a \cdot b = Df \cdot \sim(a \to \sim b)$. Для возможности дедуктивного вывода, считает Орлов, требование истинности посылок чрезмерно. Достаточно более слабого требования совместности посылок. Исходя из этой предпосылки, Орлов считает «парадоксальными» не только формулы, ведущие к «парадоксам» материальной и строгой импликации, но также и формулы $a \cdot b \to a$, $a \to a \vee b$, $\sim a \to \sim(a \cdot b)$.

Существенное место в литературе по проблеме логического следования занимает система сильной импликации Аккермана [10], [11]. Сильная импликация $a \to b$ читается как «b есть часть содержания a». Модальные понятия, в отличие от Льюиса, вводятся как производные. Система Аккермана обладает следующими свойствами (см. [23, 25]):

1) если в формуле $a \to (b \to c)$ знак импликации отсутствует в a, то эта формула недоказуема;

2) если в формуле $a \to b$ формулы a и b таковы, что в них нет одинаковых переменных, то эта формула недоказуема.

Отсюда следует, что формулы $a \to (b \to a)$, $\sim a \to (a \to b)$, $a \cdot \sim a \to b$, $\sim(a \vee \sim a) \to b$, $a \to b \vee \sim b$, $a \to \sim(b \cdot \sim b)$ недоказуемы. А значит, «парадоксы», подобные «парадоксам» материальной и строгой импликаций, при интерпретации системы Аккермана в качестве теории логического следования получиться не могут.

«Парадоксы» строгой импликации можно исключить также путем следующего дополнения к интерпретации тавтологий и доказуемых формул классической логики: если $a \supset b$ есть тавтология или доказуемая формула классической логики и при этом в a и в b входит по крайней мере одна одинаковая переменная, то $a \vdash b$. При такой интерпретации исключаются утверждения $A \cdot \sim A \vdash B$, $A \vdash \sim(B \cdot \sim B) \sim(A \vee \sim A) \vdash B$, $A \vdash B \vee \sim\sim B$. Но этот путь не делает излишними системы типа систем Льюиса и Аккермана, поскольку класс «непарадоксальных» формул здесь остается неопределенным сам по себе.

Система Аккермана не воспринимается в логике как окончательное решение проблемы логического следования. Она подвергается критике, например, в работах Андерсона, Белнапа и других авто-

ров [3], [13–15], [19], [26]. Эта критика интересна тем, что касается самого содержания проблем. В упомянутых работах построены различные варианты логических систем, несколько отличных от системы Аккермана. Побудительным мотивом к такой перестройке системы Аккермана здесь послужило то, что правила 3 и 4 последней представляются сомнительными: правилам 1 и 2 соответствуют доказуемые формулы $a \cdot (a \to b) \to b$ и $a \cdot b \to a \cdot b$, тогда как формулы $\sim a \cdot (a \vee b) \to b$ и $((a \to (b \to c)) \cdot b) \to (a \to c)$ недоказуемы.

В работе [13] Андерсон формулирует систему утверждений, которую можно рассматривать (в нашей терминологии) как описание интуитивного понимания логического следования. Ранее сформулированная система сильной импликации адекватна ей. Теперь можно дать следующую экспликацию понятия логического следования: из a логически следует b («b зависит от логического содержания a»), если и только если $a \to b$ доказуема в упомянутой логической системе. Но это определение представляется слишком узким: в системе сильной импликации Андерсона (и Аккермана) оказываются недоказуемыми некоторые формулы, которые не являются «парадоксальными» (например, приводившаяся выше формула $\sim a \cdot (a \vee b) \to b$). Таким образом, прогресс в одном отношении (исключение «парадоксальных» формул) оказался регрессом в другом (исключение «непарадоксальных» формул), и проблема логического следования встает снова, только уже в несколько иной и более сложной форме.

§ 4. Новая постановка проблемы

Многие авторы предлагали то или иное решение проблемы логического следования. Так, мы уже говорили, что в работе Андерсона [13] сформулирована система утверждений E^*, которой соответствует логическая система E, формализующая логическое следований. Но здесь система E^* построена не как результат непредубежденного анализа логического следования (независимо от системы E), а как оправдание готовой системы E, полученной из других источников. Система E получена не как продолжение анализа некоторого интуитивного понимания логического следования, а как результат реализации намерения несколько модифицировать систему Аккермана. Одно то обстоятельство, что системы E^* и E эквивалентны, заставляет рассматривать E^* лишь как ретроспективную перифразировку E. В результате предварительного анализа логического следования, о котором здесь идет речь, может быть получена лишь некоторая система общих требований к будущей логической системе, определяющей класс правил логического следования. В соответствии с ними должна быть построена или выбрана эта логическая система, но сами они никак не должны входить

в содержание последней (в число ее формул). Если же при этом будут сформулированы какие-то правила логического следования, не вызывающие сомнений с точки зрения интуиции, то это будет лишь некоторое конечное множество правил, а отнюдь не класс всех возможных правил, который бесконечен. Так что ни о какой эквивалентности результатов предварительного анализа логического следования и некоторой формальной системы и речи быть не может (иначе последняя вообще излишня). Здесь речь идет о соответствии лишь в том смысле, что формальная система обладает или нет некоторыми свойствами, удовлетворяющими или не удовлетворяющими указанным выше требованиям. Так что систему E^* еще нельзя безоговорочно понимать как пример уточнения интуитивных предпосылок для построения теории логического следования.

В работе Белнапа [19] формулируется некоторая сумма утверждений, которым должно соответствовать понятие логического следования. Она отображает лишь то, что уже сделано: из истинных посылок должны получаться истинные следствия; если следствие ложно, то ложна посылка; понятия материальной и строгой импликации шире понятия логического следования; если формулы a и b не содержат одинаковых переменных, то $a \rightarrow b$ не может быть доказуемой в логической системе, формализующей следование и т. д. Все это, конечно, важно. И работы Андерсона и Белнапа можно считать шагом вперед по сравнению с Льюисом и Аккерманом. Но это не решает сформулированных выше проблем.

Надо сказать, что вопрос о логическом следовании так или иначе обсуждается в многочисленных рабочих и независимо от той формы проблемы логического следования, какую ей придали Льюис и другие идущие в этом же направлении логики (Аккерман, Андерсон, Белнап и т. д.). Но они не только не устраняют указанные выше трудности, но даже не акцентируют на них внимание или вообще игнорируют.

Теснейшим образом с проблемой логического следования связаны работы, посвященные взаимоотношению условных высказываний и материальной импликации. Мы их рассматривать здесь не будем, поскольку проблема логического следования затрагивается в них неявно. Дело в том, что условные высказывания используются не только в случае логического следования, но также в случае фиксирования эмпирических связей («физическое следование»), энтимем, определений. И чтобы различить эти употребления и выделить условные высказывания, выражающие логическое следование, необходимо выяснить, что такое... логическое следование.

В дальнейшем мы изложим подход к проблеме логического следования, который нам представляется более соответствующим сути дела.

§ 5. Смысл высказываний

Высказывания (суждения) суть воспринимаемые суждения, представляющие собою определенным образом упорядоченные структуры терминов (субъектов и предикатов) и логических знаков («и», «или», «все», «если..., то...» и т. п.). Высказывание будем считать элементарным, если оно не содержит в качестве своей части другое высказывание, и сложным, если такая часть в нем имеется. Другими словами, элементарные высказывания расчленяются только на термины и логические знаки, сложные — на высказывания (в конечном счете — элементарные) и логические знаки.

Поясним выражение «смысл высказывания». Будем считать, что известен смысл элементарного высказывания, если и только если известен смысл всех образующих его терминов и логических знаков, и известен смысл сложного высказывания, если и только если известен смысл всех образующих его высказываний и логических знаков. При этом мы допускаем, что высказывание построено в соответствии с нормами того или иного языка. Выражение «смысл термина» мы здесь считаем понятным. Выражение «смысл логического знака» для логических знаков, рассматриваемых в общей теории дедукции, поясним ниже. Термины и элементарные высказывания, входящие в данное высказывание, будем называть собственными единицами его смысла. Поскольку нас интересует лишь общая теория дедукции, в которой элементарные высказывания не расчленяются на части, то в качестве собственных единиц смысла высказываний будут иметься в виду исключительно элементарные высказывания.

Между высказываниями могут иметь место различного рода смысловые отношения. Их можно разбить на две группы:

1) знание смысла одного высказывания зависит или не зависит от знания смысла другого высказывания;

2) множества собственных единиц смысла двух высказываний не совпадают совсем (не имеют одинаковых элементов), перекрещиваются (имеют по крайней мере один одинаковый элемент), одно включается в другое, полностью совпадают.

Смысл логических знаков вообще не зависит от смысла тех или иных конкретных терминов и высказываний. Так что зависимость, о которой сказано в первом пункте, может иметь место только для терминов. Поскольку мы здесь допускаем, что смысл элементарных высказываний известен или безразличен, то смысловые отношения такого рода здесь вообще отпадают. Остаются лишь отношения второго рода. И когда в соответствующих работах по проблеме логического следования употребляют выражение «связь по смыслу» (или нечто

адекватное ему), то это туманное выражение может означать лишь смысловое отношение второго рода [10], [19].

Среди этих смысловых отношений, с нашей точки зрения, интересны такие два случая, когда «имеется связь по смыслу»: 1) в высказывания A и B входят по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание X (т. е. множества собственных единиц смысла A и B имеют по крайней мере один одинаковый элемент X); 2) в высказывание B не входит такое элементарное высказывание, которое не входит в A (т. е. множество собственных единиц смысла B включается в множество собственных единиц смысла A).

В зависимости от того, какое требование будет предъявлено к посылкам и следствиям с этой точки зрения, получим разные понимания логического следования. Если A есть посылка, а B есть следствие, и при этом выполняется второе отношение, будем говорить, что имеется логическое следование в узком смысле слова (или узкое следование). Оно рассматривалось в работах [3–5]. Если же выполняется первое отношение, то будем говорить, что имеет место расширенное следование. Можно употреблять также термины «сильное следование» и «слабое следование», но избегая при этом каких-либо ассоциаций с рассмотренными выше импликациями. Так, сильная импликация Аккермана и Андерсона является расширенной (и слабой) в нашем смысле. В литературе по проблеме логического следования обычно эти виды следования не различают и рассматривают только расширенное следование (за исключением [3–5]). Причины этого — формальные удобства знака нестрогой дизъюнкции, благодаря которым построение логических систем с этим знаком приобрело прочность предрассудка; а для нестрогой дизъюнкции принимается: A имплицирует «A или B».

§ 6. Значения истинности

Высказывание считается истинным, если положение на самом деле таково, как в нем говорится, и не считается истинным, если положение на самом деле не таково, как в нем говорится. Другими словами, высказывание «A» истинно, если и только если A (в первом случае кавычки означают, что высказывание взято как определенный воспринимаемый предмет, и только; во втором же случае оно употребляется, т. е. берется как информация о чем-то).

В рамках общей теории дедукции принимается следующее:

1) каким путем выясняется, что то или иное элементарное высказывание является и не является истинным, здесь роли не играет;

2) рассматриваются только такие сложные высказывания, значения истинности которых (т. е. истинны они или неистинны) зависят

исключительно от значений истинности элементарных высказываний и логических знаков, входящих в них; рассматриваются сложные высказывания, являющиеся функциями истинности элементарных.

Указанная во втором пункте зависимость может иметь место лишь при том условии, если термины «истинно» и «неистинно» («не является истинным») предварительно определены для соответствующих структур высказываний. Такие определения можно получить для структур со знаками $\sim$, $\cdot$, $\vee$, $\supset$ и т. п., рассматривая переменные двузначной пропозициональной логики как элементарные высказывания, формулы — как высказывания, построенные из элементарных высказываний и этих знаков, v — как «истинно», f — «неистинно». Мы не употребляем термин «ложно», поскольку он стал двусмысленным в связи с признанием многозначности высказываний (см. [5]).

Между высказываниями могут иметь место различные отношения с точки зрения значений истинности. Им придают большую (нередко — главную) роль при определении логического следования. При этом логическое следование определяют так: если всегда, когда истинно A, истинно и B, то из A следует B (если условия истинности A суть условия истинности B, то из A следует B). Но это определение не конструктивно в том смысле, что не определяет класс случаев, когда это имеет место. В качестве определения класса случаев логического следования одних высказываний из других указывают тавтологии двузначной пропозициональной логики (и, соответственно, доказуемые формулы классической пропозициональной логики (вида $a \supset b$, см.: [6], [31]).

Однако здесь нет полного совпадения (независимо от «парадоксов» материальной и строгой импликации). Так, в $a \supset b \vee \sim b$ условия истинности левой части (антецедента) не являются условиями истинности правой (консеквента): в первой формуле для истинности $b \vee \sim b$ требуется истинность b или $\sim b$, а для истинности a это не требуется.

Выражение «условие истинности» употребляется здесь в следующем смысле. Указать условие истинности A — значит указать, какие значения истинности должны иметь входящие в него элементарные высказывания, чтобы A было истинно.

Логическое следование B из A должно, очевидно, удовлетворять требованию, чтобы все условия истинности A были условиями истинности B. Это — не определение логического следования, но лишь указание на одно его необходимое свойство (зависимость посылок и следствий по значениям истинности). Имеет место связь между отношениями по смыслу и по значениям истинности:

1) если множества собственных единиц смысла A и B не перекрещиваются (не имеют одинаковых элементов), то возможно, что не все условия истинности одного из них суть условия истинности другого;

2) если A и B зависят друг от друга по значениям истинности в указанном выше смысле, то множества собственных единиц их смысла имеют по крайней мере один одинаковый элемент; но не всегда наоборот.

§ 7. Вывод и значения истинности высказываний

Вывод есть действие, которое внешне можно описать так:

1) даны $A^1, \ldots, A^n$ $(n \geqslant 1)$; даны как особые воспринимаемые (видимые, слышимые и т. п.) предметы, т. е. написаны, произнесены и т. п.; они суть исходный материал для акта вывода;

2) эти высказывания анализируются — фиксируется их структура; другими словами, выясняется, какие термины, высказывания и логические знаки входят в них и как расположены друг относительно друга; для осуществления акта вывода структура данных высказываний предполагается данной;

3) в зависимости от структуры данных высказываний и других обстоятельств (контекст, цель, условия и т. п.), которые здесь не играют роли, вслед за созданием (или выбором) и восприятием высказываний $A^1, \ldots, A^n$ создается (пишется, произносится и т. п.) высказывание B;

4) имеются правила (или навыки), позволяющие сделать то, что указано в пункте 3.

Акт вывода сам по себе дает лишь утверждение «Из $A^1, \ldots, A^n$ выводится B», и ничего более. Но он включен как элемент в более сложный комплекс действий: высказывания $A^1, \ldots, A^n$ все утверждаются (принимаются, считаются истинными); совершается акт вывода B, и последнее точно так же утверждается.

Правила логического следования и вырабатываются с таким расчетом, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия. Когда они уже выработаны, отношение переворачивается, и приобретает силу положение (основной принцип дедукции): если $A \vdash B$ и при этом A истинно, то B истинно. Это свойство логического следования позволяет принимать следствия истинных посылок и этим его роль полностью исчерпывается. В число самих правил логического следования фиксирующее его утверждение, очевидно, не входит. Поэтому в логической системе, формализующей логическое следование, в числе доказуемых формул не должны быть формулы, подобные формулам $a \cdot (a \to b) \to b$, $a \cdot (a \prec b) \prec b$, $a \cdot (a \supset b) \supset b$ и т. п. и интерпретируемые как $a \cdot (a \vdash b) \vdash b$. Они не устраняют необходимости основного принципа дедукции и излишни при наличии последнего. Так, чтобы по такому правилу получить B и признать его истинным, необходимо

признать истинными A и $A \vdash B$; но уже одного этого и без признания $A \cdot (A \vdash B) \vdash B$ достаточно для принятия B.

Сказанное выше не следует понимать так, будто истинность тех или иных высказываний имеет значение при выработке самих навыков и правил вывода. Значение при этом имеет не истинность высказываний, а знание условий истинности высказываний определенного типа (с определенной логической структурой), — знание того, что нужно для принятия (утверждения) такого типа высказываний.

Из этого получается важный вывод: определение условий истинности высказываний со структурой того или иного типа есть необходимый элемент теории логического следования, а не просто одно из средств ее построения. В общей же теории логического следования определение условий истинности высказываний со знаками $\sim$, $\cdot$, $\vee$, $\supset$ и т. п. имеет самостоятельное значение как ее часть, а не есть просто подсобное эвристическое средство или нечто дублирующее пропозициональные исчисления.

§ 8. Структура посылок и следствий

Как уже говорилось, в общей теории дедукции элементарные высказывания берутся как нечто нерасчленяемое на части, а сложные высказывания берутся лишь такие, которые суть функции истинности элементарных. Отсюда вытекает важное следствие: в структуре посылок и следствий в рамках общей теории дедукции не могут фигурировать высказывания типа $A \vdash B$ («Из A следует B»).

Дело в том, что высказываний $A \vdash B$ есть элементарное высказывание с двухместным предикатом «Из первого высказывания следует второе» и субъектами «Высказывание A» и «Высказывание B». Рассматривать его как высказывание, состоящее из высказываний A и B, ошибочно: в нем дается информация не о тех предметах, о которых говорится в A и B, а об отношении самих A и B как особых предметов. Как принято говорить, оно есть метавысказывание по отношению к A и B, т. е. высказывание о высказываниях. Так что его в общей теории дедукции следует рассматривать как частный случай элементарных высказываний.

Кроме того, это высказывание не есть функция истинности A и B. Зная их значения истинности, мы лишь в одном единственном случае можем из этого заключить о значении истинности «$A \vdash B$»: если истинно A и неистинно B, то неистинно «$A \vdash B$». Во всех остальных случаях мы не можем сделать вывода о его значении истинности: A и B могут быть оба истинными, а «$A \vdash B$» — нет; A, B и «$A \vdash B$» могут быть все истинными; аналогично для прочих случаев.

Таким образом, доказуемые формулы логической системы, создаваемой для определения класса правил логического следования на уровне общей теории логического следования, должны иметь вид $a \vdash b$ ($\vdash$ принят в качестве знака следования), где в a и b входят только пропозициональные переменные и знаки функций истинности $\sim, \cdot, \vee$ и т. п. Если некоторая данная логическая система интерпретируется как общая теория логического следования, то лишь один знак в ее доказуемых формулах может рассматриваться как знак следования. И если в таких формулах знак, интерпретируемый как знак следования, встречается более одного раза, то прочие его вхождения должны получить какую-то иную интерпретацию. В работах же Льюиса, Аккермана, Белнапа, Андерсона и других это обстоятельство игнорируется, и в числе доказуемых формул фигурируют формулы вида $a \cdot (a \prec b) \prec b$, $(a \prec b) \cdot (b \prec c) \prec (a \prec c)$, $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$, $(a \to b) \to (\sim b \to \sim a)$ и т. п. без дифференциации «уровней» импликаций.

Высказывание «$A \vdash B$» истинно, если и только если $A \vdash B$. Если $A \vdash B$, то условия истинности A суть условия истинности B. Это не дает права рассматривать «$A \vdash B$» как функцию истинности A и B, но дает возможность использовать общую теорию логического следования для рассмотрения правил для высказываний типа «$A \vdash B$». В частности, можно установить, что все условия истинности «$A \vdash B$» суть условия истинности «$\sim B \vdash \sim A$»: аналогично — для пар «$A \vdash B$» · «$C \vdash B$» и «$A \vee C \vdash B$», «$A \vdash B$» · «$A \vdash C$» и «$A \vdash B \cdot C$» и т. д. Но не все условия истинности A являются условиями истинности «$B \vdash A$» и «$\sim A \vdash B$».

§ 9. Логические знаки

Приняв для логического следования требование «Если $A \vdash B$, то условия истинности A суть условия истинности B», мы еще не определяем класс правил логического следования. Возникает, естественно, вопрос: откуда эти правила берутся и что они из себя представляют? Открываются ли они в окружающей человека природе подобно тому, как открываются законы физики, биологии и т. п.? Ничего подобного. Они изобретаются людьми вместе с изобретением логических знаков, входящих в структуру высказываний. Одни высказывания следуют из других в силу того, что таковы логические знаки, входящие в их структуру (потому что эти логические знаки были изобретены именно такими; потому что таков смысл логических знаков). Сила законов логики — сила наших собственных соглашений относительно смысла логических знаков. И только потому, что исторически они складывались неявно и стихийно, а каждому отдельному индивиду навязывались как нечто независящее от его воли, они воспринимались как нечто подобное законам природы.

Надо различать:

1) установление смысла (введение, изобретение) логических знаков в истории человечества, когда этот процесс протекал стихийно, неявно и т. п.;

2) установление смысла логических знаков в логике.

Во втором случае особого рода специалисты-логики не просто пассивно описывают исторически сложившиеся в языке положения, но по необходимости продолжают изобретательскую деятельность человечества: выявляют смысл знаков в неявных случаях, устраняют многозначность, устанавливают отношения различных знаков. Они усовершенствуют то, что имеется. И, что особенно характерно для современной логики, предлагают нечто новое: таковы многочисленные логические системы современной логики.

Таким образом, «парадоксы» логического следования возникают не потому, что есть какие-то природные формы логического следования, которые специалисты логики никак не могут описать достаточно точно, а прежде всего потому, что в современной логике изобретаются логические формы, отличающиеся от тех, которые уже встречаются в обиходе. Здесь несоответствие такого же рода, как несоответствие между дикими видами яблони и теми их видами, которые выведены человеком путем искусственного отбора и вообще посредством каких-то других приемов их усовершенствования.

Одна из черт стихийной выработки правил логического следования — отсутствие дифференциации различных логических форм. Вторая причина «парадоксов» логического следования — отсутствие подобной дифференциации в самой логике, претендующей на экспликацию правил логического следования: логическая система, удовлетворяющая свойствам одной его формы, не удовлетворяет другой, а смешение этих форм порождает иллюзию «парадоксальности» этой системы вообще.

Соглашения о смысле логических знаков не являются абсолютно произвольными. Они вырабатываются в определенных рамках. Рамки эти таковы. Во-первых, имеются такие логические знаки и такие случаи их употребления (такие структуры высказываний с этими знаками), что смысл этих логических знаков и, следовательно, смысл содержащих их высказываний в случае такого рода ясен без отношения к другим высказываниям вообще (и без логического следования в частности). Экспликацией их смысла является точное определение условий истинности соответствующих высказываний. Назовем такие случаи основными. Во-вторых, для всех прочих логических знаков и всех прочих случаев употребления логических знаков (назовем их производными) смысл логических знаков и содержащих их высказываний сводится к смыслу

логических знаков в основных случаях их употребления посредством особых правил; последние и определяют прежде всего, каким образом условия истинности высказываний в производных случаях сводятся к условиям истинности высказываний в основных случаях. Основными случаями могут быть нормальные формы (например, дизъюнкции конъюнкций).

§ 10. Различные формы логического следования

Суммируя сказанное выше, отношения A и B могут удовлетворять следующим требованиям (принципам):

(I) все условия истинности A суть условия истинности B;

(II) в A и в B входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание;

(III) в B входят только такие элементарные высказывания, которые входят в A.

Отношение I выполняется для всех форм следования. Что касается прочих отношений, то здесь возможны различные комбинации, — различные формы следования. И ни одна из этих форм сама по себе не лучше и не хуже других. Просто они суть различные формы следования. И в природе нигде нет никакого «подлинного» следования, с которым можно было бы их сравнивать. Другое дело, какие-то из них чаще употребляются, чем другие. Но это ничего не говорит об их «правильности», «непарадоксальности», «неправильности», «парадоксальности» и т. п. Проблема «логического следования», таким образом, принимает такой вид: можно ли построить логические системы, адекватные этим формам следования?

Возможны следующие формы логического следования:

1) выполняется I;
2) выполняется I и II;
3) выполняется I и III.

При построении теории следования, полной относительно I (в которой были бы схвачены все случаи, удовлетворяющие I), обнаруживается следующее. Формулы

$$a \vdash a \vee b, \quad a \cdot b \vee a \cdot c \vdash a \cdot (b \vee c) \quad \text{и} \quad \sim a \cdot (a \vee b) \vdash b$$

удовлетворяют I. Если принять утверждение «Если $a \vdash b$ и $b \vdash c$, то $a \vdash c$», то получим формулу $\sim a \cdot a \vdash b$, которая считается «парадоксальной». Таким образом, невозможно построить логическую теорию, полную относительно I и удовлетворяющую II (и тем более III). Более того, невозможно построить теорию следования, которая охватывала бы все формулы, удовлетворяющие обоим требованиям I и II. Вопрос

же о том, возможна или нет теория следования, которая охватывает все формулы, удовлетворяющие обоим требованиям I и III, является чисто «техническим».

§ 11. Определение логических знаков

В общей теории дедукции рассматриваются только такие посылки и следствия, которые построены из элементарных высказываний и знаков «не», «и» и «или». Сами элементарные высказывания включаются, очевидно, в их число. Задача этой теории — осуществить экспликацию смысла этих знаков, построить их точные определения.

Особенность логических знаков состоит в том, что их невозможно определить сами по себе, изолированно от терминов и высказываний. Определить эти знаки — значит определить свойства высказываний, содержащих их. Для этой цели необходимо отвлечься от конкретного вида элементарных высказываний, заменив их знаками любых элементарных высказываний. Эту роль в логике выполняют пропозициональные переменные и формулы. В дальнейшем мы и будем знаки переменных и формул употреблять как знаки любых элементарных высказываний и любых высказываний, построенных из элементарных. При этом:

1) каждая буква $x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots$ по отдельности обозначает любое высказывание (соответствующего типа);

2) если две различные буквы встречаются в одном выражении (в одном как-то локализованном контексте), то различие их обозначает лишь то, что высказывания могут быть различными.

Теперь выражения вида $a \vdash b$ выступают как утверждения логики о свойствах логических знаков, входящих в a и b. Эти утверждения буквально суть соглашения о смысле логических знаков. И тот факт, что эти соглашения могут соответствовать соглашениям, которые стихийно сложились в практике оперирования языком, не отмечает этого обстоятельства. Если же подобного совпадения нет, то эти логические знаки можно рассматривать как вновь введенные знаки, отличные от привычных знаков языка. Утверждения же $A \vdash B$ теперь можно рассматривать как следствия утверждений логики, точнее — как результат подстановки на место знаков любых элементарных высказываний конкретных высказываний (постоянных). Вопрос о том, когда имеет место $A \vdash B$, решается теперь так: $A \vdash B$, если и только если $a \vdash b$. Но встает вопрос о том, как конкретно вводятся утверждения $a \vdash b$.

Для знаков «и» и «не» примем обозначения:

1) $\sim a$ — «Не-a», «Не так, как утверждается в a»;

2) $a \cdot b$ — «a и b»; $a^1 \cdot a^2 \cdot a^n$ — «a^1 и a^2 и ... и a^n», «Каждое из a и b (из $a^1, a^2, \ldots, a^n$)». Знак «или» употребляется в трех различных смыслах:

а) $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ исключают друг друга;

б) по крайней мере одно из $a^1, \ldots, a^n$ имеет место;

в) одно и только одно из $a^1, \ldots, a^n$ имеет место.

В первом случае имеет место исключающее «или», во втором — неисключающее (соединительное), в третьем — полное (будем так говорить). Будем обозначать их символами соответственно:

3) $a \mid b$, $\quad a^1 \mid a^2 \mid \ldots \mid a^n$;

4) $a \vee b$, $\quad a^1 \vee a^2 \vee \ldots \vee a^n$;

5) $a : b$, $\quad a^1 : a^2 : \ldots : a^n$.

При определении логических знаков необходимо соединение двух направлений, можно сказать — направления смысла и направления условий истинности. В первом направлении осуществляется следующее:

1) указываются некоторые основные случаи высказываний, смысл которых считается ясным или находящимся вне компетенции данного раздела логики, в общем — считается данным;

2) смысл прочих случаев определяется через эти основные посредством выражений вида «a тождественно по смыслу b» или $a = Df \cdot b$;

3) рассматриваются отношения различных случаев по смыслу.

Так, смысл элементарных высказываний считается данным. Для элементарных высказываний отрицание должно быть определено через «внутреннее» отрицание (через отрицание логического знака, входящего в него; см. об этом [5]). Но в общей теории дедукции это не рассматривается, и смысл отрицания элементарного высказывания точно так же считается данным. Если смысл структур

$$x \cdot y, \quad x : y, \quad x^1 \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^n \quad \text{и} \quad x^1 : x^2 : \ldots : x^n$$

ясен (дан), то теперь можно определить смысл других структур:

$$\sim(x \cdot y) = Df \cdot (\sim x \cdot y) : (x \cdot \sim y) : (\sim x \cdot \sim y),$$
$$\sim(x : y) = Df \cdot (x \cdot y) : (\sim x \cdot \sim y),$$
$$x \vee y = Df \cdot (x \cdot y) : (\sim x \cdot y) : (x \cdot \sim y),$$
$$(x : y) \cdot z = Df \cdot (x \cdot z) : (y \cdot z), \quad \sim(\sim x) = Df \cdot x$$

и т. д. Суть этих определений — переместить знак отрицания к элементарным высказываниям и свести любую структуру к основным случаям,

смысл которых ясен. Помимо указанных знаков, такими определениями могут быть введены и другие знаки, например

$$x \supset y = Df \cdot (x \cdot y) : (\sim x \cdot y) : (\sim x \cdot \sim y).$$

Но тождество a и b по смыслу дает право замещать одно выражение другим в любом контексте без изменения смысла последнего, так что утверждение вида $a = Df \cdot b$ можно заменить парой утверждений $a \vdash b$ и $b \vdash a$.

Выше мы сказали «Если смысл структур... ясен». Но он как-то должен быть установлен. Определениями типа $a = Df \cdot b$ воспользоваться нельзя, ибо дальше сводить некуда. Необходимы, очевидно, разъяснения иного рода. Последние могут варьироваться. Но суть их отчасти эксплицируется утверждениями

$$a \cdot b \vdash a, \quad a \cdot b \vdash b \cdot a, \quad a : b \vdash b : a,$$
$$a \cdot b \cdot c \vdash a \cdot (b \cdot c), \quad (a : b) \cdot a \vdash \sim b$$

и т. д., которые буквально означают следующее: знаки $\cdot$ и $:$ таковы, что... (перечисляются эти утверждения); знаки эти именно такими изобретаются. Обращаем внимание на то, что здесь логические знаки определяются не в одиночку, а совместно, и определяются комплексом утверждений.

Линия смысла должна быть согласована с линией условий истинности. В последнем случае осуществляется следующее:

1) для некоторых основных случаев определяются условия истинности;

2) эти определения распространяются на все прочие случаи;

3) рассматриваются случаи, когда условия истинности одних высказываний суть условия истинности других.

Так, для $\sim x$, $x \cdot y$, $x : y$, $x^1 \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^n$ и $x^1 : x^2 : \ldots : x^n$ принимаются определения:

1) $\sim x$ истинно, если и только если x неистинно;

2) $x^1 \cdot \ldots \cdot x^n$ $(n \geqslant 2)$ истинно, если и только если все $x^1, \ldots, x^n$ истинны;

3) $x^1 : \ldots : x^n$ $(n \geqslant 2)$ истинно, если и только если одно и только одно из $x^1, \ldots, x^n$ истинно.

Условия истинности всех прочих структур высказываний со знаками $\sim$, $\cdot$ и $:$ выясняются в несколько шагов по тем же определениям в соответствии с принципом: если a получается из b путем замены x везде, где x входит в b, формулой (высказыванием) c, то условия истинности a и b совпадают (одинаковы), — a и b равнозначны. В соответствии с определениями выясняется, что имеют силу утверждения «Условия истинности $a \cdot b$ суть условия истинности a», «Условия

истинности $a \cdot b$ суть условия истинности b» и прочие утверждения, соответствующие тем, которые сформулированы выше.

§ 12. Вырожденные случаи

Правила логического следования не исчерпывают полностью смысла знаков $\sim$, $\cdot$, $:$, $\vee$ и т. д. Дело в том, что часть определения их составляют также утверждения типа $\sim (a \cdot \sim a)$, $\sim (a : a)$, $\sim a \vee a$, $\sim (a \cdot \sim a \cdot b)$ и т. д. (a по линии условий истинности — признание их всегда истинными), которые не содержат знак логического следования. Они именно суть часть определения смысла логических знаков, а не отражение каких-то «общих свойств вещей», как иногда говорят. Очевидно, отрицания таких высказываний суть всегда отрицаемые (всегда ложные) высказывания. Их можно рассматривать как вырожденные случаи следования:

1) если a всегда истинно, то имеет место случай с пустой посылкой, т. е. $\vdash a$;

2) если $\sim a$ всегда истинно, то имеет место случай с пустым следствием, т. е. $a \vdash$.

Двузначная пропозициональная логика и адекватное ей классическое пропозициональное исчисление дают определение класса таких высказываний. И в этой их интерпретации они выступают лишь как часть теории логического следования (если рассмотрение вырожденных случаев включить в нее) или как особый раздел логики, отличный от нее.

Требования к логическому следованию можно ослабить, приняв утверждения:

1) если $\vdash a$, то $b \vdash a$;

2) если $a \vdash$, то $a \vdash b$. Очевидно, такое следование не будет отвечать требованию II (и III).

§ 13. Теория логического следования

Результатом экспликации употребляемых логических знаков и введения новых является некоторая конечная система различного рода утверждений. Эта система должна быть достаточной для осмысленного оперирования логическими знаками во всех возможных случаях их употребления. Она образует основание для общей теории логического следования. Но здесь возможны вариации. Они касаются отбора логических знаков, разделения их на основные и производные, отбора определяющих их утверждений и вообще отбора принимаемых утверждений, а также формулировок общих требований к ним.

Мы примем следующую систему утверждений в качестве основания для общей теории логического следования. В качестве основных логических знаков возьмем $\cdot, :, \sim$. Прочие знаки определяются через них:

1) $x \vee y = Df \cdot \sim(\sim x \cdot \sim y)$;

2) $x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n = Df \cdot \sim(\sim x^1 \cdot \sim x^2 \cdot \ldots \cdot \sim x^n)$;

3) $x \mid y = Df \cdot \sim x \vee \sim y$;

4) $x^1 \mid x^2 \mid \ldots \mid x^n = Df \cdot \sim x^1 \vee \sim x^2 \vee \ldots \vee \sim x^n$;

5) $x \supset y = Df \cdot \sim(x \cdot \sim y)$

и т. д. (если потребуются другие сокращения).

Знак определения будем заменять знаком следования по схеме: если $a = DF \cdot b$, то $a \vdash b$ и $b \vdash a$. Так что введение производных логических знаков можно рассматривать как введение дополнительных правил логического следования. Аналогично — для определения одних структур высказываний через другие. Условимся для сокращения использовать знак $\dashv\vdash$ в следующем смысле: $a \dashv\vdash b$, если и только если $a \vdash b$ и $b \vdash a$.

Примем следующие утверждения Z°, определяющие смысл основных логических знаков и осуществляющие первоначальную экспликацию интуитивного понимания логического следования в узком (или сильном) смысле:

1) $a \vdash a$;

2) $a \dashv\vdash \sim\sim a$;

3) $a \cdot b \vdash a$;

4) $a \cdot b \vdash b$;

5) $a \cdot b \vdash b \cdot a$;

6) $a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n \vdash a^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$;

7) $a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n \vdash a^i \cdot \ldots \cdot a^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$;

8) $a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n \vdash a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, где следствие отличается от посылки лишь иной расстановкой высказываний $a_1, \ldots, a_n$;

9) $\sim(a \cdot b) \dashv\vdash (a \cdot \sim b) : (\sim a \cdot b) : (\sim a \cdot \sim b)$;

10) $\sim(a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n) \dashv\vdash b^1 : \ldots : b^k$, где $b^1, \ldots, b^k$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n$ только наличием $\sim$ по крайней мере перед одним из $a^1, a^2, \ldots, a^n$;

11) $a : b \vdash b : a$;

12) $a^1 : a^2 : \ldots : a^n \vdash a_1 : a_2 : \ldots : a_n$;

13) $a : b \dashv\vdash (a \cdot \sim b) : (\sim a \cdot b)$;

14) $a^1 : a^2 : \ldots : a^n \dashv\vdash b^1 : \ldots : b^n$, где $b^1, \ldots, b^n$ суть всевозможные высказывания, отличающиеся от $a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n$ наличием $\sim$ перед всеми $a^1, a^2, \ldots, a^n$, кроме одного;

15) $(a : b) \cdot a \vdash \sim b$;

16) $(a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \cdot a^1 \vdash \sim a^2 \cdot \ldots \cdot \sim a^n$;

17) $(a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \cdot (a^1 : \ldots : a^i) \vdash \sim a^{i+1} \cdot \ldots \sim a^n$;

18) $(a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \cdot (a^1 : \ldots : a^{n-1}) \vdash \sim a^n$;

19) $(a : b) \cdot \sim a \vdash b$;

20) $(a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \cdot \sim a^1 \vdash a^2 : \ldots : a^n$;

21) $(a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \cdot \sim a^1 \cdot \ldots \cdot \sim a^i \vdash a^{i+1} : \ldots : a^n$;

22) $(a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \cdot \sim a^1 \cdot \ldots \cdot \sim a^{n-1} \vdash a^n$;

23) $\sim (a : b) \dashv\vdash (a \cdot b) : (\sim a \cdot \sim b)$;

24) $\sim (a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \dashv\vdash b^1 : \ldots : b^k$, где $b^1, \ldots, b^k$ есть множество высказываний, в которое включается высказывание $a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n$ и всевозможные высказывания, отличающиеся от него наличием $\sim$ перед всеми $a^1, a^2, \ldots, a^n$ или перед i $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ из них (т. е. $\sim$ отсутствует по крайней мере перед двумя из них или имеется перед всеми;

25) $(a : b) \cdot c \dashv\vdash (a \cdot c) : (b \cdot c)$;

26) $(a^1 : a^2 : \ldots : a^n) \cdot b \dashv\vdash (a^1 \cdot b) : (a^2 \cdot b) : \ldots : (a^n \cdot b)$;

27) $(a : b) \cdot (c : d) \dashv\vdash (a \cdot c) : (b \cdot c) : (a \cdot d) : (b \cdot d)$;

28) $(a^1 : \ldots : a^n) \cdot (b^1 : \ldots : b^m) \dashv\vdash (a^1 \cdot b^1) : \ldots : (a^1 \cdot b^m) : \ldots : (a^n \cdot b^m)$;

29) $a \cdot b \cdot c \dashv\vdash a \cdot (b \cdot c)$;

30) $a^1 \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^n \dashv\vdash b$, где b отличается от посылки лишь тем, что в нем как-то расставлены скобки;

31) $a : b : c \vdash a : (b : c)$;

31) $a^1 : a^2 : \ldots : a^n \vdash b$, где b отличается от посылки лишь тем, что в нем расставлены скобки;

33) $b \vdash a^1 : a^2 : \ldots : a^n$, где каждое из $a^1, a^2, \ldots, a^n$ есть либо $\sim c \cdot c \cdot d$, либо $a^{i1}c^{i1} \cdot \ldots \cdot a^{im}c^{im}$ (буквы $a^{i1}, \ldots, a^{im}$ означают наличие или отсутствие $\sim$), все $a^{i1}c^{i1} \cdot \ldots \cdot a^{im}c^{im}$ попарно различаются лишь числом и расположением $\sim$ и обязательно различаются, а высказывание b отличается от $a^1 : a^2 : \ldots : a^n$ лишь расстановкой скобок.

Если к приведенным утверждениям добавить

34) $\sim a \vdash \sim (a \cdot b)$,

получим основу Z^{01} для теории логического следования в расширенном (или ослабленном) смысле.

Этот перечень утверждений можно было бы продолжать далее. Но это вполне заменяет дедукция, для осуществления которой достаточно принять ряд метаутверждений: разрешение подставлять на место $a, b, c, \ldots, a^1, a^2, \ldots$ любые структуры высказываний, применять правило транзитивности и т. д. А это — предпосылка аксиоматизации

(наряду с тем, что одни из приведенных выше утверждений можно получить с помощью таких разрешений из других).

При аксиоматизации общей теории логического следования должны быть выполнены условия:

1) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы все приведенные выше утверждения, — оно должно соответствовать интуитивному пониманию логического следования;

2) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы не любые утверждения (кроме приведенных), но лишь утверждения, удовлетворяющие требованиям I и III в случае узкого следования и требованиям I и II в случае расширенного следования.

Аксиоматизация может быть осуществлена различными способами. Это зависит от того, что при аксиоматизации существенное значение приобретают интересы удобства, один и тот же результат может быть получен разными путями, стремление добиться за счет отступлений от других требований (допущение «парадоксальных» случаев), выполнение одних требований может быть реализовано за счет неполноты в отношении других и т. д.

В рассматриваемом нами случае дело обстоит примерно так же, как в случае с модальной логикой и силлогистикой у Лукасевича и ряда других авторов: формулируется сначала некоторая система приемлемых утверждений, для которой затем подбирается подходящая аксиоматическая система.

§ 14. Пример аксиоматизации теории логического следования

Приведем пример аксиоматизации теории логического следования, несколько отличный от рассмотренных в [3–5].

Обозначения:

1) $x, y, z, x^1, x^2, \ldots, y^1, y^2, \ldots$ — пропозициональные переменные;
2) $\cdot$, $:$, $\sim$ — пропозициональные константы;
3) $\vdash$ — знак следования;
4) скобки — ограничители формул.

Пропозициональная формула:

1) переменная есть пропозициональная формула;

2) если a есть пропозициональная формула, то $\sim(a)$ есть пропозициональная формула;

3) если $a, b, a^1, a^2, \ldots, a^n$ суть пропозициональные формулы, то $(a)\cdot(b)$, $(a):(b)$, $(a^1)\cdot(a^2)\cdot\ldots\cdot(a^n)$ и $(a^1):(a^2):\ldots:(a^n)$ суть пропозициональные формулы;

4) нечто есть пропозициональная формула только в силу пунктов 1–3 (пропозициональные формулы будем обозначать символами).

Формула следования: $(a) \vdash (b)$ есть формула следования, если и только если a и b суть пропозициональные формулы.

Формула:

1) пропозициональная формула есть формула;

2) формула следования есть формула.

Вхождение в формулу:

1) a в ходит в a, $\sim (a)$, $(a) \cdot (b)$, $(b) \cdot (a)$, $(a) : (b)$, $(b) : (a)$, $(a) \cdot (b^1) \cdot \ldots \cdot (b)^n$, $(b^1) \cdot \ldots \cdot (b^n) \cdot (a)$, $(b^1) \cdot \ldots \cdot (a) \cdot \ldots \cdot (b^n)$, $(a) : (b^1) : \ldots : (b^n)$, $(b^1) : \ldots : (b^n) : (a)$, $(b^1) : \ldots : (a) : \ldots : (b^n)$, $(a) \vdash (b)$, $(b) \vdash (a)$;

2) если a входит в b, а b входит в c, то a входит в c;

3) одна формула входит в другую лишь в силу пунктов 1–2.

Для упрощения записи будем:

1) скобки в ряде случаев опускать, полагая что $\cdot$ связывает сильнее, чем: (и сильнее, чем $\vee$), а оба они сильнее, чем $\vdash$;

2) вместо (a) писать a, вместо $\sim (a)$ писать $\sim a$;

3) знак $\cdot$ опускать, записывая соединяемые им формулы рядом, без интервала;

4) вместо двух формул $a \vdash b$ и $b \vdash a$ писать $a \dashv\vdash b$.

Сформулируем систему Z^1, удовлетворяющую требованию III (узкое или сильное следование в нашей терминологии).

Аксиомы Z^1:

1) $x \dashv\vdash \sim\sim x$;

2) $xy \vdash x$;

3) $xy \vdash yx$;

4) $xyz \dashv\vdash x(yz)$; $x^1x^2 \ldots x^n \dashv\vdash a$, где a отличается от $x^1x^2 \ldots x^n$ лишь расстановкой скобок;

5) $\sim (xy) \dashv\vdash \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y$;

6) $\sim (x : y) \dashv\vdash xy : \sim x \sim y$, $\sim (x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \dashv\vdash a^1 : a^2 : \ldots : a^k$, где $a^1 : a^2 : \ldots : a^k$ есть множество формул, в которое включается формула $x^1x^2 \ldots x^n$ и всевозможные формулы, отличающиеся от нее наличием $\sim$ перед всеми $x^1, x^2, \ldots, x^n$ или перед i $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ из формул $x^1, x^2, \ldots, x^n$;

7) $x^1 : x^2 : \ldots : x^n \vdash a$, где a отличается от посылки лишь какой-то (любой, удовлетворяющей определению пропозициональной формулы) расстановкой скобок;

8) $b \vdash a^1 : a^2 : \ldots : a^n$, где каждая из $a^1, \ldots, a^n$ есть либо $\sim xxc$, либо $a^{i1}x^1 \cdot \ldots \cdot a^{im}x^m$ ($a^{i1}, \ldots, a^{im}$ означают наличие или отсутствие $\sim$), все $a^{i1}x^1 \cdot \ldots \cdot a^{im}x^m$ попарно различаются лишь числом и расположением $\sim$, b отличается от $a^1 : a^2 : \ldots : a^n$ лишь расстановкой скобок;

9) $xz : yz \vdash (x : y)z$, $x^1y : x^2y : \ldots : x^ny \vdash (x^1 : x^2 : \ldots : x^n)y$;

10) $(x : y)z \vdash xz : y$, $(x^1 : \ldots : x^n)(y^1 : \ldots : y^m) \vdash x^1y^1 : \ldots : x^1y^m : x^2 : \ldots : x^n$.

Правила вывода Z^1:

1) подстановка в переменную;

2) если $a \dashv\vdash b$ и d получается из c путем замены вхождения a формулой b, то $c \vdash d$;

3) если $a \vdash b$ и $b \vdash c$, то $a \vdash c$;

4) если $a \vdash b$ и $a \vdash c$, то $a \vdash bc$.

Доказуемая формула:

1) аксиомы 1–10 суть доказуемые формулы;

2) формулы, получающиеся из доказуемых формул по правилам 1–4, суть доказуемые формулы;

3) формула доказуема лишь в силу 1 и 2.

Система Z^1 удовлетворяет приведенной выше интуитивной основе Z°: в ней доказуемы все утверждения последней. Все доказуемые формулы системы Z^1 удовлетворяют требованиям I и III. Следовательно, в ней недоказуемы формулы

$$\sim xx \vdash y, x \vdash \sim(\sim yy), \quad x \vdash (y \supset x), \quad x \vdash (\sim x \supset y), \quad x \vdash y : \sim y$$

и т. п., подобные «парадоксальным» формулам систем материальной импликации, строгой импликации Льюиса и сильной импликации Аккермана. С другой стороны, все формулы, удовлетворяющие требованиям I и III, доказуемы в Z^1 (доказательство этих утверждений дано в работе Г. А. Смирнова [9]). Следствием этих утверждений является следующее утверждение: формула $a \vdash b$ доказуема в Z^1, если и только если $a \supset b$ есть тавтология двузначной логики такая, что в b входят только те пропозициональные переменные, которые входят и в a.

Система Z^2, удовлетворяющая I и II, получается путем добавления к Z^1 аксиомы $\sim x \vdash \sim (xy)$ и ограничения к третьему правилу вывода: в a, b и c входит хотя бы одна одинаковая переменная. Все формулы, удовлетворяющие I и II, доказуемы в Z^2, и наоборот (доказано Г. А. Смирновым). Системы Аккермана, Андерсона и Белнапа в этом смысле полными не являются. Система, удовлетворяющая I и II, рассматривается в работе Л. А. Бобровой [1].

Система Z^3, охватывающая вырожденные случаи, получается благодаря следующим дополнениям к Z^1. К определению формулы следования добавляется пункт: если a есть пропозициональная формула, то $\vdash a$ есть формула следования. К аксиомам добавляется аксиома:

11) $\vdash \sim(\sim xx)$.

К правилам вывода добавляется правило:

5) если $a \vdash b$ и $\vdash a$, то $\vdash b$.

Имеют силу следующие утверждения:

1) если a доказуема в классическом пропозициональном исчислении (есть тавтология в двузначной пропозициональной логике), то $\vdash a$ доказуема в Z^3;

2) если $\vdash a$ доказуема в Z^3, то a доказуема в классическом пропозициональном исчислении (есть тавтология двузначной логики).

§ 15. «Парадоксы» сильного следования

В Z^1 доказуемы формулы (1):

$$x \vdash x :\sim x, \quad x \vdash \sim(\sim xx), \quad \sim xx \vdash x :\sim x,$$
$$\sim xx \vdash \sim(\sim xx), \quad \sim xx \vdash x, \quad x \vdash x \vee \sim x$$

и т. п. Их иногда рассматривают как частный случай формул (2):

$$y \vdash x :\sim x, \quad y \vdash x \vee \sim x, \quad y \vdash \sim(\sim xx), \quad \sim xx \vdash y.$$

И потому их считают точно так же «парадоксальными».

Но правило подстановки есть правило получения из доказуемых в некоторой логической системе формул новых доказуемых в этой же системе формул. Так что безотносительно к какой-то определенной логической системе выражение «частный случай формулы» лишено смысла. Одна формула есть частный случай другой, если и только если последняя доказуема в данной логической системе, а первая получается из нее по правилу подстановки. Поскольку в Z^1 формулы (2) недоказуемы, формулы (1) нельзя рассматривать как их частный случай. И если формулы (1) вызывают какие-то возражения, последние должны быть выявлены независимо от формул (2). При этом, очевидно, к требованиям I–III должно быть добавлено еще какое-то интуитивное требование, которому априори должно отвечать логическое следование.

Формулы I являются неизбежной платой за применение дедуктивного метода в определении класса самих правил дедукции, удовлетворяющих требованиям I и III. От них можно избавиться, и притом — разными способами. В частности, это можно сделать так. Только аксиомы Z^1 (или только формулы Z°) рассматривать как правила

логического следования первого (допустим) уровня, предъявляя к ним требование IV: формулы вида $x \vdash x : a$ исключаются из числа приемлемых формул следования. Следствия же из них рассматривать как правила логического следования второго уровня. Другой путь — построение более узкой, чем Z^1, логической системы. Так, система Z^{*1} получается из Z^1 путем присоединения аксиом:

$$(x : y)x \vdash \sim y,$$
$$(x : y) \sim x \vdash y,$$
$$x : y \dashv\vdash x \sim y : \sim xy,$$
$$x^1 : x^2 : \ldots : x^n \dashv\vdash$$
$$\dashv\vdash x^1 \sim x^2 \ldots \sim x^n : x^2 \sim x^1 \ldots \sim x^n : \ldots : x^n \sim x^1 \ldots \sim x^{n-1}$$

и замены второго правила вывода правилом: Если $b \dashv\vdash c$, то $a : b \vdash a : c$ и $a^1 : \ldots a^n : b \vdash a^1 : \ldots a^n : c$. В этой системе не получаются формулы (1), но зато она неполна относительно класса формул, удовлетворяющих требованиям I и III. Кроме того, и в Z^{*1} можно получить доказуемые формулы, которые покажутся с какой-то точки зрения неподходящими («интуитивно неприемлемыми»). Но тогда эта точка зрения должна быть выявлена, и т. д. без конца.

Заключение

Решение проблемы логического следования, таким образом, заключается не в том, чтобы отыскать абсолютно точное (адекватное) формальное определение какого-то «истинного», «настоящего», «природного» и т. п. логического следования, которого на самом деле не существует. Решение ее заключается в том, чтобы:

1) осуществить экспликацию некоторого интуитивного (привычного, стихийно сложившегося) понимания некоторых логических форм;

2) осуществить экспликацию именно различных логических форм, установить их точные различия и взаимоотношения;

3) построить различного рода формальные системы, соответствующие им, исследовать их свойства и взаимоотношения.

Короче говоря, решением проблемы логического следования в конечном счете является более детальная и более дифференцированная, чем это имело место в классической логике, разработка логического аппарата в том направлении, которое было намечено работами Льюиса, Шмидта, Аккермана, Белнапа, Андерсона и других авторов. Что касается стремления избежать «парадоксов» материальной и строгой (и какой-то иной) импликации, то это есть лишь первоначальная и наиболее поверхностная постановка проблемы.

Литература

1. *Боброва Л. А.* К проблеме логического следования // Вестник МГУ. 1966. № 2.
2. *Донченко В. В.* Некоторые вопросы, связанные с проблемой разрешения для исчисления строгой импликации // Проблемы логики. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
3. *Зиновьев А. А.* Логика высказываний и теория вывода. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
4. *Зиновьев А. А.* Логическое и физическое следование // Проблемы логики научного познания. М.: Наука, 1964.
5. *Зиновьев А. А.* Об основных понятиях и принципах логики науки // Логическое строение научных понятий. М.: Наука, 1965.
6. *Карнап Р.* Значение и необходимость. М.: ИЛ, 1959.
7. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: ИЛ, 1959.
8. *Орлов И. Е.* Исчисление совместности предложений // Математический сборник. 1928. Т. 35, вып. 3–4.
9. *Смирнов Г. А.* Доказательство основных теорем в теории сильного следования // Логическая семантика и модальная логика. М.: Наука, 1967.
10. *Ackermann W.* Begründung einer strengen Implikation // Journal of Symbolic Logic. 1956. Vol. 21, № 2.
11. *Ackermann W.* Über die Beziehung zwischen strikter und strenger Implikation // Dialectica. 1958. Vol. 12, № 47/48.
12. *Anderson A. R.* Review of Wilhelm Ackermann « Begründung einer strengen Implikation» // Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22.
13. *Anderson A. R.* Completeness Theorems for the Systems E of Entailment and EQ of Entailment with Quantification // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1960. Bd. 6.
14. *Anderson A. R., Belnap N. D.* A Modification of Ackermann's «Rigorous Implication» // Journal of Symbolic Logic. 1958. Vol. 23.
15. *Anderson A. R., Belnap N. D.* Modalities in Ackermann's «Rigorous Implication» // Journal of Symbolic Logic. 1959. Vol. 24.
16. *Anderson A. R., Belnap N. D., Wallace J. R.* Independent Axiom Schemata for the Pure Theory of Entailment // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1960. Bd. 6.
17. *Anderson A. R., Belnap N. D.* The Pure Calculus of Entailment // Journal of Symbolic Logic. 1962. Vol. 27.
18. *Anderson A. R., Belnap N. D.* First Degree Entailments // Mathematische Annalen. 1963. Bd. 149.

19. *Belnap N. D.* A Formal Analysis of Entailment // Technical Report. № 7. Office of Naval Research, Contract SAR/Nour — 609 (16). New Haven, 1960.
20. *Belnap N. D.* The Formalization of Entailment // Technical Report. № 8. Office of Naval Research, Contract SAR/Nour — 609 (16). New Haven, 1959.
21. *Belnap N. D.* Entailment and Relevance // Journal of Symbolic Logic. 1960. Vol. 25.
22. *Belnap N. D.* EQ and First Order Functional Calculus // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1960. Bd. 6.
23. *Belnap N. D., Wallace J. R.* A Dicision Procedure for the System E–I of Entailment with Negation // Technical Report. № 11. Office of Naval Research, Contract SAR/Nour — 609 (16). New Haven, 1961.
24. *Bernays P.* John Myhill. On the Interpretation of the Sign «⊃» // Journal of Symbolic Logic. 1955. Vol. 20.
25. *Carnap R.* Einführung in die Symbolische Logik. Wien, 1954.
26. *Curry H. B.* The Interpretation of Formalized Implication // Theoria. 1959. Vol. 25.
27. *Duncan-Jones A. E.* Is Strict Implication the Same as Entailment? // Analysis. 1935. Vol. 2.
28. *Johnson W. E.* Logic. Cambridge, 1921.
29. *Kripke S. A.* The Problem of Entailment // Journal of Symbolic Logic. 1959. Vol. 24.
30. *Lemmon E. J., Meredith C. A., Meredith D., Prior A. N., Thomas I.* New Foundations for Lewis Modal Systems // Journal of Symbolic Logic. 1958. Vol. 22.
31. *Lewis C. I.* Implication and the Algebra of Logic // Mind. 1912. Vol. 21.
32. *Lewis C. I.* The Calculus of Strict Implication // Mind. 1914. Vol. 23.
33. *Lewis C. I.* A Survey of Symbolic Logic. Berkeley, 1918.
34. *Lewis C. I.* Emch's Calculus and Strict Implication // Journal of Symbolic Logic. 1936. Vol. 1.
35. *Lewis C. I., Langford C. H.* Symbolic Logic. New York, London, 1932.
36. *Łukasiewicz J.* A System of Modal Logic // Journal of Symbolic Logic. 1952. Vol. 1.
37. *Marcus R. B.* The Deduction Theorem in a Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication // Journal of Symbolic Logic. 1946. Vol. 11.
38. *Marcus R. B.* Strict Implication. Deducibility and the Deduction Theorem // Journal of Symbolic Logic. 1953. Vol. 18.
39. *McKinsey J. C. C.* A Solution of the Decision Problem for the Lewis Systems S2 and S4, with an Application to Topology // Journal of Symbolic Logic. 1941. Vol. 6.
40. *McKinsey J. C. C., Tarski A.* A Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting // Journal of Symbolic Logic. 1948. Vol. 13.
41. *Moh Shaw-Kwei.* The Deduction Theorems and Two New Logical Systems // Methods. 1950. Vol. 2.
42. *Myhill J.* On the Interpretation of the Sign «⊃» // Journal of Symbolic Logic. 1953. Vol. 18.

43. *Pap A.* Logic and the Concept of Entailment // Journal of Philosophy. 1950. Vol. 47.
44. *Pap A.* Strict Implication, Entailment and Modal Iteration // Philosophical Review. 1955. Vol. 64.
45. *Simons L.* New Axiomatizations of S3 and S4 // Journal of Symbolic Logic. 1953. Vol. 18.
46. *Schmidt A.* Ein aussagenlogischer Zugang zu den Modalitäten der strikten Logik // Proceedings of the International Mathematical Congress. Amsterdam, 1954.
47. *Steins E.* Natural Implication and Material Implication // Theoria. 1947. Vol. 13.
48. *Vredenduin P. G. J.* A System of Strict Implication // Journal of Symbolic Logic. 1939. Vol. 9.
49. *Wright G. H.* A Note on Entailment // Philosophical Quarterly. 1959. Vol. 9.

Раздел IV

НЕТРАДИЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ВЫВОДА

Общеизвестно, что значительная часть утверждений науки получается путем логического вывода из других утверждений. Общеизвестно также, что вопрос о том, когда одни утверждения логически выводятся (логически следуют, получаются по правилам логики, дедуцируются и т. п.) из других, получил разработку как основной вопрос особой науки — науки логики. И, казалось бы, теперь читателя, интересующегося этим вопросом, достаточно отослать к учебникам логики и книгам, дающим более или менее полное изложение теории вывода. Однако имеется ряд обстоятельств, позволяющих говорить о проблеме логического следования. Эти обстоятельства связаны, как уже отмечалось в первой главе, с особенностями методов современной логики. Рассмотрим их подробнее. Это важно не только как иллюстрация применения методов современной логики к анализу науки, но и для понимания природы правил логического следования.

Тот факт, что из X логически следует Y, будем записывать в форме

$$X \vdash Y.$$

Раздел логики, в котором рассматриваются правила логического следования для высказываний с операторами «и», «или» и «не», будем называть общей теорией логического следования. Проблема логического следования в характерном для современной логики виде сложилась именно на уровне общей теории логического следования.

§ 1. Классическая теория следования

Правила логического следования вырабатываются с таким расчетом, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия. Для современной логики характерно то, что класс этих правил устанавливается посредством тех или иных интерпретаций логических исчислений. Так, класс правил логического следования для высказываний, построенных из простых высказываний с помощью операторов «и», «или» и «не» и т. п., может быть определен посредством классической пропозициональной логики.

Под классической пропозициональной логикой мы здесь имеем в виду следующее:

1) функционально полные двузначные матричные (истинностные) построения, — двузначную пропозициональную алгебру;

2) аксиоматические построения (системы гильбертовского типа), дедуктивно эквивалентные двузначной пропозициональной алгебре, и вообще любые формальные системы, дедуктивно эквивалентные классическим аксиоматическим построениям (например, некоторые системы генценовского типа), — классические пропозициональные исчисления.

Проблема логического следования в ее специфической для современной логики форме и возникла в связи с интерпретацией классической пропозициональной логики в качестве общей теории дедукции.

Упомянутая выше интерпретация состоит в следующем:

1) пропозициональные формулы рассматриваются как высказывания;

2) знаки конъюнкции, нестрогой дизъюнкции и отрицания рассматриваются соответственно как «и», «или» (неисключающее) и «не»;

3) значения пропозициональных формул рассматриваются как истинность и ложность высказываний.

При такой интерпретации обнаруживается следующее свойство знака математической импликации: если $X \supset Y$ истинно и X истинно, то Y истинно. Оно позволяет рассматривать этот знак как знак логического следования. В результате тавтологии двузначной алгебры доказуемые формулы классического исчисления, содержащие знак материальной импликации, получают интерпретацию как правила логического следования. Классическая пропозициональная логика здесь рассматривается как общая теория логического следования (вывода, дедукции). Эта концепция является в известном смысле доминирующей.

Классическая общая теория логического следования непротиворечива и полна во всех рассматриваемых в логике смыслах. В том числе, если присоединить к числу ее аксиом формулу, которая недоказуема в ней, то полученная система будет противоречивой. Ее, таким образом, нельзя расширить без противоречия, — она является максимально широкой. Слово «общая» здесь не несет никакой иной нагрузки, кроме указания на то, что в этом разделе теории логического следования рассматриваются лишь правила следования для логических операторов «и», «или», «не» и производных от них операторов.

§ 2. Критика классической теории логического следования

Как уже отмечалось, навыки получения одних высказываний из других логическим путем у людей складываются так, что для осуществления самих актов вывода (переходов от данных высказываний

к вытекающим из них следствиям) не имеет значения, истинны или нет посылки. Какие следствия получаются из данных посылок, зависит от того, какие термины, высказывания и логические знаки входят в их состав и как они расположены друг относительно друга.

Хотя «парадоксы» материальной импликации практически не ведут к отрицательным последствиям в познании, остается фактом, что нет полного совпадения материальной импликации и логического следования.

Так как классическая логика синтаксически полна (и класс доказуемых формул или тавтологий с материальной импликацией в ней максимально широк), то естественно намечается и путь, по которому надо идти в поисках логической системы, адекватной логическому следованию (формализующей последнее): сужение классической логики.

§ 3. Строгая импликация

Парадоксы материальной импликации исключаются в системе, получившей название системы строгой импликации.

Тот факт, что X строго имплицирует Y, обозначается символом

$$X \prec Y.$$

В системе строгой импликации не являются доказуемыми формулы $X \prec Y$ такие, что в Y имеется знак строгой импликации, а в X нет: среди аксиом такие формулы отсутствуют, а правила вывода не дают возможности их получить. Отсюда получаем, что формулы

$$X \prec (Y \prec X),$$
$$\sim X \prec (X \prec Y)$$

в системе строгой импликации не являются доказуемыми. Формулы $X \prec Y$ не рассматриваются как функции истинности от X и Y. Так что при интерпретации строгой импликации в качестве логического следования исключены последствия, подобные «парадоксам» материальной импликации.

Но в системе строгой импликации доказуемы формулы

$$\sim X \cdot X \prec Y,$$
$$Y \prec \sim (\sim X \cdot X).$$

Поскольку $\sim X \cdot X$ невозможно, а $\sim (\sim X \cdot X)$ необходимо, то при интерпретации строгой импликации в качестве логического следования получаем:

1) из невозможного высказывания следует любое;
2) необходимое высказывание следует из любого.

Эти утверждения получили название «парадоксов строгой импликации».

Некоторые авторы отрицают «парадоксальность» таких формул, которые рассмотрены выше, и не различают логическое следование и строгую импликацию как логические формы. Они признают (в крайнем случае) лишь различие этих форм в отношении к полезности. «Парадоксальные» строгие импликации считаются бесполезными для вывода: если X невозможно, мы не можем использовать $X \prec Y$ как основание для доказательства Y; если Y необходимо, то не требуется никаких посылок для его принятия, и X излишня. Однако большинство авторов считает, что строгая импликация все еще шире логического следования, и для построения логической системы, адекватной последнему, необходимо идти по пути исключения также и «парадоксов» строгой импликации.

Другой существенный недостаток строгой импликации — принятие модальных понятий «возможно» и «необходимо» в качестве первично ясных. На самом же деле эти понятия таковыми не являются, для определения их (т. е. для описания свойств содержащих их высказываний) требуется общая теория дедукции. Проблема логического следования сначала должна быть решена для любых высказываний на уровне общей теории (т. е. независимо от модальных понятий и без использования их), и полученное решение затем может быть использовано для определения класса правил логического следования модальных высказываний.

Исправлением недостатков системы строгой импликации явились системы сильной импликации. Сильная импликация $X \rightarrow Y$ читается как «Y есть часть содержания X». Модальные понятия вводятся как производные. Понятия «содержание» и «часть содержания» не разъясняются.

Системы сильной импликации обладают следующими свойствами:

1) если в формуле $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ знак импликации отсутствует в X, то эта формула недоказуема;

2) если в формуле $X \rightarrow Y$ формулы X и Y таковы, что в них нет одинаковых переменных, то эта формула недоказуема. Отсюда следует, что формулы

$$X \rightarrow (Y \rightarrow X),$$
$$\sim X \rightarrow (X \rightarrow Y),$$
$$X \cdot \sim X \rightarrow Y,$$
$$X \rightarrow \sim (Y \cdot \sim Y)$$

недоказуемы. А значит, «парадоксы», подобные «парадоксам» материальной и строгой импликаций, при интерпретации систем сильной

импликации в качестве теории логического следования получиться не могут.

Но в системах сильной импликации оказываются недоказуемыми некоторые формулы, не являющиеся «парадоксальными». Так, формула

$$(X \vee Y) \cdot \sim X \rightarrow Y$$

вполне приемлема с интуитивной точки зрения, но она недоказуема в упомянутых системах. Таким образом, прогресс в одном отношении (исключение «парадоксальных» формул) оказался регрессом в другом (исключение «непарадоксальных» формул), и проблема логического следования встает снова, только уже в несколько иной и более сложной форме.

§ 4. В чем суть проблемы

Как уже отмечалось, в отношении логической системы, в которой нельзя доказать «парадоксальные» формулы, правомерны следующие вопросы:

1) имеются ли какие-либо гарантии того, что исключение этих «парадоксальных» формул означает исключение «парадоксальных» формул вообще; т. е. имеются ли гарантии, что все доказуемые в этой системе формулы при интерпретации их в качестве правил логического следования удовлетворяют интуиции?

2) имеются ли какие-либо гарантии, что исключение «парадоксальных» формул из числа доказуемых не ведет к исключению формул, не являющихся «парадоксальными» с точки зрения интуиции?

Вернемся, например, к формуле

$$(X \vee Y) \cdot \sim X \rightarrow Y, \tag{1}$$

которая недоказуема в системах строгой импликации. При интерпретации ее в качестве правила логического следования получается утверждение: «Если X или Y, и при этом не-X, то отсюда следует, что Y». Оно вполне согласуется с интуицией, с привычным пониманием следования. Не вызывают сомнения и правила дистрибутивности (2) и транзитивности (3):

$$X \cdot Y \vee X \cdot Z \rightarrow X \cdot (Y \vee Z), \tag{2}$$

$$(X \rightarrow Y) \cdot (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z). \tag{3}$$

Используя формулы (1)–(3) и формулу

$$X \rightarrow X \vee Y, \tag{4}$$

мы получим «парадоксальную» формулу

$$\sim X \cdot X \rightarrow Y.$$

Очевидно, среди использованных формул имеется такая, которую надо исключить из числа приемлемых, как «парадоксальную». Но почему надо исключить формулу (1), а не формулу (4)? Формула (4) вызывает сомнение хотя бы потому, что в ней появляется Y, отсутствовавшее в посылке. Почему же отдается предпочтение формуле (4), а не формуле (1)?

§ 5. Высказывания о следовании

Мы рассмотрим основные стороны проблемы логического следования и сделаем ряд замечаний, которые необходимы для того, чтобы оправдать или, во всяком случае, пояснить нашу теорию логического следования.

Записывая тот факт, что из высказывания X логически следует высказывание Y, в форме $X \vdash Y$, мы тем самым пишем высказывание «Из X логически следует Y». И теория логического следования состоит из такого рода высказываний. Естественно, надо совершенно отчетливо представлять себе, что это за высказывания.

Высказывание $X \vdash Y$ («Из X логически следует Y») есть элементарное высказывание, каким бы странным это наше заявление ни оказалось на первый взгляд (ведь в него явным образом входят высказывания X и Y). Дело в том, что частями этого высказывания являются не сами высказывания X и Y, а термины $[X]$ и $[Y]$, обозначающие их. Символ $\vdash$ здесь является не оператором, соединяющим высказывания X и Y, а двухместным предикатом «из первого высказывания логически следует второе». Так что рассматриваемые высказывания фактически имеют структуру

$$([X], [Y]) \leftarrow (\vdash).$$

И только для того, чтобы «приблизить» запись к привычному литературному языку, мы записываем их в форме $X \vdash Y$. Таким образом, рассматривать высказывания о логическом следовании одних высказываний из других как сложное высказывание ошибочно. В $X \vdash Y$ говорится не о тех предметах, к которым относятся X и Y, а о связи самих X и Y как особых предметов. Оно есть метавысказывание по отношению к X и Y.

Хотя сказанное очевидно, это свойство высказываний $X \vdash Y$ удивительным образом игнорируется во всех известных нам работах по теории логического следования. Об этом говорит то, что для $X \vdash Y$ в качестве средства экспликации ищут всякого рода импликации (и прежде

всего $X \supset Y$), интерпретируемые как сложные высказывания, путают $X \vdash Y$ с условным высказыванием $X \to Y$ и т. д. Об этом говорит и вид формул логических систем, которые предлагают в качестве средства определения правил логического следования.

Как бы точно ни совпадали свойства каких-то сложных высказываний с высказываниями о следовании, это ни в коем случае не отменяет того, что высказывания вида $X \vdash Y$ суть элементарные, а не сложные высказывания. И никакая теория сложных высказываний не может быть их теорией. Высказывания $X \to Y$ и $X \supset Y$, имея нечто общее с $X \vdash Y$, принципиально отличаются от последнего.

Для общей теории логического следования из сказанного вытекает следующее: поскольку субъектно-предикатное строение высказываний здесь не рассматривается, в правилах $X \vdash Y$ в X и в Y не должен фигурировать предикат $\vdash$. Поэтому если некоторая данная логическая система интерпретируется как общая теория логического следования, то лишь один знак в ее доказуемых формулах может рассматриваться как знак следования. И если в таких формулах знак, интерпретируемый как знак следования, встречается более одного раза, то прочие его вхождения должны получить какую-то иную интерпретацию.

§ 6. Основной принцип дедукции

Правила логического следования вырабатываются с таким расчетом, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия. Когда эти правила уже выработаны и известны исследователю, то отношение переворачивается и приобретает силу следующий принцип: если $X \vdash Y$, и при этом X истинно, то Y истинно; если $X \vdash Y$ и при этом Y неистинно, то X неистинно. Будем этот принцип называть основным принципом дедукции. Благодаря ему исследователь принимает следствия истинных посылок и отвергает посылки неистинных следствий. И этим роль основного принципа дедукции полностью исчерпывается.

В число правил логического следования основной принцип дедукции не включается. Он есть условие изобретения и применения правил логического следования, и не более того. Поэтому в логической системе, определяющей класс правил логического следования, в числе доказуемых формул не должны быть формулы, интерпретируемые как

$$X \cdot (X \vdash Y) \vdash Y.$$

Во-первых, такого рода формулы не устраняют необходимости основного принципа дедукции. Чтобы воспользоваться такого рода формулой, все равно необходимо признание истинности посылки $X \cdot (X \vdash Y)$, чтобы признать истинным Y. Но если мы признали

$X \cdot (X \vdash Y)$, то и без формулы $X \cdot (X \vdash Y) \vdash Y$ на основании основного принципа дедукции мы имеем право признать Y. Так что эти формулы излишни. Это во-вторых.

Правила логического следования позволяют сказать, что из X логически следует Y. Но процесс получения Y не ограничивается этим: необходимо осуществить признание Y, оставив X как нечто уже отработанное. Основной принцип дедукции обеспечивает поступательность (этапность) процессов рассуждения.

§ 7. Логическое следование и значения истинности высказываний

Логическое следование нередко определяют так: из X логически следует Y, если и только если всегда, когда истинно X, истинно и Y. Это определение несостоятельно по следующим соображениям. Во-первых, оно не конструктивно в том смысле, что не определяет класс случаев, когда это имеет место. В качестве же определения класса случаев логического следования одних высказываний из других при этом указывают тавтологии двузначной логики или, соответственно, доказуемые формулы классического исчисления высказываний с материальной импликацией со всеми вытекающими отсюда последствиями (парадоксы материальной и строгой импликации).

Но и независимо от упомянутых парадоксов здесь даже нет совпадения приведенного определения и фактически указываемого класса правил логического следования. Так, в формуле $X \supset Y \vee \sim Y$ для истинности $Y \vee \sim Y$ требуется истинность Y или $\sim Y$, а не истинность X; в формуле $\sim X \cdot X \supset Y$ для истинности $\sim X \cdot X$ необходима истинность обоих $\sim X$ и X, что не имеет никакого отношения к истинности Y. Кроме того, если учесть, что $\sim X \cdot X$ вообще не может быть истинным, то выражение «всегда, когда истинно $\sim X \cdot X$» оказывается двусмысленным. Короче говоря, приведенное в начале параграфа определение оказывается ни к чему не обязывающей фразой.

Между высказываниями, далее, X и Y может иметь место зависимость, вполне удовлетворяющая критикуемому определению логического следования, но между X и Y не будет никакого отношения логического следования. Так обстоит дело в случаях условных высказываний $X \rightarrow Y$, которые являются результатом опытного исследования, принимаются как аксиомы части или следствия определений.

Определить логическое следование — значит буквально перечислить случаи, когда одни высказывания логически следуют из других, т. е. перечислить правила логического следования. При этом необходимо учитывать отношения высказываний по значениям истинности,

чтобы был выполнен основной принцип дедукции. Но это — условие выработки правил логического следования, а не их определение. Кроме того, это — одно из условий. Оно необходимо, но не достаточно.

В каждом разделе логики класс правил логического следования устанавливается применительно к тем структурам высказываний, которые рассматриваются в этом разделе. Для этих структур вводятся определения значений истинности, так что использование этого условия проблемы не представляет.

Принципиальное значение имеет тот факт, что число значений истинности никак не влияет на класс правил логического следования: для установления последних важно только то, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия, а какие еще возможны значения истинности, кроме истинности и ее отрицания, никакой роли не играет.

§ 8. Логическое следование и смысл высказываний

Выше мы уже говорили, что высказывания в случае логического следования связаны по смыслу, но понятие смысла было не определено. Так как мы уже рассмотрели, что такое смысл высказывания, то теперь имеем возможность высказать ряд положений на этот счет.

Прежде всего связи высказываний по смыслу разнообразны. В частности, имеет место такая зависимость: чтобы знать смысл одного высказывания, необходимо знать смысл другого. С этой точки зрения связь высказываний $X \cdot Y$ и X совершенно аналогична связи высказываний $X \vee Y$ и X, а также $X \supset Y$ и X. И никакого отношения к логическому следованию такие смысловые связи высказываний не имеют.

Остаются такие случаи, когда одни высказывания тождественны по смыслу другим. Эти отношения высказываний действительно должны приниматься во внимание при установлении класса правил логического следования. Но и в этом случае нужны оговорки, практически исключающие возможность определения логического следования через такого рода смысловые отношения высказываний.

Во-первых, не все случаи логического следования можно свести к тождеству высказываний по смыслу. Например, из $X \cdot Y$ логически следует X, но $X \cdot Y$ не тождественно по смыслу с X; из допущения необходимости некоторого события логически следует его возможность, но высказывание о необходимости события не тождественно по смыслу высказыванию о возможности этого же события и т. д. Выражения «часть смысла», «часть содержания», «содержится по смыслу» и т. п. в таких случаях либо сами туманны и бессмысленны, либо обозначают смысловые зависимости, с точки зрения которых $X \cdot Y$, $X \vee Y$, $X \supset Y$ и т. п. не различаются.

С другой стороны, не всегда тождество высказываний по смыслу означает, что эти высказывания связаны как посылки и следствия. Мы уже говорили, что тождество по смыслу используется как средство определения. И это средство может быть использовано как частное соглашение в данной науке, не имеющее общелогического смысла.

При установлении класса правил логического следования необходимо учитывать тождество высказываний по смыслу только в строго определенных случаях, а именно, когда оно позволяет определить смысл высказываний с одной структурой через высказывания с другой структурой, определить одни логические операторы через другие, свести сложные конструкции высказываний к стандартным основным формам и т. п. И в каждом разделе логики эти случаи должны быть известны заранее при построении правил логического следования в этом разделе.

Наконец, когда одни высказывания получаются из других по правилам логического следования, то вторые получаются буквально из материала первых, т. е. из терминов и высказываний, входящих в структуру первых. И это обстоятельство так или иначе влияет на интуитивное понимание логического следования. Так, отвергая формулу $X \vdash Y \vee \sim Y$ как правило логического следования, неявно предполагают то, что в посылке и заключении должно быть какое-то сходное «вещество» — термин или высказывание.

*D*1. Будем называть собственными единицами смысла данного высказывания термины и простые высказывания, входящие в него. Между высказываниями имеют место смысловые отношения, которые характеризуются отношением множеств их собственных единиц смысла. Эти смысловые отношения поддаются строгой классификации: множества собственных единиц смысла двух высказываний могут совпадать, иметь по крайней мере один общий элемент, не иметь общих элементов; возможно, что одно из этих множеств включается в другое, что эти множества перекрещиваются.

В зависимости от того, какое требование будет предъявлено к посылкам и следствиям с этой точки зрения, получим разные формы логического следования. В частности, если множество собственных единиц смысла следствия включается в множество собственных единиц смысла посылки, то получим одну форму логического следования. Если же посылка и следствие содержат хотя бы одну одинаковую единицу смысла, то будет иметь место другая форма логического следования.

Если требование, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия, выполняется в отношении всех форм следования, то в отношении множества единиц их смысла возможны вариации. И ни одна из них сама по себе не лучше и не хуже другой. Просто они

суть различные формы следования. И в природе нигде нет никакого подлинного следования, с которым можно было бы их сравнить. Другое дело, какие-то из них чаще употребляются, чем другое. Но это ничего не говорит об их «правильности», «непарадоксальности», «неправильности», «парадоксальности» и т. п. Проблема логического следования, таким образом, принимает такой вид: можно ли построить логические системы, адекватные этим формам следования?

§ 9. Определения логических операторов

Особенность логических операторов состоит в том, что их свойства нельзя определить отдельно от высказываний (и терминов), в которые они входят. Определить эти операторы — значит определить свойства высказываний (и терминов), содержащих их. Поэтому определения их и принимают форму правил логического следования.

Правила логического следования дают определения логических операторов, синтезируя различные стороны их употребления и их отношения, устанавливая согласованность этих сторон.

Решение проблемы логического следования, таким образом, заключается не в том, чтобы отыскать абсолютно точное (адекватное) формальное определение какого-то «истинного», «настоящего», «природного» и т. п. логического следования, которого на самом деле не существует. Решение ее заключается в том, чтобы:

1) осуществить экспликацию некоторого интуитивного (привычного, стихийно сложившегося) понимания некоторых логических форм;

2) осуществить экспликацию именно различных логических форм, установить их точные различия и взаимоотношения;

3) построить различного рода формальные системы, соответствующие им, исследовать их свойства и взаимоотношения.

Короче говоря, решением проблемы логического следования в конечном счете является более детальная и более дифференцированная, чем это имело место в классической логике, разработка логического аппарата в рассматриваемом направлении. Что касается стремления избежать «парадоксов» материальной и строгой (и какой-то иной) импликации, то это есть лишь первоначальная и наиболее поверхностная постановка проблемы.

§ 10. Экспликация интуиции

Все то, что мы говорили выше, суть лишь методические установки, с которыми должен считаться профессионал логик, разрабатывающий

теорию логического следования. Но эти установки полезно знать и «потребителям» логики, поскольку описание их — единственно возможный путь описать происхождение и природу правил логического следования. А последние полезно знать хотя бы для того, чтобы не питать сильно преувеличенных иллюзий относительно возможностей логики и не мистифицировать ее законы.

Результатом экспликации употребляемых логических операторов является некоторая конечная система утверждений о логическом следовании одних высказываний из других. Эта система должна быть достаточной для осмысленного оперирования логическими операторами во всех возможных случаях их употребления. Она образует основание для общей теории логического следования. Но здесь возможны вариации. Они касаются отбора логических операторов, разделения их на основные и производные, отбора определяющих их утверждений и вообще отбора принимаемых утверждений, а также формулировок общих требований к ним.

Условимся использовать для сокращения символы вида

$$X \dashv\vdash Y,$$

если имеет место $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

Мы принимаем в качестве основных логических операторов $\cdot$, : и $\sim$. Их свойства определяются следующей системой утверждений, дающей первоначальную экспликацию их интуитивного понимания:

$$X \dashv\vdash \sim\sim X,$$
$$X \cdot Y \dashv\vdash X,$$
$$X \cdot Y \vdash Y \cdot X,$$
$$(X : Y) \cdot X \vdash \sim Y$$

и т. п. (дается полный список, учитывающий всевозможные комбинации операторов и высказываний).

Эта система обладает следующим свойством: все утверждения вида $X \vdash Y$, образующие ее, характеризуются тем, что в заключение Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в посылке X. Будем такое логическое следование называть сильным или узким.

Если к приведенным утверждениям добавить еще одно

$$\sim X \vdash \sim (X \cdot Y),$$

то получим систему, определяющую ослабленное или расширенное логическое следование. Эта система обладает таким свойством: во всех ее утверждениях $X \vdash Y$ в X и в Y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание.

§ 11. Аксиоматизация

При аксиоматизации общей теории логического следования должны быть выполнены условия:

1) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы все приведенные выше утверждения, — оно должно соответствовать интуитивному пониманию логического следования;

2) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы не любые утверждения (кроме приведенных), но лишь утверждения, удовлетворяющие некоторым требованиям на отношения единиц смысла, входящих в посылки и заключения.

И в зависимости от этих требований возможны различные аксиоматические построения, дающие определения различных форм логического следования.

При аксиоматизации некоторое число утверждений вида $X \vdash Y$ выбирается в качестве основных (аксиомы) и указываются правила, с помощью которых из них можно получить остальные утверждения такого рода.

Аксиоматизация теории логического следования еще не есть ее формализация. В аксиоматической системе речь идет все еще о высказываниях с определенными логическими операторами. Это — теория, описывающая свойства высказываний некоторого заданного вида и содержащих их операторов. При формализации же отвлекаются от значения употребляемых символов (букв), рассматривая их не как обозначения высказываний и логических операторов, а просто как особого рода объекты.

§ 12. Теория сильного логического следования

Ниже мы охарактеризуем общую теорию логического следования применительно к целям данной книги. При этом мы будем в качестве основных операторов использовать $\cdot$, $\vee$ и $\sim$, поскольку системы с оператором $\vee$ выглядят несколько проще, чем с оператором :. Но это принципиального значения не имеет, так как соответствующие системы эквивалентны с точки зрения определяемых ими классов правил логического следования.

Система S^s сильного логического следования имеет следующий вид.

Алфавит:

1) буквы p, q, r с индексами и без индексов — элементарные высказывания;

2) $\cdot$, $\vee$, $\sim$ — логические операторы («и», соединительное «или», «не»);

3) $\vdash$ — предикат логического следования;

4) скобки и запятые — ограничители высказываний и некоторого рода правила однозначности их прочтения.

*D*1. Высказывания:

1) элементарные высказывания суть высказывания;

2) если X есть высказывание, то $\sim X$ есть высказывание;

3) если $X^1, \ldots, X^n$ $(n \geqslant 2)$ суть высказывания, то $(X^1 \cdot X^2 \cdot \ldots \cdot X^n)$ и $(X^1 \vee X^2 \vee \ldots \vee X^n)$ суть высказывания;

4) нечто есть высказывание лишь в силу 1–3.

*D*2. $([X], [Y]) \leftarrow (\vdash)$ есть высказывание о логическом следовании, если и только если X и Y суть высказывания.

Поскольку согласно *D*1 строение элементарных высказываний не рассматривается в общей теории логического следования, то в правилах логического следования знак $\vdash$ может встретиться здесь лишь один раз, что и фиксирует *D*2.

Примем следующие упрощения записи:

1) оператор $\cdot$ будем опускать, записывая соединяемые им высказывания рядом без интервала;

2) скобки в ряде случаев будем опускать, полагая, что их можно восстановить в таком порядке: сначала заключаются в скобки все высказывания, соединенные операторами $\cdot$, а затем — все, соединенные операторами $\vee$;

3) вместо символов вида $([X], [Y]) \leftarrow (\vdash)$ будем употреблять символы $X \vdash Y$.

Прежде чем сформулировать аксиомы, сделаем одно замечание об аксиомах вообще. Поскольку мы излагаем аксиоматическое построение общей теории логического следования, а не формальную систему, то различие аксиом и аксиоматических схем здесь теряет смысл. Но во избежание недоразумений мы примем такое условие: пусть буквы $X, Y, Z, X^1, X^2, \ldots$ суть любые высказывания, указанные в *D*1, а различие их пусть означает лишь то, что высказывания могут быть различными. При таком условии формулируемые ниже аксиомы соответствуют аксиомным схемам формальных построений.

Аксиомы S^s:

1. $\sim\sim X \dashv\vdash X$;
2. $XY \vdash X$;
3. $XY \vdash YX$;
4. $X^1X^2 \ldots X^n \dashv\vdash Y$,

где Y отличается от $X^1X^2 \ldots X^n$ лишь какой-то расстановкой скобок.

5. $\sim(XY) \dashv\vdash \sim X \vee \sim Y$,
   $\sim(X^1X^2 \ldots X^n) \dashv\vdash \sim X^1 \vee \sim X^2 \vee \ldots \vee \sim X^n$;
6. $(X \vee Y)Z \vdash XZ \vee Y$;
7. $XZ \vee YZ \vdash (X \vee Y)Z$;
8. $XY \vee Z \vdash (XY \vee Z)(Y \vee \sim Y)$.

Правила вывода теорем из аксиом S^s:

1) если $X \vdash Y$ и $Y \vdash Z$, то $X \vdash Z$;
2) если $X \vdash Y$ и $X \vdash Z$, то $X \vdash YZ$;
3) если $X^1 \dashv\vdash X^2$, то $Y^1 \vdash Y^2$, где Y^2 образуется из Y^1 путем замены какого-либо вхождения высказывания X^1 в Y^1 высказыванием X^2.

*D*3. Утверждение $X \vdash Y$ будем называть доказуемым в S^s, если и только если оно есть одна из аксиом или получается из доказуемых утверждения по правилам вывода.

*D*4. Будем рассматривать $X \supset Y$ как сокращение для $\sim X \vee Y$.

*T*1. Если $X \vdash Y$ доказуемо, то $X \supset Y$ есть тавтология.

*T*2. Если X истинно, то $X \vdash Y$ и $X \vdash \sim Y$ не могут быть оба доказуемы.

*T*3. Если доказуемо $X \vdash \sim YY$, то истинно $\sim X$.

Теоремы *T*2 и *T*3 суть теоремы непротиворечивости S^s, согласно которым использование правил сильного логического следования не может привести к противоречиям, если непротиворечивы посылки.

*T*4. Если доказуемо $X \vdash Y$, то в Y не входят элементарные высказывания, не входящие в X (теорема непарадоксальности).

*T*5. Если $X \supset Y$ есть тавтология и в Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в X, то $X \vdash Y$ доказуемо в S^s (теорема полноты).

Согласно *T*4 в S^s недоказуемы утверждения

$X \vdash X \vee Y$,
$X \vdash Y \supset X$,
$X \vdash \sim X \supset Y$,
$X \vdash Y \vee \sim Y$,
$\sim XX \vdash Y$,

порождающие парадоксы, подобные парадоксам материальной и строгой импликации.

Однако в S^s доказуемы утверждения вида (α)

$$X \vdash \sim X \vee X,$$
$$\sim XX \vdash X,$$
$$X \sim YY \vdash \sim X,$$

рассматриваемые как частный случай парадоксальных утверждений вида

$$Y \vdash X \vee \sim X,$$
$$\sim XX \vdash Y,$$
$$X \sim YY \vdash Z.$$

Утверждения типа (α) суть законная плата за дедуктивный метод и за полноту охвата утверждений того или иного вида в данной системе. И вопрос об их судьбе должен решаться в зависимости от иных соображений, выходящих за рамки предлагаемой теории.

Система S^s (согласно $T5$) дает исчерпывающее определение класса случаев, когда из одних высказываний, определенных в $D1$, логически сильно следуют другие высказывания.

Другие логические операторы можно ввести посредством сокращающих определений (вроде $D4$) или дополнительных аксиом вида

$$X \supset Y \dashv\vdash \sim X \vee Y,$$
$$X^1 : X^2 : \ldots : X^n \dashv\vdash X^1 \sim X^2 \ldots \sim X^n \vee X^2 \sim X^1 \ldots \sim X^n \vee$$
$$\vee \ldots \vee X^n \sim X^1 \ldots \sim X^{n-1}.$$

§ 13. Другие системы общей теории логического следования

Теория ослабленного логического следования S^w получается путем присоединения аксиомы

9. $\sim X \vdash \sim (XY)$

и такого ограничения первого правила вывода: в X, Y и Z должно входить по крайней мере одно элементарное высказывание.

Система S^w непротиворечива в том же смысле, что и S^s. Она непарадоксальна в смысле такой теоремы:

$T1$. Если $X \vdash Y$ доказуемо в S^w, то в X и Y входит хотя бы одно одинаковое элементарное высказывание.

Согласно $T1$, в S^w не получаются парадоксы, подобные парадоксам материальной и строгой импликации.

Система S^w полна в таком смысле:

$T2$. Если $X \supset Y$ есть тавтология и в X и Y входит хотя бы одно одинаковое элементарное высказывание, то $X \vdash Y$ доказуемо в S^w.

Согласно $T2$, система S^w дает исчерпывающее определение класса случаев, когда из одних высказываний, указанных в $D1$, логически ослаблено следуют другие. Если в системах сильной импликации только один главный знак импликации рассматривать как знак логического следования, а остальные — как материальную импликацию, то эти системы будут системами ослабленного логического следования в нашем смысле. Но они не дают полного определения класса правил логического следования такого типа.

Если в системе S^w снять ограничение на первое правило вывода, получится система S^q квазиследования, обладающая следующим свойством:

$T3$. $X \vdash Y$ доказуемо в S^q, если и только если $X \supset Y$ есть тавтология.

Таким образом, теория квазиследования совпадает с классической общей теорией следования.

Из сказанного очевидно, что возможны различные теории логического следования, отвечающие различным априорным требованиям к логическому следованию, и в каждом случае правила логического следования могут быть определены исчерпывающим образом. Но только одна удовлетворяет не только требованию «Истинные заключения из истинных посылок», но и требованию «Заключения конструируются только из материала (из терминов и высказываний), входящих в посылки». Это — система S^s.

§ 14. Вырожденное следование

Правила логики не ограничиваются правилами логического следования. Сюда относятся также утверждения, которые принимаются в качестве истинных в логике или истинность которых вытекает из принятых в логике предпосылок, — логически истинные утверждения. Таковы, в частности, утверждения, получающиеся из интерпретации тавтологий пропозициональной логики (алгебры) и соответствующих доказуемых формул пропозиционального исчисления как сложных высказываний. Мы будем рассматривать их как правила вырожденного следования, т. е. как правила, позволяющие принимать некоторые высказывания независимо от каких бы то ни было посылок (как следование из пустого множества посылок).

Система S^d, охватывающая вырожденное логическое следование, получается благодаря таким дополнениям к S^s.

*D*1. $\vdash X$ есть утверждение о логической истинности X, если и только если X есть высказывание.

Дополнительная аксиома (закон противоречия):

10. $\vdash \sim (\sim XX)$.

Дополнительное правило вывода:

4) Если $X \vdash Y$ и $\vdash X$, то $\vdash Y$.

*D*2. $\vdash X$ доказуемо в S^d, если и только если $\vdash X$ есть аксиома 13 или получается из доказуемых утверждений по правилу 4.

*T*1. $\vdash X$ доказуемо в S^d, если и только если X есть двузначная тавтология.

Таким образом, S^d дает определение класса двузначных тавтологий, образованных из высказываний с операторами $\cdot$, $\vee$ и $\sim$. И в этом смысле она эквивалентна классическому исчислению высказываний.

*T*2. В S^d доказуемо $\vdash X \vee \sim X$ (закон исключенного третьего).

§ 15. Теория предикации

Теория предикации S^p получается благодаря таким допущениям к общей теории логического следования.

Алфавит:

1) $\neg$ — внутреннее отрицание;
2) ? — оператор неопределенности;
3) $s, s^1, s^2, \ldots$ — термины объектов (субъекты);
4) $P, P^1, P^2, \ldots$ — термины признаков (предикаты).

*D*1. Если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть субъекты, то $(a^1, \ldots, a^n)$ есть энарный субъект.

*D*2. Если a есть энарный субъект, а P — энарный предикат, то $P(a)$ есть элементарное высказывание.

*D*3. К определению высказывания добавляется следующее: если X есть элементарное высказывание, то $\neg X$ и $?X$ суть высказывания.

Буквы $p, q, r, \ldots$ из алфавита можно исключить. Мы ввели различные символы для внешнего и внутреннего отрицания исключительно для удобства записи.

Дополнительные аксиомы:

1. $\sim P(a) \dashv\vdash \neg P(a) \vee ?P(a)$;
2. $\sim \neg P(a) \dashv\vdash P(a) \vee ?P(a)$;
3. $\sim ?P(a) \dashv\vdash P(a) \vee \neg P(a)$.

Классический случай получается из S^p, если принять еще аксиому

4. $\sim P(a) \vdash \neg P(a)$.

Тогда в качестве следствия получим, что неопределенность исключается, т. е.

$\vdash \sim ? P(a)$.

Но если нам с самого начала требуется система для классического случая, т. е. не нужно различать отрицания и вводить неопределенность, то S^p вообще излишня.

$T1$. Если $X \vdash Y$ доказуемо в S^p, то $X \supset Y$ есть тавтология. Аналогично если $\vdash X$ доказуемо в S^p, то X есть тавтология.

Утверждения

$\sim \neg P(a) \supset P(a)$,
$P(a) \vee \neg P(a)$

тавтологиями не являются, поскольку $P(a)$ и $\neg P(a)$ могут оба быть неистинными.

Отсюда получаем (согласно $T1$), что

$T2$. Утверждения

$\sim \neg P(a) \vdash P(a)$,
$\vdash P(a) \vee \neg P(a)$

недоказуемы в S^p, и в общем (неклассическом) случае законами логики не являются.

$T3$. Но утверждение

$P(a) \vdash \sim \neg P(a)$

в S^p доказуемо.

Мы выше употребляли и будем употреблять в дальнейшем выражения «классический случай» и «неклассический случай». Их не надо смешивать с выражениями «классическое исчисление предикатов» и «неклассическое исчисление предикатов». Неклассический случай в теории следования у нас отличается от классического тем, что в нем учитывается внутреннее отрицание и неопределенность. Мы не вводим здесь другую терминологию потому, что наше словоупотребление точно так же связано с критикой классической логики и с возникновением неклассической логики.

§ 16. Классическая теория логического следования для высказываний с кванторами

Классическая теория логического следования для высказываний с кванторами получается путем такой же интерпретации классического исчисления предикатов, какая рассмотрена в § 1. Классическое исчисление предикатов получается путем присоединения к классическому исчислению высказываний дополнительных аксиом (аксиомных схем) и правил вывода, связанных с кванторами $\forall$ («все») и $\exists$ («некоторые»).

Классическое исчисление предикатов, если его интерпретировать как теорию логического следования для высказываний с кванторами, оказывается парадоксальным. В нем доказуемы формулы вида

$$(\forall a)P(a) \supset P(b),$$
$$P(b) \supset (\exists a)P(a)$$

и другие формулы, в которых в антецеденте содержатся переменные, отсутствующие в консеквенте. Если такого рода формулы рассматривать как правила логического следования, то получим утверждения, явно не соответствующие интуиции. Согласно таким правилам, мы должны признать законными такие, например, умозаключения: «Все металлы электропроводны, значит фарфор электропроводен», «Число четыре делится на два, значит некоторые нечетные числа делятся на два».

Чтобы избежать таких курьезов, при использовании классического исчисления предикатов как теории вывода принимают допущение: области значения (в нашей терминологии — предметные области) всех индивидных переменных совпадают. Если формулам классического исчисления предикатов придать вид правил логического следования, то приведенное допущение будет означать, что области значения субъектов, входящих в одно утверждение, совпадают. В наших примерах: если на место a ставится слово «металл», то и на место b должен быть вписан термин, обозначающий металл; если на место a вписали термин, обозначающий нечетное число, то и на место b должен быть вписан термин, обозначающий нечетное число.

Допущение, о котором идет речь, лежит в основе определения общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул классического исчисления предикатов. Стоит допустить, что области значения различных индивидных переменных могут не совпадать, как многие формулы $X \supset Y$, доказуемые в классическом исчислении предикатов, окажутся не общезначимыми (не всегда истинными), если в Y входят переменные, отсутствующие в X. Таковы, например, приведенные выше формулы.

Таким образом, классическое исчисление предикатов, будучи интерпретировано как теория логического следования, определяет класс правил логического следования для частного случая, когда области значения терминов совпадают. Мы не исключаем такой фрагмент из теории логического следования. Но мы полагаем, что теория логического следования для высказываний с кванторами должна быть построена сначала без ограничений на отношения множеств значений терминов (на формальном языке — без ограничений на отношения множеств значений переменных).

Классическое исчисление предикатов является дедуктивно полным (т. е. в нем доказуемы все общезначимые формулы) при том условии, что общезначимость определяется в зависимости от рассмотренного допущения о совпадении областей значения всех индивидных переменных, входящих в одну и ту же формулу. Если же допустить, что области значения индивидных переменных могут не совпадать, и учесть это в определении общезначимости формул, то исчисление предикатов, которое дедуктивно полно относительно класса общезначимых формул и все доказуемые формулы которого общезначимы в этом новом смысле, будет у́же классического.

Считается, что правила оперирования с кванторами предполагают непустоту терминов, связываемых кванторами. Это — один из предрассудков современной логики. Для того чтобы осуществлять выводы из высказываний, совершенно не требуется знать, пусты или нет фигурирующие в них термины. Так, правило $(\forall a)X \vdash X$ имеет силу независимо от того, пуст класс a или нет, и вообще независимо от того, входит a в X или нет. Оно есть часть определения квантора $\forall$. Квантор $\forall$ вводится в употребление таким, что $(\forall a)X \vdash X$. Аналогично правило $X \vdash (\exists a)X$ есть либо часть определения $\exists$, либо следствие такого определения.

§ 17. Теория кванторов

Теория кванторов для классического случая получается благодаря таким дополнениям к общей теории логического следования.

Принимаются все дополнения, указанные в системе S^p.

Дополнение к алфавиту:

1) $\forall$ — квантор «все»;

2) $\exists$ — квантор «некоторые».

*D*1. Дополнение к определению высказывания: если X есть высказывание, а a — термин, то $(\forall a)X$ и $(\exists a)X$ суть высказывания.

Дополнительные аксиомы:

1. $(\forall a)X \vdash X$;
2. $X \vdash (\exists a)X$;
3. $(\forall a)X \dashv\vdash \sim(\exists a) \sim X$;
4. $(\forall a)X(\exists a)Y \vdash (\exists a)(XY)$;
5. $(\forall a)(X \vee Y) \vdash (\forall a)X \vee (\exists a)Y$;
6. $(\exists a)X \vdash (\forall a)X$,

где a не входит свободно в X или $\vdash X$ доказуемо.

Дополнительные правила вывода:

1) если $X \vdash Y$, то $(\forall a)X \vdash (\forall a)Y$;
2) если $X \vdash Y$, то $(\exists a)X \vdash (\exists a)Y$.

В зависимости от того, к какой системе общей теории логического следования делаются указанные дополнения, получаются различные системы теории кванторов. Для классического случая обозначим эти системы так: S_c^s — сильная теория кванторов, S_c^w — ослабленная теория кванторов, S_c^q — теория квазиследования и т. д. Систему, основанную на S^q и включающую S^d, обозначим S°.

Классическая теория кванторов обладает следующим свойством:

$T1$. Если $X \supset Y$ есть тавтология, и в Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в X, то $X \vdash Y$ доказуема в сильной теории логического следования. Аналогичные теоремы полноты имеют силу для других систем (с соответствующими ограничениями).

Для теории квазиследования будет иметь силу утверждение:

$T2$. Если $X \supset Y$ есть тавтология, то $X \vdash Y$ доказуемо.

Она не будет совпадать с теорией логического следования, получающейся благодаря соответствующей интерпретации классического исчисления предикатов, ибо (в частности) утверждения вида $(\forall a)P(a) \supset P(b)$ и $P(b) \supset (\exists a)P(a)$ не являются тавтологиями.

Теория кванторов для неклассического случая получается благодаря следующим модификациям теории для классического случая.

$D2$. Дополнение к определению высказывания: если X есть высказывание, а a — термин, то $(\neg\forall a)X$, $(\neg\exists a)X$, $(?\forall a)X$ и $(?\exists a)X$ суть высказывания.

Аксиомы 3 заменяются такими:

3^1. $(\forall a)X \dashv\vdash (\neg\exists a) \sim X$;

3^2. $(\neg\forall a)X \dashv\vdash (\exists a) \sim X$;

3^3. $(?\forall a)X \dashv\vdash (?\exists a) \sim X$.

Принимаются дополнительные аксиомы:

7. $(\exists a)(X \vee Y) \dashv\vdash (\exists a)X \vee (\exists a)Y$;
8. $(\forall a)X \vee (\forall a)Y \vdash (\forall a)(X \vee Y)$;
9. $\sim(\forall a)X \dashv\vdash (\neg\forall a)X \vee (?\forall a)X$;
10. $\sim(\neg\forall a)X \dashv\vdash (\forall a)X \vee (?\forall a)X$;
11. $\sim(?\forall a)X \dashv\vdash (\forall a)X \vee (\neg\forall a)X$.

*T*2. Если $X \vdash Y$ доказуемо (в любой системе теории кванторов), то $X \supset Y$ есть тавтология. Аналогично если $\vdash X$ доказуемо, то X есть тавтология.

Из *T*1 следует непротиворечивость теории кванторов (если X истинно, и из X следует Y, то из X не следует $\sim Y$; если из X следует Y и $\sim Y$, то X неистинно).

Из *T*1, далее, следует, что утверждения

$\sim(\neg\forall a)X \vdash (\forall a)X$,
$\sim(\neg\exists a)X \vdash (\exists a)X$,
$\vdash\sim(\neg\forall a)X \supset (\forall a)X$,
$\vdash\sim(\neg\exists a)X \supset (\exists a)X$,
$\vdash (\forall a)X \vee (\neg\forall a)X$,
$\vdash (\exists a)X \vee (\neg\exists a)X$

недоказуемы в нашей теории кванторов, поскольку утверждения

$\sim(\neg\forall a)X \supset (\forall a)X$,
$\sim(\neg\exists a)X \supset (\exists a)X$,
$(\forall a)X \vee (\neg\forall a)X$,
$(\exists a)X \vee (\neg\exists a)X$

не являются тавтологиями. Точно так же недоказуемы утверждения

$(\forall a)P(a) \vdash P(b)$,
$P(b) \vdash (\exists a)P(a)$,
$\vdash (\forall a)P(a) \supset P(b)$,
$\vdash P(b) \supset (\exists a)P(a)$,

поскольку утверждения

$(\forall a)P(a) \supset P(b)$,
$P(b) \supset (\exists a)P(a)$

не являются тавтологиями.

$T3$. Если $X \vdash Y$ доказуема в теории сильного следования, то в Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в X, и в Y не входят термины, отсутствующие в X. Аналогичные теоремы имеют место для теории ослабленного следования и других форм следования.

Приведенные выше утверждения $(\forall a)P(a) \vdash P(b)$, $P(b) \vdash (\exists a)P(a)$ недоказуемы в нашей теории также и в силу Т3 (за исключением теории квазиследования, где они недоказуемы в силу $T2$).

Благодаря теореме $T1$ и теореме $T2$ имеется разрешающая процедура, посредством которой для любого данного утверждения $X \vdash Y$ можно установить, доказуемо оно в системах нашей теории кванторов или нет: надо убедиться в том, что $X \supset Y$ есть или не есть тавтология; если оно не есть тавтология, то $X \vdash Y$ недоказуемо в наших системах; если оно есть тавтология, то надо установить отношение единиц смысла в X и Y; если оно удовлетворяет известному ограничению, то $X \vdash Y$ доказуемо в системе с таким ограничением; если не удовлетворяет, то $X \vdash Y$ недоказуемо в этой системе. Разрешимость систем нашей теории кванторов отвечает идее: в рамках логики неразрешимых теорий в идеале не должно быть, поскольку логика должна стремиться к тому, чтобы в науке не было проблем, неразрешимых по вине логики.

Для классического исчисления предикатов, как известно, процедура разрешимости отсутствует. Чтобы проанализировать причину этого обстоятельства, построим систему S^k, эквивалентную классическому исчислению предикатов, следующим образом. Ограничимся исчислением предикатов первой ступени. Поэтому возьмем систему S°, исключим квантификацию предикатов и добавим аксиомы

12. $(\forall a)X \vdash Y$;

13. $Y \vdash (\exists a)X$,

где Y получается из X путем замены всех свободных вхождений a в X на b, причем в X нет вхождений вида $(\forall b)Z$ и $(\exists b)Z$ таких, что a свободно входит в Z.

$T4$. Если $X \vdash Y$ доказуема в S^k, то $X \supset Y$ доказуема в классическом исчислении предикатов, и наоборот. Если $\vdash X$ доказуема в S^k, то X доказуема в классическом исчислении предикатов, и наоборот.

Как сами только что приведенные аксиомы, так и некоторые получаемые с их помощью теоремы не являются тавтологиями в нашем понимании. Например, таковы теоремы

$(\forall a)(P(a) \vee P(b)) \vdash (\exists a)P(a)$,

$(\forall a)(P(a) \vee P(b)) \vdash P(b)$,

$(\forall a)P(a) \vdash (\forall b)P(b)$,

$(\exists a)P(a) \vdash (\exists b)P(b)$.

Аксиомы 12 и 13 позволяют заменять субъект a субъектом b (в терминах исчисления предикатов — индивидную переменную a любой индивидной переменной b), что допустимо лишь при условии совпадения областей их значения. А это допущение является внелогическим.

§ 18. Условные высказывания

Система S^{if}, определяющая оператор условности, получается благодаря таким дополнениям к общей теории логического следования.

Дополнение к алфавиту: $\rightarrow$ — оператор условности.

Дополнение к определению высказывания: если X и Y суть высказывания, то $X \rightarrow Y$, $X\neg \rightarrow Y$ и $X? \rightarrow Y$ суть высказывания.

Дополнительные аксиомы:

1. $(X \rightarrow Y)X \vdash Y$;
2. $(X \rightarrow Y) \vdash (\sim Y \rightarrow \sim X)$;
3. $(X \rightarrow Y)(Y \rightarrow Z) \vdash (X \rightarrow Z)$;
4. $(X \rightarrow YZ) \vdash (X \rightarrow Y)(X \rightarrow Z)$;
5. $(X \rightarrow Y)(Z \rightarrow V) \vdash (XZ \rightarrow YV)$;
6. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \vdash (XY \rightarrow Z)$;
7. $(XY \rightarrow Z) \sim (X \rightarrow Z) \vdash (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$;
8. $\sim (X \rightarrow Y) \dashv\vdash (X\neg \rightarrow Y) \vee (X? \rightarrow Y)$;
9. $\sim (X\neg \rightarrow Y) \dashv\vdash (X \rightarrow Y) \vee (X? \rightarrow Y)$;
10. $\sim (X? \rightarrow Y) \dashv\vdash (X \rightarrow Y) \vee (X\neg \rightarrow Y)$.

Дополнительное правило вывода:

1) если $X \vdash Y$, то $\vdash (X \rightarrow Y)$.

Класс доказуемых утверждений вида $\vdash (X \rightarrow Y)$ всецело зависит от класса доказуемых утверждений вида $X \vdash Y$. Дополнительные аксиомы, как видим, удовлетворяют свойству непарадоксальности сильного логического следования. Соответствующие им утверждения вида $X \supset Y$ суть тавтологии.

Классический случай получается, если исключить аксиомы 8–10 или, наоборот, добавить аксиомы

$$\sim (X\neg \rightarrow Y) \vdash (X \rightarrow Y),$$
$$\vdash \sim (X? \rightarrow Y).$$

Если в аксиоме 7 исключить в посылке $\sim(X \to Z)$, то оказываются доказуемыми утверждения вида

$\vdash X \to (Y \vee \sim Y)$,
$\vdash \sim YY \to X$,
$\vdash (X \to (Y \to X))$,
$\vdash (X \to (\sim X \to Y))$,

аналогичные парадоксам материальной и строгой импликации. И в общем будет иметь силу теорема: $\vdash (X \to Y)$ доказуема, если и только если $X \supset Y$ есть тавтология.

Независимо от того, как мы отнесемся к такого рода следствиям, они не означают парадоксальности системы правил логического следования. Кроме того, совпадение класса доказуемых $\vdash (X \to Y)$ и тавтологий $X \supset Y$ не означает, что класс истин $X \to Y$ совпадает с классом истин $X \supset Y$: из того, что $X \supset Y$ истинно, не следует, что будет истинно $X \to Y$. Так что аксиому 7 можно было бы принять и в неограниченном виде $(XY \to Z) \vdash (X \to (Y \to Z))$.

§ 19. Теория терминов

Теория логического следования определяет не только свойства высказываниеобразующих операторов. Система S^t теории терминов получается благодаря таким дополнениям к рассмотренным выше системам.

Алфавит:

1) $\downarrow$ — терминообразующий оператор;
2) $\rightharpoonup$ — двухместный предикат «включается по значению».

Для наглядности высказывание $\rightharpoonup([a], [b])$ будем писать в форме $a \rightharpoonup b$.

*D*1. Предикат:

1) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть предикаты, то $(a^1 \cdot \ldots \cdot a^n)$, $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(\cdot/a^1, \ldots, a^n)$ и $(\vee/a^1, \ldots, a^n)$ суть предикаты;

2) если a есть предикат, то $\sim a$ и a суть предикаты;

3) если X есть высказывание, а Q — предикат, то $Q \downarrow X$ есть предикат;

4) если X есть высказывание, то $X \downarrow$ есть предикат;

5) нечто есть предикат лишь в силу 1–4.

*D*2. Субъект:

1) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть субъекты, то $(a^1 \cdot \ldots \cdot a^n)$, $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(\cdot/a^1, \ldots, a^n)$ и $(\vee/a^1, \ldots, a^n)$, $(a^1, \ldots, a^n)$ суть субъекты;

2) если a есть субъект, то $\sim a$ есть субъект;

3) если X есть высказывание, а a есть субъект, то $a \downarrow X$ есть субъект;

4) если X есть высказывание, то $\downarrow X$ есть субъект;

5) если a есть субъект или предикат, то $[a]$ есть субъект;

6) нечто есть субъект лишь в силу 1–5.

*D*3. Субъекты и предикаты суть термины.

*D*4. В качестве сокращения для $(a \rightharpoonup b)(b \rightharpoonup a)$ будем писать $a \rightleftharpoons b$.

Аксиомы *A*I:

1. $\vdash \sim\sim a \rightleftharpoons a$;
2. $\vdash a \rightharpoonup ab$;
3. $\vdash ab \rightharpoonup ba$;
4. $\vdash abc \rightleftharpoons a(bc)$;
5. $\vdash \sim(ab) \rightleftharpoons \sim a \vee \sim b$;
6. $(a \rightharpoonup b) \vdash (\sim b \rightharpoonup \sim a)$;
7. $(a \rightharpoonup b)(b \rightharpoonup c) \vdash (a \rightharpoonup c)$;
8. $(a \rightharpoonup c)(b \rightharpoonup c) \vdash (ab \rightharpoonup c)$;
9. $\vdash (a \vee \sim a) \rightharpoonup b$.

Аксиомы *A*II:

1. $(PQ)(a) \vdash P(a)Q(a)$;
2. $P(ab) \vdash P(a)P(b)$;
3. $\neg P(a) \vee \neg Q(a) \vdash \neg (PQ)(a)$;
4. $\neg P(a) \vee \neg P(b) \vdash \neg P(ab)$;
5. $(P \vee Q)(a) \dashv\vdash P(a) \vee Q(a)$;
6. $P(a \vee b) \dashv\vdash P(a) \vee P(b)$;
7. $\neg (P \vee Q)(a) \dashv\vdash \neg P(a)\, \neg Q(a)$;
8. $\neg P(a \vee b) \dashv\vdash \neg P(a)\, \neg P(b)$;
9. $\alpha(\cdot/P, Q)(a) \dashv\vdash \alpha P(a)\alpha Q(a)$;
10. $\alpha P(\cdot/a, b) \dashv\vdash \alpha P(a)\alpha P(b)$;
11. $\alpha(\vee/P, Q)(a) \dashv\vdash \alpha P(a) \vee \alpha Q(a)$;
12. $\alpha P(\vee/a, b) \dashv\vdash \alpha P(a) \vee \alpha P(b)$;
13. $\sim P(a) \dashv\vdash \widetilde{P}(a)$.

Мы не будем здесь излагать теорию терминов в полном виде. Ограничимся тем, что приведем еще группы разнородных аксиом как

пример различных направлений, по которым можно разрабатывать теорию терминов:

1. $(\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y) \dashv\vdash (X \downarrow \rightleftharpoons Y \downarrow)$;
2. $(\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y) \dashv\vdash (a \downarrow X \rightleftharpoons a \downarrow Y)$;
3. $\vdash a \rightharpoonup a \downarrow X$;
4. $\vdash (X \dashv\vdash Y) \rightarrow (\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y)$;
5. $\vdash (a, b, c) \rightleftharpoons (a, (b, c))$;
6. $(X \equiv Y) \vdash (\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y)$;
7. $(a \rightharpoonup b)(\forall a)\alpha P(a) \vdash (\forall b)\alpha P(b)$;
8. $(a \rightharpoonup b)(\exists b)\alpha P(b) \vdash (\exists a)\alpha P(a)$;
9. $(\forall a)X(\exists b) \sim X \vdash \sim (a \rightharpoonup b)$;
10. $(\alpha \forall a)\beta P(a \downarrow X) \dashv\vdash (\alpha \forall a \downarrow X)\beta P(a \downarrow X)$;
11. $X(\forall a \downarrow X)Y \vdash Y$;
12. $X(\forall \downarrow X)Y \vdash Y$;
13. $\vdash (a \downarrow X) \downarrow Y \rightleftharpoons (a \downarrow Y) \downarrow X$.

§ 20. Субъектно-предикатные термины

Сделаем несколько добавлений к тому, что говорилось о терминах. Они позволят нам указать на некоторые детали терминотворчества, играющие на наш взгляд важную роль в науке.

Из высказываний $\alpha P(s)$ и $\sim \alpha P(s)$ образуются термины по правилам, рассмотренным выше. Но читаются эти термины так, что фактически неявно употребляются сокращающие операции. Так, $s \downarrow (P(s))$ читается как «s, который имеет P», $s \downarrow (\neg P(s))$ — как «s, который не имеет P» и т. п. Эти сокращения могут быть записаны особого рода правилами:

*A*1. Если s есть субъект, αP — предикат, то $s \downarrow \alpha P$ и $s \sim\downarrow \alpha P$ суть субъекты, а $P \downarrow \alpha s$ и $P \sim\downarrow \alpha s$ суть предикаты.

Вообще говоря, научная деятельность в большей мере состоит именно в изобретении сокращений для языковых конструкций. Причем эти сокращения изобретаются как стандартные и более или менее широко действующие.

Определения предикатов осуществляются по схеме $\alpha P(s) \equiv X$, где X есть $\beta Q(s)$, конъюнкция высказываний такого рода или дизъюнкция таких конъюнкций. При этом определяются не сами по себе предикаты, а содержащие их высказывания. Это обстоятельство особенно важно иметь в виду при выяснении смысла таких терминов, как

«истинно», «ложно», «существует» и т. п. Неверно ставить вопросы «Что есть истина?», «Что есть существование?» и т. п. Разумны лишь вопросы о смысле выражений «X истинно», «X ложно», «s существует» и т. п., да и то лишь при том условии, что заданы какие-то дополнительные сведения относительно X и s (структура, тип объекта и т. п.).

§ 21. Смысловые отношения терминов и высказываний

При построении теории логического следования, говорили мы, необходимо принимать во внимание смысловые отношения высказываний. Если теория логического следования уже построена, ее в свою очередь можно использовать для определения отношений терминов и высказываний, относимых к числу смысловых. Никакого круга в определениях при этом не получится по двум причинам. Во-первых, логическое следование не определяется через смысловые отношения высказываний. Последние лишь учитываются при изобретении определения логического следования как эвристическое средство, но определением его является совокупность некоторых логических систем. Последние являются в некотором роде исходными, не предполагающими с формальной точки зрения никаких иных понятий логики. Во-вторых, при изобретении теории логического следования учитываются вполне конкретные структуры высказываний, для которых принимается тождественность смысла, тогда как сейчас речь идет об определениях, не зависящих от структуры высказываний.

*D*1. Высказывание Y включается по смыслу в X (Y есть часть смысла или содержания X), если и только если доказуемо $X \vdash Y$.

*D*2. X и Y эквивалентны по смыслу, если и только если доказуемы $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

Таким образом, выражение «Y содержится по смыслу в X» не есть нечто первично ясное по отношению к выражению «из X логически следует Y», а наоборот: лишь при условии определения логического следования возможно дать точное определение включения по смыслу.

Пусть Y образуется из X путем замены термина a терминов b везде, где a входит в X.

*D*3. Термины α и b дедуктивно связаны, если и только если доказуемо по крайней мере одно из $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

*D*4. Термин b дедуктивно включается в термин a, если и только если доказуемо $X \vdash Y$.

*D*5. Термины a и b дедуктивно эквивалентны, если и только если доказуемы оба $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

*D*6. Термин a дедуктивно сильнее термина b, если и только если доказуемо $X \vdash Y$ и доказуемо $Y \vdash X$.

Пусть U есть совокупность (конъюнкция) высказываний данной области науки T, в которую (в U) не входят X и Y.

*D*7. Высказывание Z есть собственное следствие X в T, если и только если недоказуемо $U \vdash Z$ и доказуемо $XU \vdash Z$ (т. е. Z не следует из U и следует из XU).

*D*8. Высказывание Y дедуктивно включается в X в T, если и только если всякое собственное следствие Y в T есть собственное следствие X в T.

*D*9. Высказывания X и Y дедуктивно эквивалентны в T, если и только если каждое из них дедуктивно включается в другое в T.

*D*10. Высказывание Y дедуктивно включается в X, если и только если Y дедуктивно включается в X в любой области науки. Высказывания X и Y дедуктивно эквивалентны, если и только если они дедуктивно эквивалентны в любой области науки.

*D*11. Предикаты P и Q будем называть логически сопряженными, если и только если для них имеют силу утверждения

$P(a) \dashv\vdash \neg Q(\sim a)$,
$\neg P(a) \dashv\vdash Q(\sim a)$,
$?P(a) \dashv\vdash ?Q(\sim a)$.

*D*12. Предикат P категорически сильнее предиката Q, если для них имеют силу утверждения

$P(a) \vdash Q(a)$,
$\neg Q(a) \vdash \neg P(a)$,
$?Q(a) \vdash \sim P(a)$.

§ 22. Многозначная логика и теория логического следования

При обосновании тезиса неуниверсальности логики имеют в виду неуниверсальность теории логического следования (теории вывода). И при этом ссылаются на многозначную логику. Эти ссылки совершенно неправомерны прежде всего с чисто формальной точки зрения (по «техническим» соображениям). Поясним, в чем тут дело.

Действительно, можно построить многозначную логическую систему так, что некоторые тавтологии («законы») двузначной логики не будут тавтологиями в данной многозначной логике. Однако такую

многозначную систему можно придумать для любой тавтологии двузначной логики. Кроме того, само выражение «такая-то тавтология двузначной логики не является тавтологией в такой-то многозначной логике» нуждается в пояснении.

Примем следующее определение:

*D*1. Пусть F^n есть функция некоторой многозначной логики. Если из ее определения исключить все значения истинности, кроме двух, соответствующих значениям двузначной логики, и при этом получится определение некоторой функции F^2 двузначной логики, то F^n будем называть многозначным аналогом для F^2, а F^2 — двузначным аналогом для F^n (функции F^n и F^2 суть аналогичные функции).

*D*2. Пропозициональная формула двузначной (многозначной) логики является аналогом (или аналогичной) пропозициональной формулы многозначной (двузначной) логики, если и только если одна из них может быть получена из другой, путем замены знаков функций соответствующими знаками аналогичных функций.

Пусть L^2 есть функционально полная система двузначной пропозициональной логики, а L^n — некоторая многозначная система. Тривиально просто доказываются утверждения.

*T*1. Для любой тавтологии A^2 в L^2 может быть построена такая L^n, что A^n, аналогичная A^2, не будет тавтологией в ней.

*T*2. Если L^n функционально полна, то для каждой F^2 в ней возможны по крайней мере два различных аналога F_1^n и F_2^n; для каждой пропозициональной формулы A^2 в L^2 возможны по крайней мере две различные аналогичный ей формулы A_1^n и A_2^n в L^n.

*T*3. Для любой тавтологии A^2 в L^2 в функционально полной системе L^n могут быть найдены (определены) такие аналоги входящих в A^2 функций, что аналогичная ей A_1^n будет тавтологией в L^n, а A_2^n — нет.

Приведем доказательство *T*3. Все тавтологии L^2 равнозначны, все функции L^2 определимы через $\vee$ и $\sim$. Поэтому достаточно взять формулу $X \vee \sim X$ и построить трехзначные аналоги для $\vee$ и $\sim$. Пусть значения истинности в двузначной логике суть 1 и 3, а в трехзначной — 1, 2 и 3. Тавтология в обоих случаях пусть принимает всегда значение 1. В двузначной логике $\vee$ и $\sim$ определяются так: 1) $X \vee Y = \min(X, Y)$; 2) если $X = 1$, то $\sim X = 3$; если $X = 3$, то $\sim X = 1$. В трехзначной логике определение $\vee$ остается то же, так что трехзначная дизъюнкция явно есть аналог двузначной. Что же касается отрицания, то возможны два трехзначных его аналога. Первый аналог получается путем дополнения к определению (2) такого пункта: а) $X = 2$, то $\sim X = 2$. Второй аналог получается путем дополнения к определению (2) такого пункта: b) если $X = 2$, то $\sim X = 1$. Теперь

легко можно убедиться в том, что трехзначная $X \vee \sim X$ будет тавтологией, если трехзначное $\sim$ есть второй аналог двузначного, и не будет тавтологией, если трехзначное $\sim$ есть первый аналог двузначного. Изменим теперь определение дизъюнкции: $X \vee Y = 3$ при $X = 2$ и $Y = 2$; $X \vee Y = \min(X, Y)$ в остальных случаях. Если тавтологией будем считать формулу, всегда имеющую значение 1 или 2, наше утверждение сохраняет силу. Так что $T3$ верно при любом определении тавтологии (т. е. при любом разбиении значений истинности на отмеченные и неотмеченные).

Таким образом, многозначная логика не подтверждает как тезис универсальности, так и тезис неуниверсальности логики, — она сама по себе не имеет к нему никакого отношения.

Правила логического следования не зависят от числа значений истинности высказываний в том смысле, что они являются одними и теми же для высказываний с одинаковой структурой, какими бы они ни были с точки зрения числа значений истинности (двузначными, трехзначными и т. д.). Это означает, что свойства логических операторов не зависят от числа допускаемых значений истинности высказываний. Многозначная концепция логики играет важную роль в логике. Но непосредственно заключать, что допущение многозначности высказываний ведет к тому, что изменяется теория логического следования, значит допускать грубейшую ошибку.

Обнаружение многозначности высказываний влияет на теорию логического следования косвенно: оно способствует (наряду с другими обстоятельствами) дифференциации логических операторов и введению новых. Однако, какие бы логические операторы ни вводились, их свойства в теории логического следования определяются независимо от гипотезы многозначности, которая играет здесь эвристическую роль, и не более того. Причем для «обработки» теории логического следования с любыми операторами оказывается достаточной двузначная оценка высказываний (достаточно значений «истинно» и «неистинно»).

Сказанное важно иметь в виду, когда читатель столкнется с разговорами о локальности законов логики, об их зависимости от предметной области и т. п. В частности, из сказанного следует, что не требуется никаких особых правил логического следования для квантовой механики, которые отличались бы от правил для классической физики. Более того, их вообще невозможно изобрести без риска превращения их в универсальные, т. е. имеющие силу для любой науки, в том числе и для классической физики. Точно так же ошибочно полагать, что нужна различная теория вывода для различных областей математики.

§ 23. Интуиционистская логика

В интуиционистской (конструктивистской) логике, как и в классической, доказуемы формулы

$$(\forall a)P(a) \supset P(b),$$
$$P(b) \supset (\exists a)P(a),$$
$$\sim X X \supset Y,$$
$$X \supset \sim(\sim Y Y)$$

и другие формулы, в которых в консеквенте фигурируют переменные, отсутствующие в антецеденте. Так что при интерпретации интуиционистской импликации в качестве знака логического следования получаются парадоксы, аналогичные парадоксам материальной и строгой импликаций. Уже по одной этой причине интуиционистская логика не может играть роль общей теории дедукции. Возможность истолкования ее в качестве некоторого специального случая теории дедукции мы не отвергаем.

Интуиционистская логика имеет другой, более важный недостаток с точки зрения ее претензий на роль общей теории логического следования. Рассмотрим его подробнее.

Интуиционисты обратили внимание на то, что отрицание ложности утверждения не всегда есть признание его истинности (так бывает в некоторых случаях в области математики, имеющей дело с бесконечными множествами). Такой эффект получается по следующей причине. Высказывания математики суть высказывания об абстрактных объектах, и вопрос об истинности и ложности решается в зависимости от возможности их доказательства или опровержения (а также в зависимости от возможности «построить» соответствующие объекты). Пусть высказывание считается истинным, если оно доказуемо, и ложным, если оно опровержимо (если доказуемо его отрицание). Но возможны случаи, когда высказывание нельзя доказать и нельзя опровергнуть, — когда оно неразрешимо. И в этом случае отрицание ложности высказывания не обязательно дает признание истинности: оно может означать и неразрешимость высказывания. Таким образом, рассматриваемые случаи могут быть описаны в трехзначной логике.

Исходя из указанных фактов, интуиционисты ограничили классическую логику с таким расчетом, чтобы закон исключенного третьего и правило снятия двойного отрицания не попали в число законов логики. Однако здесь произошло одно интересное смешение.

Что, собственно говоря, понимать под законом исключенного третьего? Утверждение «X или не-X» или утверждение «Либо X истинно, либо X ложно»? В классической логике, базирующейся на принципе

двузначности высказываний, эти утверждения равнозначны. Но в том случае, когда высказываниям приписываются три или более значения истинности, они оказываются неравнозначными. Первое из них сохраняет силу независимо от числа допускаемых значений истинности высказываний как следствие определения отрицания и дизъюнкции или как следствие определений значений истинности для высказываний с этими операторами. Равнозначным ему является утверждение «Либо X истинно, либо не является истинным X», истинность которого точно так же не зависит от числа значений истинности, которые может принять X. Второе же утверждение оказывается неверным в случае, если число возможных значений истинности X больше двух. В рассматриваемом случае верным будет утверждение «Либо X истинно, либо X ложно, либо X не истинно и не ложно (а, скажем, неопределенно».

Интуиционисты (в логике) указанное различение не произвели и исключили из числа законов логики не только второе утверждение, но и ни в чем не повинное первое.

Аналогично получилось с законом снятия двойного отрицания. Утверждение «Если не-не-X, то X» сохраняет силу в любом случае, что видно хотя бы уже из того, что всегда сохраняет силу его семантический эквивалент «Если неверно, что X не является истинным, то X истинно». Утверждение же «Если неверно, что X ложно, то X истинно» ошибочно в случае, если число допускаемых значений истинности X больше двух.

Интуиционисты, обнаружив ошибочность второго утверждения для случаев трехзначности высказываний, исключили из числа правил логики и первое утверждение. Одним словом, обнаружив неклассическую ситуацию (поясним ниже в общем виде), они осмыслили ее в рамках классических представлений.

Таким образом, идея ограничить закон исключенного третьего (и правило двойного отрицания) возникла на основе рассмотрения внутренней структуры высказываний (субъекты, предикаты, кванторы), не учитываемой на уровне пропозициональной логики. Однако интуиционисты не ввели логических знаков (знак неопределенности, два вида отрицания). которые позволили бы получить эти ограничения естественным образом, не затрагивая ни в чем не повинную пропозициональную логику. Поэтому они вынуждены были ввести упомянутые ограничения уже на уровне пропозициональной логики, как некую априорную предпосылку.

Но интуиционистское ограничение пропозициональной логики бессмысленно, ибо пропозициональная логика должна дать исчерпывающее определение логических знаков «и», «не», «или» и т. п., а упомянутое ограничение означает при этом лишь то, что определение этих знаков оказывается частичным, неполным. В результате,

в интуиционистской логике оказывается недоказуемым некоторый класс формул, которые не вызывают никаких сомнений с точки зрения интерпретации их как правил логического следования.

Таким образом, при интерпретации интуиционистской логики как теории логического следования получается искаженная (неправильная, «смещенная») система: в ней принимаются интуитивно парадоксальные правила и отвергаются интуитивно несомненные правила логического следования.

В нашей концепции нет надобности формулировать интуиционистскую логику как особую систему теории логического следования. Интуиционистские идеи реализуются здесь как естественное следствие различения отрицания.

В наших системах неклассической теории кванторов недоказуемы формулы

$$\sim(\neg\forall a)X \vdash (\forall a)X,$$
$$\sim(\neg\exists a)X \vdash (\exists a)X,$$
$$\sim\neg P(a) \vdash P(a),$$
$$\vdash\sim(\neg\forall a)X \supset (\forall a)X,$$
$$\vdash\sim(\neg\exists a)X \supset (\exists a)X,$$
$$\vdash\sim\neg P(a) \supset P(a),$$
$$\vdash (\forall a)X \vee (\neg\forall a)X,$$
$$\vdash (\exists a)X \vee (\neg\exists a)X,$$
$$\vdash P(a) \vee \neg P(a).$$

Раздел V

КВАЗИСЛЕДОВАНИЕ И ФИЗИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

§ 1. Условные высказывания

К условным высказываниям относят высказывания, обычно записываемые в форме «Если X, то Y». Их интуитивный смысл таков: приняв (признав истинным) X, исследователь должен принять и Y. Будем их изображать (как и выше) символом

$$X \to Y.$$

Высказывание X при этом называют антецедентом, а Y — консеквентом ($D1$). Отрицания и неопределенность для таких форм будем записывать символами

$$X\neg \to Y,$$
$$\sim (X \to Y),$$
$$X? \to Y.$$

Рассмотренные в предшествующих главах правила логики распространяются и на эти формы благодаря определению:

$D2$. Если X и Y суть высказывания, то $X\alpha \to Y$ есть высказывание, где α означает наличие внутреннего отрицания, неопределенности или отсутствие таковых.

Условные высказывания можно разделить на группы по различным признакам:

1) универсальны или локальны антецеденты и консеквенты;
2) входят или нет в консеквент знаки Rx;
3) получаются или нет из логического следования.

Оказывается, между этими признаками имеется связь, и вполне достаточным является деление, устанавливаемое следующими определениями:

$D3$. Высказывания $X \to Y$, в которых Y не содержит Rx (и последний не предполагается контекстом), и их отрицания образуют квазиследование.

$D4$. Высказывания $(X \to (Rx)Y)/v$, где Rx фиксирует положение $|y|$ в пространстве и времени относительно $|x|$, а v — условия, суть высказывания о физическом следовании.

§ 2. Квазиследование

Высказывания квазиследования получаются следующими путями:

1) как первичные соглашения;
2) из отношений логического следования высказываний;
3) по правилам логики из других высказываний того же рода.

В пункте 2 имеется в виду получение высказываний по схеме, определяемой утверждениями:

*A*1. Если из $X \cdot Z$ логически следует Y, и при этом Z истинно или пусто (отсутствует), то $X \to Y$.

*A*2. Если для любого истинного Z из $X \cdot Z$ логически не следует Y, то $X\neg \to Y$.

*A*3. $\sim(X \to Y) \equiv (X\neg \to Y)$.

(Неопределенности здесь исключены самим способом построения высказываний.)

Утверждения *A*1 и *A*2 можно записать в такой форме:

*A*1. $(X \vdash Y) \to (X \to Y)$, $(X \cdot Z \vdash Y) \cdot Z \to (X \to Y)$;

*A*2. $\sim(X \cdot Z \vdash Y) \cdot Z \to (X\neg \to Y)$.

Значения истинности для квазиследования определяются в зависимости от способа их построения:

*D*1. Если $X \to Y$ принято по соглашению, то оно считается истинным.

*D*2. Если из $X \cdot Z$ логически следует Y, где Z истинно или пусто, то $X \to Y$ истинно.

*D*3. Если из любого истинного Z из $X \cdot Z$ логически не следует Y, то $X \to Y$ ложно.

Прочие значения истинности здесь не требуются. Определить значения истинности $X \to Y$ через значения истинности X и Y здесь невозможно по тем же причинам, по каким логическое следование не есть функция истинности посылок и заключений. Утверждение «Если X истинно и ложно, то $X \to Y$ ложно» имеет силу как следствие свойств логического следования и не является показателем того, что $X \to Y$ есть функция истинности X и Y.

§ 3. Дедуктивные свойства квазиследования

Дедуктивные правила квазиследования определяются такими утверждениями, добавляемыми к изложенным в предшествующих главах

правилам логического следования:

$A1.$ $(X \to Y) \cdot X \vdash Y$;

$A2.$ $(X \to Y) \vdash (\sim Y \to \sim X)$;

$A3.$ $(X \to Y) \cdot (Y \to Z) \vdash (X \to Z)$;

$A4.$ $(X \cdot Y \to Z) \dashv\vdash (X \to (Y \to Z))$;

$A5.$ $(X \to Y \cdot Z) \dashv\vdash (X \to Y) \cdot (X \to Z)$;

$A6.$ $(X : Y \to Z) \dashv\vdash (X \cdot \sim Y \to Z) \cdot (\sim X \cdot Y \to Z)$;

$$(X^1 : X^2 : \ldots : X^n \to Y) \dashv\vdash (X^1 \cdot \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \cdot \sim X^n \to Y) \cdot (X^2 \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^n \to Y) \cdot \ldots \cdot \cdot (X^n \cdot \sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^{n-1} \to Y),$$

$$(X^1 : X^2 : \ldots : X^n \to Y) \dashv\vdash (X^1 \cdot \sim X^2 \cdot \ldots \cdot \sim X^n \to Y) \cdot \cdot (\sim X^1 \cdot (X^2 : \ldots : X^n) \to Y),$$

$$(X^1 : X^2 : \ldots : X^n \to Y) \dashv\vdash ((X^1 : \ldots : X^k) \cdot \cdot (\sim X^{k+1} \cdot \ldots \cdot \sim X^n) \to Y) \cdot (\sim X^1 \cdot \ldots \cdot \sim X^k \cdot \cdot (X^{k+1} : \ldots : X^n) \to Y);$$

$A7.$ $X \to (Y : Z) \dashv\vdash (X \to Y) : (X \to Z)$,

$$(X \to (Y^1 : Y^2 : \ldots : Y^n) \dashv\vdash (X \to Y^1) : (X \to Y^2) : \ldots : : (X \to Y^n);$$

$A8.$ $(X \to Y) \vdash (\forall |x|)(X \to Y)$;

$A9.$ $X \cdot Y \vdash \sim (X \to \sim Y)$;

$A10.$ $(X \vdash Y) \to (\vdash (X \to Y))$.

Следствия $A1 - A10$:

$T1.$ $\vdash (\sim X \cdot X \to Y)$,

$\vdash (Y \to \sim (\sim X \cdot X))$,

$\vdash (X \to (Y \to X))$,

$\vdash (X \to (\sim X \to Y))$;

$T2.$ $(\vdash (X \supset Y)) \to (\vdash (X \to Y))$.

Как видим, квазиследование обладает свойствами, аналогичными «парадоксам» материальной импликации; но полного совпадения здесь

нет. В частности, $\sim((X \to Y) \to (X \supset Y))$.

$T3$. $(X : Y) \leftrightarrow (X \to \sim Y) \cdot (\sim X \to Y)$;

$T4$. $X \to ((X \to \sim Y) \to \sim (X \to \dot{Y}))$.

§ 4. Условия

Прежде чем перейти ко второму виду условных высказываний, уточним термин «условия» (или «условие»).

Надо различать логические и эмпирические условия. Первые определяются такими соглашениями:

$D1$. $|x|$ есть активное условие $|y|$, если и только если $X \to Y$.

$D2$. $|x|$ есть пассивное условие $|y|$, если и только если $\sim X \to \sim Y$.

$D3$. $|x|$ есть полное условие $|y|$, если и только если $(X \to Y) \cdot (\sim X \to \sim Y)$.

$D4$. $|x^1|, \ldots, |x^n|$ суть достаточные условия $|y|$ $(n \geqslant 1)$, если и только если $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \to Y$.

$D5$. $|x^1|, \ldots, |x^n|$ суть необходимые условия $|y|$, если и только если $\sim(X_1 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \to Y)$, где $X_1, \ldots, X_{n-1}$ суть любые $n-1$ высказывания из $X^1, \ldots, X^n$.

Когда речь идет об эмпирических условиях, то имеется в виду нечто принципиально иное. Эмпирическое событие выбирается всегда в некоторой пространственно-временной области. Все прочие события этой области суть эмпирические его условия или среда ($D6$). Они предполагаются неявно или частично фиксируются в особых высказываниях. В последнем случае получаются высказывания типа «X при том условии, то V», где V есть некоторая совокупность высказываний об эмпирических событиях, отличных от $|x|$, об их упорядоченности, об их порядке относительно $|x|$ и т. д. Будем такие высказывания изображать символами типа

$$X/v.$$

Никакой логической связи между X и V в случае X/v нет. Однако фиксирование эмпирических условий имеет существенное значение при установлении логических связей высказываний об эмпирических объектах.

Высказывания X/v суть частный случай ранее рассмотренных высказываний со сложным субъектом вида «s, выбранный при том условии, что V» (обозначим символом s/v). Поэтому V можно рассматривать как обособившуюся часть субъекта, вынесенную во вне. Для

нее имеют силу утверждения:

$A1.\ X/v \cdot Y/v \equiv (X \cdot Y)/v;$

$A2.\ X/v : Y/v \equiv (X : Y)/v,$

$X^1/v : X^2/v : \ldots : X^n/v \equiv (X^1 : X^2 : \ldots : X^n)/v;$

$A3.\ (\alpha Жs/v)(s/v \leftarrow PX) \equiv ((\alpha Жs)(s \leftarrow PX))/v,$

где Ж обозначает квантор $\forall$ или $\exists$;

$A4.\ (X/v \rightarrow (Rx)Y/v) \equiv (X \rightarrow (Rx)Y)/v.$

Эти правила выноса условий позволяют упрощать высказывания, вынося тождественные знаки условий в «контекст» и избегая их повторений.

Сказанное можно рассматривать как пример того, что введенные выше формы отрицаний не охватывают всех возможных случаев. Так, если нужно сказать, что X не при том условии что V, а при каком-то другом, то этими отрицаниями воспользоваться нельзя.

§ 5. Физическое следование

Высказывания о физическом следовании получаются как первичные соглашения и по правилам логики из других высказываний того же рода. Но их нельзя получить из отношений логического следования по схеме, аналогичной схеме получения квазиследования, так как для них имеет силу утверждение:

$A1$. Для любого Z, если из Z логически не следует $(Rx)Y$ и не следует $X \rightarrow (Rx)Y$, то из $X \cdot Z$ логически не следует $(Rx)Y$.

Если высказывания о физическом следовании не являются первичными соглашениями и не выводятся из других аналогичных высказываний, то общая схема их построения имеет такой вид:

1) наблюдается $|x|$;

2) наблюдается $|y|$ в пространственно-временном отношении R к $|x|$;

3) указанное в пунктах 1 и 2 имеет место каждый раз, т. е. для всех $|x|$;

4) указанное в пунктах 1–3 имеет место в одних и тех же условиях $|v|$;

5) сокращением всего этого является $(X \rightarrow (Rx)Y)/v$ или $X/v \rightarrow (Rx)Y/v$.

Сказанному соответствуют утверждения (знак условий опускаем, но он везде предполагается):

$A2.\ (X \to (Rx)Y) \leftrightarrow (\forall |x|)((Rx)Y);$

$A3.\ (X \to (Rx)Y) \leftrightarrow N|(Rx)y|.$

Отрицания и неопределенность (а здесь она возможна) определяются утверждениями:

$A4.\ (X\neg \to (Rx)Y) \leftrightarrow (\neg \forall |x|)((Rx)Y);$

$A5.\ (X\neg \to (Rx)Y) \leftrightarrow M|(Rx) \sim y|A;$

$A6.\ (X? \to (Rx)Y) \leftrightarrow (?\forall |x|)((Rx)Y);$

$A7.\ (X? \to (Rx)Y) \leftrightarrow ?M|(Rx) \sim y|.$

Следствия $A2$–$A7$:

$T1.\ (X \to (Rx)Y) \leftrightarrow \neg M|(Rx) \sim y|;$

$T2.\ (X\neg \to (Rx)Y) \leftrightarrow (\exists |x|)((Rx) \sim Y);$

$T3.\ \sim(X \to (Rx)Y) \leftrightarrow \sim(\forall |x|)((Rx)Y);$

$T4.\ \sim(X\alpha \to (Rx)Y) \leftrightarrow (X\beta \to (Rx)Y) : (X\gamma \to (Rx)Y),$

где α, β и γ имеют смысл, аналогичный их смыслу в соответствующих случаях выше.

$T5.\ \sim((X\alpha \to (Rx)Y)) \cdot (X\beta \to (Rx)Y),$

где α и β различны в любых комбинациях.

Частный случай приведенной схемы — для всех $|\neg x| \Rightarrow |x|$ наблюдается $|\neg x| \Rightarrow |x|$ и наблюдается $|\neg y| \Rightarrow |y|$ в отношении R к $|\neg x| \Rightarrow |x|$, что и сокращается в высказывании $(|\neg x| \Rightarrow |x|) \to (R)(|\neg y| \Rightarrow |y|)$. Отношение рассмотренных высказываний определяется утверждением:

$A8.\ ((|\neg x| \Rightarrow |x|) \to (Rx)(|\neg y| \Rightarrow |y|)) \to (X \to (Rx)Y).$

Но когда именно исследователь имеет право сказать «каждый раз», «для всех $|x|$» или «для всех $|\neg x| \Rightarrow |x|$»? Указать здесь всеобщие рекомендации, подобные правилам логического следования, невозможно. Утверждая это, мы не столько учитываем печальный опыт истории логики на этот счет, сколько самую суть дела: принудительная сила правил логического следования есть принудительная сила соглашений людей относительно свойств логических знаков и содержащих их структур высказываний; в рассматриваемом же случае приходится иметь дело с отражением мира, который не зависит от конвенции.

Прежде всего надо сказать, что в познании существенную роль играет удача. В мире встречаются случаи, когда $|y|$ существует в отношении R к $|x|$ при любых условиях. И если исследователь после

нескольких наблюдений принимает $X \to (Rx)Y$, последнее становится элементом научных знаний несмотря на отсутствие каких бы то ни было логических оснований для этого. Встречаются, далее, случаи, когда $|y|$ существует в отношении R к $|x|$ всегда при определенных условиях. А условия эти всегда даны в опыте исследователя (например, существование Земли, поля тяготения, воздуха и т. п.). Причем, не играет роли, известны они исследователю или нет. Судьба $X \to (Rx)Y$ в таких случаях аналогична тому, что говорилось выше.

Имеются, далее, некоторые эвристические принципы, которые в практическом исполнении дают иногда положительный эффект, иногда — нет. К их числу относятся известные индуктивные методы Бэкона—Милля. Поскольку эти эвристические принципы хотя бы иногда дают возможность получить истинные высказывания, их применение вполне оправдано. Что же касается ошибок, то занятие наукой стало бы самым заурядным делом, если бы ученые их не делали.

Возьмем такой пример. Пусть в некоторой пространственно-временной области сначала осуществляется $|\neg x| \Rightarrow |x|$, а затем — $|\neg y| \Rightarrow |y|$. Если при этом все остальное в ограниченной нами области остается неизменным, то мы вправе принять $(|\neg x| \Rightarrow |x|) \to (Rx)(|\neg y| \Rightarrow |y|)$, где Rx есть «вслед за этим». В практическом же исполнении этого принципа постоянство «всего остального» — дело немыслимое, и судьба нашего высказывания зависит от того, насколько остающееся на самом деле неизменным близко ко «всему остальному».

§ 6. Значения истинности

В случае квазиследования определения значений истинности совпадают с описанием способа построения высказываний. Для физического следования такого совпадения нет. Так, представляется правомерным следующее определение: $[X \to (Rx)Y] \leftarrow v^1$, если и только если каждый раз, когда истинно X, истинно и Y в отношении R к $|x|$.

Однако $X \to (Rx)$ принимается как истинное вовсе не потому, что пересмотрены все случаи, когда X истинно, и убедились при этом в том, что Y истинно в соответствующем месте. Если бы это было так, построение высказывания было бы лишено смысла. Оно было бы безупречно с логической точки зрения, но им нельзя было бы пользоваться в новых ситуациях, когда истинно X. Высказывание принимается в силу тех эвристических соображений, о которых мы говорили выше. При этом порой бывает достаточно рассмотрения одного случая, когда истинно X, а условное высказывание приобретает силу для любого числа случаев. И после его принятия оно оправдывается в большом числе случаев, это не означает, что вопрос о его истинности может быть решен окончательно по крайней мере апостериори.

Определения значений истинности для физического следования можно построить различными способами и, в частности, — так (тождество условий предполагается):

$D1.\ [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^1 \equiv M|x| \cdot \neg M \parallel x|R| \sim y \parallel;$

$D2.\ [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^2 \equiv M|x| \cdot ?|M \parallel x|R| \sim y \parallel;$

$D3.\ [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^3 \equiv \sim M|x|;$

$D4.\ [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^4 \equiv M|x| \cdot M \parallel x|R| \sim y \parallel;$

$D5.\ [X\neg \to (Rx)Y] \leftarrow v^1 \equiv [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^4;$

$D6.\ [X\neg \to (Rx)Y] \leftarrow v^2 \equiv [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^2;$

$D7.\ [X\neg \to (Rx)Y] \leftarrow v^3 \equiv [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^3;$

$D8.\ [X\neg \to (Rx)Y] \leftarrow v^4 \equiv [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^1;$

$D9.\ [X? \to (Rx)Y] \leftarrow v^1 \equiv [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^2;$

$D10.\ [X? \to (Rx)Y] \leftarrow v^3 \equiv [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^3;$

$D11.\ [X? \to (Rx)Y] \leftarrow v^4 \equiv [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^1 :$

$: [X\neg \to (Rx)Y] \leftarrow v^1.$

В практике науки бывает так, что $M|(Rx) \sim y|$, но $X \to (Rx)Y$ принимается как истинное, поскольку вероятность $|(Rx) \sim y|$ достаточно мала. Поэтому уместны определения:

$D1^1.\ [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^1 \equiv M|x| \cdot (p|(Rx)y| \geqslant \alpha),$

где α есть степень вероятности, достаточно близкая к единице.

$D4^1.\ [X \to (Rx)Y] \leftarrow v^4 \equiv M|x| \cdot (p|(Rx)y| \leqslant \beta),$

где β есть степень вероятности, достаточно близкая к нулю.

§ 7. Дедуктивные свойства физического следования

На физическое следование распространяются правила квазиследования с такими коррективами:

1) для всех событий, о которых говорится в одном утверждении, предполагается тождество условий (к утверждениям приписываются выражения «при одних и тех же условиях» или везде проставляется одинаковый знак условий);

2) последняя аксиома исключается, поскольку нет логических истин, являющихся высказываниями о физическом следовании;

3) во второй и третьей аксиоме вводятся дополнения, связанные со знаками порядка событий.

В результате аксиомы $A1-A4$, $A9$ примут такой вид:

$A1.$ $(X \to (Rx)Y)/v \cdot X/v \vdash (Rx)Y/v;$

$A2.$ $(X \to (R^1x)Y)/v \cdot (s^1R^1s^2 \to s^2R^2s^1) \vdash (\sim Y \to (R^2 \sim y) \sim X/v;$

$A3.$ $(X \to (R^1x)Y)/v \cdot (Y \to (R^2y)Z)/v \cdot (s^1R^1s^2 \cdot$
$\cdot s^2R^2s^3 \to s^1R^3s^3) \vdash (X \to (R^3x)Z)/v;$

$A4.$ $(X \cdot Y \to (Rx \cdot y)Z)/v \dashv\vdash (X \to (Y \to (Rx \cdot y)Z)/v;$

$A9.$ $(X \cdot (Rx)Y)/v \vdash \sim (X \to (Rx) \sim Y)/v.$

Аксиомы $A5-A8$ будут отличаться от прежних лишь наличием одинакового знака условий в посылках и заключениях и наличием знаков Ra после знака $\to$, где a есть антецедент соответствующих высказываний.

Поскольку высказывание о физическом следовании не может быть истинным, если не может быть истинным его антецедент, то приемлемо утверждение:

$A10.$ $(X \to (Rx) \sim Y) \vdash \sim (X \to (Rx)Y).$

Квазиследование же может иметь место и в случае всегда ложного антецедента, так что для него верно лишь более слабое утверждение $T5$.

Связь квазиследования и физического следования, если они встречаются совместно, устанавливается утверждениями:

$A11.$ $(X \to (Rx)Y) \cdot (Y \to Z) \vdash (X \to (Rx)Z);$

$A12.$ $(X \to Y) \cdot (Y \to (R\alpha)Z) \vdash (X \to (R\alpha)Z);$

$A13.$ $(X \to (Rx)Y) \cdot ((Rx)Y \to Z) \vdash (X \to Z);$

$A14.$ $(X \to (R^1\alpha)Y) \cdot ((R^1\alpha)Y \to (R^2\beta)Z) \vdash (X \to (R^2\beta)Z).$

Если принять утверждение

$A1'.$ $(X \to Y) \dashv\vdash (X \to Y)/v;$

$A2'.$ $(X \to Y) \vdash (X \to (R\alpha)Y);$

$A3'.$ $(X \to Y) \vdash ((R\alpha)X \to Y),$

(где $|v|$ есть любое условие, $|\alpha|$ есть любое событие, в X и Y не входит $R\alpha$), то утверждения $A1$, $A4-A9$ и $A11-A14$ получаются как следствия аксиом параграфа 3. В таком случае достаточно к $A1'-A3'$ добавить $A2$, $A3$ и $A10$.

Встречаются высказывания вида

$(R^1x)Y \to (R^2x)Z,$

$(R^1x^1)Y \to (R^2x^2)Z,$

в которых порядок $|z|$ относительно $|y|$ выражен не прямо (посредством Ry), а косвенно, т. е. через отношение к $|x|, |x^1|, |x^2|$. Для них имеют силу утверждения:

*A*15. $((R^1x)Y \to (R^2x)Z) \dashv\vdash (\overset{\bullet}{X} \cdot (R^1x)Y \to (R^2x)Z)$;

*A*16. $((R^1x^1)Y \to (R^2x^2)Z) \dashv\vdash (X^1 \cdot (R^1x^1)Y \cdot X^2 \to (R^2x^2)Z)$.

Раздел VI

НЕТРАДИЦИОННАЯ ТЕОРИЯ КВАНТОРОВ

Введение

Традиционной теорией кванторов мы называем направление и раздел логики, в котором для определения свойств высказываний с кванторами «все» и «некоторые» (и, очевидно, самих этих кванторов) используются логические исчисления и семантические правила и определения, обладающие следующими свойствами.

В упомянутых исчислениях доказуемы (являются теоремами) формулы вида $A\alpha B$ (где α есть знак какой-то импликации, в частности — материальной или классической импликации, интуиционистской импликации и т. п.), в которых в консеквент B входят индивидные переменные, отсутствующие в антецеденте A. Причем, эти формулы доказуемы не за счет пропозициональных исчислений, содержащихся в рассматриваемых логических исчислениях, а за счет тех дополнений к пропозициональным исчислениям, благодаря которым получаются рассматриваемые исчисления. Так, в классическом исчислении предикатов доказуемы формулы $(\forall a)P(a) \supset P(b)$ и $P(b) \supset (\exists a)P(a)$, в которых a и b суть различные виды индивидных переменных. Причем, эти формулы нельзя получить с помощью правила подстановки в пропозициональные переменные формул, доказуемых в классическом исчислении высказываний (т. е. они получаются не за счет простого расширения алфавита и класса формул пропозиционального исчисления). При истолковании таких формул $A\alpha B$ в качестве правил вывода (логического следования), т. е. как утверждений «Из A логически следует B», получаются парадоксальные следствия, о которых мы скажем ниже. Назовем такие формулы интерпретационно парадоксальными.

Семантические правила для рассматриваемых исчислений формулируются с таким расчетом, чтобы интерпретационно парадоксальные формулы были общезначимы. Согласно этим правилам, области значения всех индивидных переменных, входящих в одну и ту же формулу (и вообще в класс некоторых формул) совпадают, т. е. все индивидные переменные принимают значения из одной и той же области индивидов (назовем это допущение гипотезой H^1). А согласно самому определению общезначимости формул область значения индивидных переменных не пуста (назовем это гипотезой H^2). С гипотезами H^1 и H^2 также связаны трудности и парадоксальные следствия, о которых мы точно так же будем говорить ниже.

В рассматриваемых исчислениях либо не учитывается вообще возможность различных позиций (различных видов) отрицания, либо учитывается не путем введения различных операторов для отрицания или указания различных позиций его в формулах, а лишь путем ограничений пропозициональных исчислений (как это имеет место, например, в интуиционистской логике). В результате получается, с одной стороны, неоправданное ограничение правил логики, а с другой стороны, из поля внимания логики выпадают целые классы правил, играющих существенную роль в языковых операциях науки и языкового общения.

На приведенные выше (и другие) свойства традиционной теории кванторов мы обращали внимание в работах «Логика высказываний и теория вывода» (М., 1962), «Основы логической теории научных знаний» (М., 1967), «Комплексная логика» (М., 1970), «Логика науки» (М., 1971) и других. В этих же работах была предложена теория кванторов, по всем указанным выше пунктам отличная от традиционной (и потому мы ее называли здесь нетрадиционной). В данном разделе мы подробнее рассмотрим упомянутые выше свойства традиционной теории кванторов и изложим нашу (нетрадиционную) теорию, внеся в соответствующее изложение ее в предшествующих работах целый ряд существенных дополнений, изменений, уточнений усовершенствований.

§ 1. Значение индивидных переменных

Выражения «значение индивидной переменной» и «область значения индивидной переменной» двусмысленны. Во-первых, под областью значения индивидных переменных имеют в виду множество терминов — субъектов (имен) языка («стол», «атом», «целое число», «положительно заряженная частица»). И с этой точки зрения область значения индивидных переменных не пуста: это — эмпирически установленный факт, поскольку мы можем привести примеры терминов, являющихся субъектами (именами, названиями предметов).

Во-вторых, областью значения индивидных переменных называют особого рода объекты, именуемые индивидами. Это могут быть заданные буквы, натуральные числа и т. п. Хотя природа и вид этих объектов безразличны (играет роль лишь их число), они практически задаются такими, что с точки зрения их создания (производства) они сходны с самими индивидными переменными (в частности, их можно вставлять на место переменных). Приведенные выше гипотезы H^1 и H^2 связаны именно с таким пониманием значений и области значения индивидных переменных.

Обратимся к первому пониманию значения индивидных переменных. Согласно этому пониманию, на место индивидных переменных

подставляются термины-субъекты («стол», «атом», «число»). А так как на место предикатных переменных подставляются термины-предикаты, то из формул в результате таких подстановок получаются высказывания (суждения, предложения), а из теорем исчисления — логически истинные утверждения с этими высказываниями. Правила подстановки терминов-субъектов на место индивидных переменных таковы:

1) на место каждой индивидной переменной по отдельности может быть подставлен любой термин — субъект;

2) на место различных индивидных переменных, входящих в одну и ту же формулу, могут быть подставлены различные термины-субъекты (это не исключает того, что могут быть подставлены и одинаковые термины). Например, в выражении «*a* выше *b*», где *a* и *b* суть различные индивидные переменные, на место *a* может быть подставлено слово «стол», а на место *b* — слово «стул».

Но термины-субъекты сами имеют значение. Причем, можно говорить об области значения термина и об области индивидов, которые могут быть названы этим термином. Например, термин «стол» и «деревянный стол» суть элементы из области значения индивидных переменных (в рассматриваемом первом смысле), но сами они находятся, в свою очередь, в таком отношении: термин «деревянный стол» есть элемент из области значения термина «стол». Кроме того, каждый из этих терминов обозначает любой отдельный эмпирический стол и соответственно деревянный стол. Отдельные столы суть индивиды из области значения этих терминов.

Эти факты общеизвестны и просты. Но в сопоставлении со вторым из рассматриваемых здесь пониманий значения индивидных переменных они рождают путаницу, которая консервируется сложившейся в современной логике системой предрассудков.

Обратимся ко второму пониманию значения индивидных переменных. Соотношение индивидных переменных и индивидов из области их значения воспринимается при интерпретации исчисления в качестве логической теории по аналогии с соотношением терминов и элементов из их областей значения. Индивидные переменные рассматриваются при этом не как переменные для терминов с какими-то областями значений, а как термины с определенной областью значения. В результате областью значения индивидных переменных оказывается область значения терминов, которые могут быть подставлены на их место. Исчисление предикатов при этом выступает не как логическая теория, описывающая свойства любых терминов, входящих в высказывания, а как теория, описывающая свойства какой-то данной области предметов (например, чисел). Поскольку предметная область может быть взята любая, это создает видимость того, что исчисление является

логической теорией. Исчисление предикатов при этом приобретает характер нелогической теории (фактически — математической теории). Истолкование же его в качестве логической теории ведет к парадоксальным следствиям.

§ 2. Парадоксы традиционной теории кванторов

Как уже говорилось, в классическом исчислении предикатов теоремами являются некоторые формулы $A \supset B$, такие, что B содержит индивидные переменные, отсутствующие в A. Причем, эти формулы доказуемы не за счет исчисления высказываний, содержащегося в классическом исчислении предикатов, а за счет тех дополнений к исчислению высказываний, благодаря которым получается исчисление предикатов. Другими словами, в исчислении высказываний нет таких теорем, подстановкой на место пропозициональных переменных которых получаются эти формулы. Таковы, например, формулы $(\forall a)P(a) \supset P(b)$ и $P(b) \supset (\exists a)P(a)$.

Будем интерпретировать оператор $\supset$ как «Если, то» или как знак логического следования. Подставим в приведенные формулы на место P предикат, допустим, «электропроводен», на место a — термин «металл», а на место b — термин «фарфор». Получим утверждение «Если все металлы электропроводны, то фарфор электропроводен» или утверждение «Из того, что все металлы электропроводны, логически следует то, что фарфор электропроводен». Но эти утверждения, очевидно, ложны. Следовательно, либо формула логики, из которой они получены в результате данной интерпретации, не может быть принята в качестве правила логики, либо сама интерпретация непригодна.

Чтобы выйти из затруднения, вспоминают о втором понимании значения индивидных переменных, которое в переводе на язык интерпретации формул исчисления в качестве правил логики выглядит так. Должна быть задана предметная область. В примере это — область металлов. Так что на место переменной a подставляется термин «металл», а на место переменной b — термин, обозначающий какой-либо вид металлов (например, слово «медь»), кусок металла и т. п. В результате подстановки получим утверждение «Если все металлы электропроводны, то медь электропроводна» или утверждение «Из того, что все металлы электропроводны, логически следует то, что медь электропроводна». Первое утверждение верно. Но процедура его получения логически некорректна. Второе утверждение верно с оговорками, которые логически тоже сомнительны. Поясним, в чем тут дело.

Подставим на место переменной a термин «благородный металл», а на место b — термин «медь». Получим утверждение «Если все благородные металлы электропроводны, то медь электропроводна» или

соответственно утверждение «Из того, что все благородные металлы электропроводны, следует, что медь электропроводна». Хотя термины «благородный металл» и «медь» суть термины из заданной области, полученные утверждения неверны. Чтобы избежать такого нежелательного следствия, неявно предполагают, что индивиды, обозначенные термином b, включаются в класс индивидов, обозначаемых термином a. В примере: поскольку медь не включается в класс благородных металлов (не есть благородный металл), рассмотренная выше подстановка недопустима. Правомерны лишь такие подстановки: 1) если на место a подставляется слово «металл», то на место b подставляется название любого металла; 2) если на место a подставляются слова «благородный металл», то на место b подставляется название любого благородного металла.

Таким образом, интерпретация рассматриваемых формул в качестве правил логики (утверждений логически истинных) предполагает совокупность неявных оговорок и допущений. И прежде всего неявно предполагается, что индивиды из области значения терминов, подставляемых на место b, могут быть обозначены терминами, подставляемыми на место a. Но логика не признает никаких неявных допущений. Она обязана выявить все неявное, зафиксировав это в соответствующих правилах.

Итак, если предполагается интерпретация исчисления в качестве логической теории, устанавливающей свойства высказываний с кванторами, то индивидные переменные должны рассматриваться как места, в которые могут быть вставлены термины-субъекты (названия предметов) любой природы: пустые и непустые, индивидуальные и общие, с конечной и бесконечной областью значения. Причем, в различно обозначенные места (т. е. на место различных переменных) могут быть вставлены различные термины, и в том числе — термины, не находящиеся в отношении рода и вида. При этом утверждение «Из $(\forall a)P(a)$ следует $P(b)$» в общем виде неприемлемо как правило логики, тогда как утверждение «Из $(\forall a)P(a)$ следует $P(a)$» как правило логики несомненно. Из высказывания «Все круглые квадраты остроугольны» логически следует высказывание «Круглый квадрат остроуголен», хотя круглые квадраты вообще не существуют, а приведенные высказывания оба неистинны. Из высказывания же «Все металлы электропроводны» логически не следует высказывание «Медь электропроводна», хотя оба приведенные высказывания истинны, а медь есть металл. Чтобы в последнем случае получить право сказать «логически следует», надо к посылке «Все металлы электропроводны» добавить еще посылку «Медь есть металл» (или «Медь относится к классу металлов»). Но соответствующее логическое правило еще нельзя ввести на уровне исчисления предикатов (исчисления кванторов), поскольку в языке его отсутствуют

подходящие средства записи. Оно вводится лишь на уровне логики классов, базирующейся на теории кванторов (мы так и сделаем ниже).

Традиционная теория кванторов, как мы видели, неявно предполагает некоторую зависимость терминов, подставляемых на место различных переменных, чтобы избежать парадоксальных следствий при интерпретации одних формул исчисления предикатов в качестве правил логики. Но при аналогичной интерпретации других формул она вынуждена предположить именно отсутствие упомянутой зависимости. Этот поразительный факт мы рассмотрим ниже.

§ 3. Две формы отрицания

Пусть высказывание $(\forall a)x$ нельзя доказать и нельзя опровергнуть, а пересмотреть все индивидуальные предметы a невозможно (например, в случае, если число a бесконечно, если одни предметы a исчезли в далеком прошлом, а другим еще предстоит появиться). Пусть все рассмотренные предметы a таковы, что x истинно. И как бы велико ни было число рассмотренных a, нет логических оснований признать высказывание $(\forall a)x$ и его отрицание «Не все a таковы, что x». Таким образом, здесь имеют место три возможности: 1) $(\forall a)x$; 2) отрицание $(\forall a)x$, в котором оператор отрицания относится к оператору $\forall$ и которое читается как «Не все a таковы, что x»; 3) нельзя установить, все a таковы, что x, или не все a таковы, что x; неизвестно, все a таковы, что x, или не все a таковы, что x. Таким образом, отрицание высказывания $(\forall a)x$ (отказ признать его, согласиться с ним) может означать не только высказывание «Не все a таковы, что x», но также признание третьей возможности. И случаи такого рода дают достаточное основание для того, чтобы различать два вида отрицания не только в отношении простых высказываний, но и в отношении кванторов: внешнее отрицание, относящееся к высказыванию в целом, и внутреннее отрицание, относящееся к квантору. Традиционная теория кванторов это обстоятельство не учитывает.

Возьмем, например, высказывание

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall n)[((x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (z > 0) \wedge (n \geqslant 3)) \rightarrow \\ \rightarrow \sim (x^n + y^n = z^n)],$$

где x, y, z и n суть целые числа. Отрицание его может означать не только признание того, что это высказывание верно не для всех x, y, z, n, но также признание того, что не известно или нельзя установить (пока или вообще), верно это высказывание или нет.

Но и независимо от того, встречаются практически такого рода высказывания или нет, логика вправе (и даже обязана) исследовать по-

следствия, вытекающие из очевидного различия в положении оператора отрицания в высказывании.

Исчисления, в которых два вида отрицания не различаются, будем (как и ранее) относить к классическому случаю в теории кванторов. А исчисления, в которых отрицания различаются, будем относить к неклассическому случаю. Подчеркиваем, что классический случай в нашем понимании не совпадает с классическим исчислением предикатов (подробнее об этом см. ниже в § 35). Для большей наглядности будем употреблять различные символы для различных позиций отрицания.

Рассмотрим сначала классический случай, затем — неклассический. Поскольку нам необходимо установить свойства кванторов для любых высказываний, различие отрицаний в простых высказываниях во внимание принимать не будем (коротко скажем об этом в § 22). Наконец, рассмотрим сначала высказывания с операторами $\sim$, $\vee$ и $\wedge$, затем в (§ 23) коротко остановимся на высказываниях с оператором условности ($\rightarrow$).

§ 4. Квантификация предикатов

Пусть имеется высказывание $a \leftarrow P$, где a есть субъект (т. е. термин, обозначающий предмет, котором идет речь в высказывании), P есть предикат (т. е. термин, обозначающий признак предмета), а стрелка есть оператор предикативности (оператор, с помощью которого субъект и предикат объединяются в высказывание). Например — «Электрон заряжен отрицательно». Используя некоторую стандартную процедуру, можно эти высказывания превратить в высказывание с двумя субъектами a и, допустим, sp и стандартным двухместным предикатом $Q : (a, sp) \leftarrow Q$, которое читается так: «a и sp таковы, что первый имеет второго в качестве признака (или что второй есть признак первого)». Например — «Электрон и наличие отрицательного заряда (способность быть заряженным отрицательно) таковы, что второе есть признак первого». Аналогично — для внутреннего отрицания и неопределенности $a \leftarrow P$: они превращаются соответственно в $(a, sp) \neg \leftarrow Q$ и $(a, sp)?\leftarrow Q$. Аналогично для случаев $(a^1, \ldots, a^n) \leftarrow P$, где $n \geqslant 2$.

Указанная выше процедура есть лишь прием в рамках логики, применяемый с целью сведения проблемы непривычной квантификации предикатов к проблеме привычной квантификации субъектов. Благодаря этому, мы получаем возможность с самого начала в общей форме рассматривать свойства кванторов независимо от того, относятся они к субъектам или предикатам высказываний.

§ 5. Семантические правила

Семантические правила традиционной теории кванторов (их можно найти в любом достаточно полном учебнике логики) навеяны тем очевидным обстоятельством, что:

1) высказывание $(\forall a)x$ истинно, если и только если x истинно в отношении любого индивида, обозначаемого термином a (или если истинно любое высказывание, образованное из x путем замены a на термин, обозначающий предмет из области значений a);

2) высказывание $(\exists a)x$ истинно, если и только если x истинно по крайней мере в отношении одного индивида, обозначаемого термином a.

Однако для установления правил логики важна лишь зависимость значения истинности высказывания от значений истинности высказываний, входящих в него. Такие зависимости можно установить и для высказываний с кванторами. Так, если $(\forall a)x$ истинно, то x истинно; если x истинно, то $(\exists a)x$ истинно; если x ложно, то $(\forall a)x$ ложно; если $(\exists a)x$ ложно, то x ложно и т. п.

§ 6. Некоторые интуитивные соображения

Высказывания с кванторами будут изображаться символами вида $(\forall a)x$, $(\exists a)x$, $(\neg\forall a)x$, $(\neg\exists a)x$, $(?\forall a)x$, $(?\exists a)x$, где $\neg$ есть внутреннее отрицание, стоящее перед квантором, ? — оператор неопределенности, a — субъект или предикат высказывания x.

Задача теории кванторов — установить правила оперирования высказываниями с кванторами, конкретнее говоря — правила таких видов:

1) введения кванторов в высказывания;

2) удаления кванторов из высказываний;

3) замены одних кванторов на другие;

4) внесения кванторов в дизъюнкции и конъюнкции высказываний (т. е. перенос кванторов от дизъюнкций и конъюнкций в целом к их отдельным членам);

5) вынесения кванторов из дизъюнкций и конъюнкций (т. е. перенос кванторов от отдельных членов конъюнкций и дизъюнкций к конъюнкциям и дизъюнкциям в целом);

6) внесения кванторов в антецеденты и консеквенты условных высказываний;

7) вынесения кванторов из антецедентов и консеквентов условных высказываний;

8) перестановки кванторов.

Поскольку другие структуры высказываний не рассматриваются, то мы исчерпали все возможные операции с кванторами.

Сформулируем в соответствии с пунктами (1–7) перечень логических правил, которые мы считаем интуитивно приемлемыми и, более того, для которых в предполагаемой логической теории обязательно должны иметь место соответствующие теоремы. Система таких правил для классического случая имеет такой вид:

1) $x \vdash (\exists a)x$,
   $(x \to y) \vdash (\forall a)(x \to y)$;
2) $(\forall a)x \vdash x$,
   $(\exists a) \sim (x \to y) \vdash \sim (x \to y)$;
3) $(\forall a)x \vdash x \sim (\exists a) \sim x$,
   $(\exists a)x \vdash x \sim (\forall a) \sim x$,
   $\sim (\forall a)x \vdash (\exists a) \sim x$,
   $\sim (\exists a)x \vdash (\forall a) \sim x$;
4) $(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\forall a)x \wedge (\forall a)y$,
   $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\forall a)y$,
   $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\forall a)y$,
   $(\exists a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\exists a)y$,
   $(\exists a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y$;
5) $(\forall a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \wedge y)$,
   $(\forall a)x \wedge (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$,
   $(\exists a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$,
   $(\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \vee y)$,
   $(\forall a)x \vee (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$,
   $(\exists a)x \vee (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$
   $(\exists a)x \vee (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$;
6) $(x \to y) \vdash ((\forall a)x \to (\forall a)y)$,
   $(x \to y) \vdash ((\exists a)x \to (\exists a)y)$;
7) $(x \to (\forall a)y) \vdash (x \to y)$,
   $((\exists a)x \to y) \vdash (x \to y)$;
8) $(\forall a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\forall a)x$,
   $(\exists a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\exists a)x$,
   $(\exists a)(\exists b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$.

Утверждения:

$(\forall a)(\exists b)x \vdash (\exists b)(\forall a)x$,

$(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\forall a)y$,

$(\exists a)x \wedge (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$,

$(\forall a)x \vee (\exists a)y \vdash (\forall a)(x \vee y)$

неприемлемы в качестве правил логики, что видно из таких примеров: $(\forall a)(P(a) \vee \sim P(a))$ истинно, но $(\forall a)P(a) \vee (\forall a) \sim P(a)$ может быть неистинным; $(\exists a)P(a)$ и $(\exists a) \sim P(a)$ могут быть оба истинными, но $(\exists a)(P(a) \wedge \sim P(a))$ всегда неистинно; $(\forall a)P(a) \vee (\exists a)Q(a)$ может быть истинным, но $(\forall a)(P(a) \vee Q(a))$ может быть при этом неистинным (например, в случае, если признак Q имеет только некоторые a, которые не имеют признака P).

Система правил для неклассического случая будет отличаться от системы для классического случая только пунктом (3) и дополнительным правилом (8). Они примут здесь соответственно такой вид:

3) $(\forall a)x \vdash (\neg \exists a) \sim x$,
$(\neg \forall a)x \vdash (\exists a) \sim x$,
$(\exists a)x \vdash (\neg \forall a) \sim x$,
$(\neg \exists a)x \vdash (\forall a) \sim x$;

8) $(?\forall a)x \dashv\vdash \sim (\forall a)x \wedge \sim (\neg \forall a)x$,
$\sim (\forall a)x \dashv\vdash (\neg \forall a)x \vee (?\forall a)x$,
$\sim (\neg \forall a)x \dashv\vdash (\forall a)x \vee (?\forall a)x$,
$\sim (?\forall a)x \dashv\vdash (\forall a)x \vee (\neg \forall a)x$,
$(?\exists a)x \dashv\vdash \sim (\exists a)x \wedge \sim (\neg \exists a)x$,
$\sim (\exists a)x \dashv\vdash (\neg \exists a)x \vee (?\exists a)x$,
$\sim (\neg \exists a)x \dashv\vdash (\exists a)x \vee (?\exists a)x$,
$\sim (?\exists a)x \dashv\vdash (\exists a)x \vee (\neg \exists a)x$,
$(\forall a)x \vdash \sim (\neg \forall a)x$,
$(\forall a)x \vdash \sim (?\forall a)x$,
$(\neg \forall a)x \vdash \sim (\forall a)x$,
$(\neg \forall a)x \vdash \sim (?\forall a)x$,
$(?\forall a)x \vdash \sim (\forall a)x$,
$(?\forall a)x \vdash \sim (\neg \forall a)x$,
$(\exists a)x \vdash \sim (\neg \exists a)x$,

$(\exists\, a)x \vdash \sim (?\exists\, a)x$,

$(\neg \exists\, a)x \vdash \sim (\exists\, a)x$,

$(\neg \exists\, a)x \vdash \sim (?\exists\, a)x$,

$(?\exists\, a)x \vdash \sim (\exists\, a)x$,

$(?\exists\, a)x \vdash \sim (\neg \exists\, a)x$.

Пункт (8), как видим, учитывает случаи соотношения операторов $\sim$, $\neg$, $?$. В системе для классического случая он излишний, поскольку в пункте (3) учтено все, что касается отрицаний высказываний с кванторами.

Утверждения $\sim (\neg \forall\, a)x \vdash (\forall\, a)x$ и $\sim (\neg \exists\, a)x \vdash (\exists\, a)x$ в качестве правил логики здесь неприемлемы, поскольку $\sim (\neg \forall\, a)x$ может означать не только $(\forall\, a)x$, но и третью возможность, а именно — $(? \forall\, a)x$. Аналогично для $\sim (\neg \exists\, a)x$.

Утверждения $\sim (\forall\, a)x \vdash (\exists\, a) \sim x$ и $\sim (\exists\, a)x \vdash (\forall\, a) \sim x$ в качестве правил вывода здесь точно так же неприемлемы. Это видно из такого рассуждения: $\sim (\forall\, a)x \vdash (\neg \forall\, a)x \vee (? \forall\, a)x$ согласно пункту (8); $(\neg \forall\, a)x \dashv\vdash (\exists\, a) \sim x$ согласно пункту (3); $(? \forall\, a)x \dashv\vdash (\neg \exists\, a) \sim x \wedge \sim (\exists\, a) \sim x$ согласно пунктам (8) и (3); так что имеем $\sim (\forall\, a)x \vdash (\exists\, a) \sim x \vee (\sim (\neg \exists\, a) \sim x \wedge \sim (\exists\, a) \sim x)$ и согласно пункту (8) получим $\sim (\forall\, a)x \vdash \sim (\neg \exists\, a) \sim x$. Аналогично для $\sim (\exists\, a)x$ получим, что $\sim (\exists\, a)x \vdash \sim (\neg \forall\, a) \sim x$.

§ 7. Исчисления теории кванторов

Исчисления теории кванторов получаются благодаря некоторым дополнениям к системам общей дедукции. В зависимости от того, к каким системам делаются эти дополнения, получаются различные исчисления. Например, если эти дополнения сделаны к системе S^s общей теории дедукции, получим систему сильной теории кванторов с операторами $\sim$, $\vee$, $\wedge$ и т. п., а если они сделаны к системе S^w — получим систему ослабленной теории кванторов. Мы подробно рассмотрим только исчисления сильной теории кванторов. Полученные при этом результаты легко переформулировать для прочих исчислений, введя коррективы, которые связаны с соответствующими системами общей теории дедукции.

Но исчисления теории кванторов различаются и независимо от различия систем, путем «расширения» систем, из которых они получаются. Здесь прежде всего различаются системы для классического и неклассического случаев. Мы рассмотрим сначала системы для классического случая. Затем здесь различаются системы в зависимости от понимания

того, какие кванторы считаются вырожденными. Это различие, как увидим ниже, имеет принципиальное значение.

Поскольку из контекста будет ясно, какой тип исчисления имеется в виду с точки зрения соответствующей системы теории дедукции и различения отрицаний, то для различения систем будем использовать символы Q^i, где $i = 1, 2, 3, \ldots$.

§ 8. Система Q^1

Система Q^1 сильной теории кванторов получается благодаря следующим дополнениям к системе S^s сильной теории логического следования.

Дополнения к алфавиту:

1) $s, s^1, s^2, s^3, \ldots$ — субъектные переменные;
2) $P, P^1, P^2, P^3, \ldots$ — предикатные переменные;
3) $\forall$ и $\exists$ — кванторы «все» и «некоторые»;
4) скобки, запятые — подсобные знаки.

Оператор предикативности будем опускать (вернее, не будем вводить), полагая, что функции его выполняет написание предикатных и субъектных переменных в определенном порядке.

*D*1. Предикатная формула $Q(a)$ и $Q(a^1, \ldots, a^n)$, где $n \geqslant 2$, суть предикатные формулы, если и только если Q есть предикатная переменная, а $a, a^1, \ldots, a^n$ суть субъектные переменные.

Дополнение к определению пропозициональной формулы:

1) предикатные формулы суть пропозициональные формулы;
2) если a есть субъектная или предикатная переменная, а x есть пропозициональная формула, то $(\forall a)x$ и $(\exists a)x$ суть пропозициональные формулы.

Определения свободных и связанных переменных и вхождений переменных аналогичны общепринятым (только они распространяются и на предикатные переменные). Аналогично же определяются бескванторные формы и вырожденные кванторы.

Дополнительные аксиомы схемы Q^1:

A^q1. $(\forall a)x \vdash x$;

A^q2. $x \vdash (\exists a)x$;

A^q3. $(\forall a)x \wedge (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$;

A^q4. $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\exists a)y$;

A^q5. $(\forall a)x \vdash \sim(\exists a) \sim x$;

A^q6. $\sim(\exists a)\sim x \vdash (\forall a)x$;

A^q7. $(\exists a)(K^1a^1)\dots(K^na^n)(Ka)x \vdash (\forall a)(K^1a^1)\dots(K^na^n)(Ka)x$,

где $K^1, \dots, K^n, K$ есть какая-то комбинация кванторов $\forall$ и $\exists$, а $n \geqslant 0$.

Частный случай аксиом A^q7 при $n = 0$ суть формулы $(\exists a)(\forall a)x \vdash (\forall a)(\forall a)x$ и $(\exists a)(\exists a)x \vdash (\forall a)(\exists a)x$.

$D1$. Кванторы $(\forall a)$ и $(\exists a)$ будем называть вырожденными в формулах вида $(\exists a)(K^1a^1)\dots(K^na^n)(Ka)x$ и $(\forall a)(K^1a^1)\dots(K^na^n)(Ka)x$.

Дополнительные правила вывода:

R^q1. Если $x \vdash y$, то $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$.

R^q2. Если $x \vdash y$, то $(\exists a)x \vdash (\exists a)y$.

Определения, теоремы и доказательства приведены в S^s.

§ 9. Система Q^2

Система Q^2 образуется из Q^1 путем замены A^q7 на аксиомную схему:

A^q7. $(\exists a)x \vdash (\forall a)x$,

где a не входит свободно в x.

Очевидно, система Q^1 содержится в Q^2. Но не всякая аксиома A^q7 системы Q^2 есть аксиома A^q7 системы Q^1. Например, формула $(\exists a)P(b) \vdash (\forall a)P(b)$ есть аксиома Q^2, но не есть аксиома Q^1.

$D1$. Кванторы $(\exists a)$ и $(\forall a)$ будем считать вырожденными в формулах соответственно $(\exists a)x$ и $(\forall a)x$, если и только если a не входит свободно в x.

§ 10. Непротиворечивость

Для доказательства непротиворечивости систем Q^1 и Q^2 достаточно доказать, что бескванторные формы теорем суть теоремы S^s, непротиворечивость которой доказана. А это действительно так.

§ 11. Непарадоксальность

Системы Q^1 и Q^2 непарадоксальны в смысле таких утверждений.

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема, то в y не входят переменные, отсутствующие в x (относится к переменным всех трех типов).

$MT2$. Если $x \vdash y$ есть теорема, то в y не входят предикатные формулы, отсутствующие в x.

Теоремы $MT1$ и $MT2$ очевидны из пересмотра дополнительных аксиом и правил вывода (поскольку S^s непарадоксальна). Из них следует:

$MT3$. Формулы $(\forall a)P(a) \vdash P(b)$ и $P(b) \vdash (\exists a)P(a)$ не являются теоремами Q^i.

§ 12. Независимость

Для доказательства независимости аксиомных схем и правил вывода Q^i примем общие семантические правила и особые исключающие семантические правила для каждой схемы и каждого правила. Последовательность их применения такова: сначала применяются особые правила, затем — общие.

Общие семантические правила:

1) операторы $\sim$, $\vee$, $\wedge$ определяются в двузначной алгебре высказываний;

2) $x \vdash y$ имеет значение v, если и только если $x \supset y$ есть тавтология, где $x \supset y$ есть сокращение для $\sim x \vee y$;

3) предикатным формулам значения истинности приписываются аналогично пропозициональным переменным (две предикатные формулы различны, если и только если они различаются графически);

4) $x \vdash y$ равнозначна своей бескванторной форме $x^* \vdash y^*$.

Особые исключающие семантические правила для A^q1–A^q7, R^q1 и R^q2.

Для A^q1: если в $x \vdash y$ переменная a входит в y свободно, а в x — нет, то $x \vdash y$ имеет значение nv. Для A^q2: если в $x \vdash y$ переменная a входит в x свободно, а в y — нет, то $x \vdash y$ имеет значение nv. Для A^q3: формулы $x \vdash y$ заменяются на $(\forall a^1)\dots(\forall a^n)x \vdash (\forall a^1)\dots(\forall a^n)y$, где a^i суть все индивидные и предикатные переменные, имеющие свободное вхождение в y; вырожденные кванторы отбрасываются; вхождения вида $\sim (\exists a) \sim x$ заменяются на $(\forall a)x$; вхождения вида $(\forall a)x$ заменяются на $(\sim x \vee x)$. Для A^q4: формулы $x \vdash y$ заменяются на $(\exists a^1)\dots(\exists a^n)x \vdash (\exists a^1)\dots(\exists a^n)y$, где a^i суть все индивидные и предикатные переменные, имеющие свободные вхождения в x; вырожденные кванторы отбрасываются; вхождения $\sim(\exists a) \sim x$ заменяются на $(\forall a)x$; оставшиеся вхождения $(\forall a)x$ заменяются на $(\sim x \wedge x)$. Для A^q5: опускаются отрицания; если во всех аксиомах данной схемы переменная a связана в посылке, то $(\exists a)x$ заменяется на $(\sim x \wedge x)$. Для A^q6: опускаются отрицания; $(\exists a)x$ заменяется на $(\sim x \vee x)$. Для A^q7: вхождения $\sim(\exists a) \sim x$ заменяются на $(\forall a)x$; вхождения $(\forall a)x$ заменяются на $(\sim x \vee x)$. Для R^q1: если в x свободно входит a, то x заменяется

на $(\forall a)x$; $(\forall a)(x \wedge y)$ заменяется на $(\forall a)(x \vee y)$. Для R^q2: если в x свободно входит a, то x заменяется на $(\forall a)x$; $(\exists a)(x \wedge y)$ заменяется на $(\exists a)(x \vee y)$.

§ 13. Некоторые теоремные схемы и метатеоремы

В дальнейшем будем делать ссылки только на аксиомы, правила вывода, теоремы и метатеоремы, дополнительные сравнительно с S^s. Ссылки на S^s будем опускать как очевидные.

$T1$. $\sim(\forall a)x \vdash (\exists a)\sim x$ $[A^q5, A^q6]$;

$T2$. $(\exists a)\sim x \vdash \sim(\forall a)\sim x$ $[A^q5, A^q6]$;

$T3$. $\sim x \vdash \sim(\forall a)x [A^q2, T_2]$;

$T4$. $\sim(\exists a)x \vdash \sim x [A^q1, A^q5, A^q6]$;

$T5$. $\sim(\exists a)(x \wedge y) \vdash \sim((\forall a)x \wedge (\exists a)y)[A^q4, T_1, T_2, A^q5, A^q6]$;

$T6$. $\sim((\forall a)x \vee (\exists a)y) \vdash \sim(\forall a)(x \vee y)[A^q3, T_1, T_2, A^q5, A^q6]$;

$T7$. $\sim\sim(\exists a)\sim x \vdash \sim(\forall a)x$ $[A^q5, A^q6]$;

$T8$. $\sim(\forall a)x \vdash \sim\sim(\exists a)\sim x$ $[A^q5, A^q6]$;

$T9$. $\sim(\forall a)(K^1a^1)\ldots(K^na^n)(Ka)x \vdash \sim(\exists a)(K^1a^1)\ldots(K^na^n)(Ka)x$.

Доказательство $T9$. Если $n = 0$, то

$$\sim(\forall a)(\forall a)x \vdash \sim(\exists a)(\forall a)x [T_1, T_2, A^q5 - A^q7],$$
$$\sim(\forall a)(\exists a)x \vdash \sim(\exists a)(\exists a)x [T_1, T_2, A^q5 - A^q7].$$

Если $n \geqslant 1$, то согласно T_1, T_2, A^q5, A^q6

$$\sim(\forall a)(K^1a^1)\ldots(K^na^n)(\forall a)x \vdash (\exists a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\exists a)\sim x,$$
$$\sim(\forall a)(K^1a^1)\ldots(K^na^n)(\exists a)x \vdash (\exists a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\forall a)\sim x,$$

где K^i и K_i $(i = 1, \ldots, n)$ различаются так: если один из них есть $\forall$, то другой есть $\exists$. Согласно A^q7

$$(\exists a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\exists a)\sim x \vdash (\forall a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\exists a)\sim x,$$
$$(\exists a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\forall a)\sim x \vdash (\forall a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\forall a)\sim x.$$

И согласно тем же T_1, T_2, A^q5, A^q6

$$(\forall a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\exists a)\sim x \vdash \sim(\exists a)(K^1a^1)\ldots(K^na^n)(\forall a)\sim\sim x,$$
$$(\forall a)(K_1a^1)\ldots(K_na^n)(\forall a)\sim x \vdash \sim(\exists a)(K^1a^1)\ldots(K^na^n)(\exists a)\sim\sim x.$$

По S^s получаем T_9.

Для Q^2 имеет силу теоремная схема:

$T10$. $\sim(\forall a)x \vdash \sim(\exists a)x$,

где a не входит свободно в $x[A^q7, T_1, T_2, A^q5, A^q6]$.

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема Q^i, и при этом множества входящих в x и в y пропозициональных переменных и предикатных формул совпадают, то $\sim y \vdash \sim x$ есть теорема Q^i.

Доказательство $MT1$. Если $x \vdash y$ есть аксиома Q^i, то $\sim y \vdash \sim x$ есть теорема Q^i (согласно $T3$–$T9, T10$). Пусть $A \vdash B$ есть теорема Q^i, $(\forall a)A \vdash (\forall a)B$ получается из $A \vdash B$ по правилу R^q1, и для $A \vdash B$ верна $MT1$. Согласно R^q2 и по допущению теоремой будет $(\exists a) \sim B \vdash (\exists a) \sim A$, а согласно T_1 и T_2 теоремой будет $\sim(\forall a)B \vdash (\forall a)A$. Пусть $(\exists a)A \vdash (\exists a)B$ получается из $A \vdash B$ по правилу R^q2, а $MT1$ верна для $A \vdash B$. По допущению и R^q1 теоремой будет $(\forall a) \sim B \vdash (\forall a) \sim A$, а согласно A^q5 и A^q6 теоремой будет $\sim(\exists a)B \vdash \sim(\exists a)A$. Таким образом, правила R^q1 и R^q2 рассматриваемой свойство теорем сохраняют. Для системы же S $MT1$ верна.

$MT2$. Если $x \vdash y \wedge z$ и $z \vdash w$ суть теоремы, то $x \vdash y \wedge w$ есть теорема (в силу S^s).

$MT3$. Если $x \wedge y \vdash z$ и $w \vdash x$ суть теоремы, то $w \wedge y \vdash z$ есть теорема (в силу S^s).

$MT4$. Если $x \vdash y \vee z$ и $z \vdash w$ суть теоремы, и при этом совпадают множества пропозициональных переменных и предикатных формул, входящих в посылки и заключения этих формул, то $x \vdash y \vee w$ есть теорема (следствие $MT1$–$MT3$).

$MT5$. Если $x \vee y \vdash z$ и $w \vdash x$ суть теоремы, то при том же условии, что и в $MT4$ формула $w \vee y \vdash z$ есть теорема (следствие $MT1$–$MT3$).

$MT6$. Если $\sim x \vdash y$ и $x \vdash w$ суть теоремы, то при том же условии, что в $MT4$, $\sim w \vdash y$ суть теорема.

$MT7$. Если $x \vdash \sim y$ и $w \vdash y$ суть теоремы, то при том же условии, что в $MT4$, $x \vdash \sim w$ есть теорема.

Изложенные метатеоремы можно использовать как производные правил вывода.

$T11$. $(\forall a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\forall a)x$ $[A^q1, R^q1, A^q7]$;

$T12$. $(\exists a)(\exists b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$ $[A^q2, R^q2, A^q7]$;

$T13$. $(\exists a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\exists a)x$ $[A^q1, R^q2, R^q1, A^q7]$;

$T14$. $(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\forall a)x \wedge (\forall a)y$ $[A^q1, A^q7, R^q1]$;

$T15$. $(\forall a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \wedge y)$ $[A^q1, A^q7, R^q1]$;

$T16.$ $(\exists a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y$ $[T14, T15, A^q5, A^q6]$;

$T17.$ $(\exists a)x \vee (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$ $[T14, T15, A^q5, A^q6]$;

$T18.$ $(\exists a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\exists a)y$ $[R^q2]$;

$T19.$ $(\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \vee y)$ $[T18, MT1, A^q5, A^q6]$;

$T20.$ $(\forall a)x \vdash (\exists a)x$ $[A^q1, A^q2]$;

$T21.$ $\sim(\exists a)x \vdash \sim(\forall a)x$ $[T20, MT1]$;

$T22.$ $(\forall a)x \wedge (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$ $[T17, T20]$;

$T23.$ $(\exists a)x \vee (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$ $[T22]$;

$T24.$ $(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\forall a)x \wedge (\exists a)y$ $[T14, T20]$;

$T25.$ $(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\forall a)y$ $[T14, T20]$;

$T26.$ $(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\exists a)y$ $[T14, T20]$;

$T27.$ $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\forall a)y$ $[A^q4]$;

$T28.$ $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y$ $[T20, T16]$;

$T29.$ $(\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$ $[T20, T17]$;

$T30.$ $(\forall a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$ $[T15, T20]$;

$T31.$ $\sim(\forall a) \sim x \vdash (\exists a)x$ $[T1, T2]$;

$T32.$ $(\forall a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\exists a)x$ $[T20, T13]$;

$T33.$ $(\forall a)(\forall b)x \vdash (\exists b)(\forall a)x$ $[T11, T20]$;

$T34.$ $(\forall a)(\forall b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$ $[T32, T20]$;

$T35.$ $(\forall a)(\exists b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$ $[T20, T12]$;

$T36.$ $(\forall a)x \wedge (\forall b)x \vdash (\forall a)(\forall b)x$ $[A^q1, A^q2, A^q7, R^q1]$;

$T37.$ $(\forall a)x \wedge (\exists b)x \vdash (\forall a)(\exists b)x$ $[A^q1, A^q2, A^q7, R^q1]$;

$T38.$ $(\exists a)x \wedge (\forall b)x \vdash (\exists a)(\forall b)x$ $[A^q2]$;

$T39.$ $(\exists a)x \wedge (\exists b)x \vdash (\exists a)(\exists b)x$ $[A^q2]$;

$T40.$ $(\exists a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$ $[A^q3]$;

$T41.$ $\sim(\exists a)x \vdash (\forall a) \sim x$ $[A^q6]$;

$T42.$ $(\forall a) \sim x \vdash \sim(\exists a)x$ $[A^q5]$;

$T43.$ $(\exists a) \sim x \vdash \sim(\forall a)x$ $[T2]$.

Для Q^2 имеют силу теоремные схемы:

$T44.$ $x \vdash (\forall a)x$,

где a не входит свободно в x $[A^q1, A^q7]$.

$T45.$ $(\exists a)x \vdash x$,

где a не входит свободно в x $[A^q2, A^q7]$.

Системы Q^1 и Q^2 соответствуют интуиции в том смысле, что в них теоремами являются формулы, соответствующие перечисленным в § 6 утверждениям и все они непарадоксальны в смысле § 11. Но между системами Q^1 и Q^2 (а также между Q^3 и Q^4) имеется одно существенное различие, которое мы рассмотрим ниже.

§ 14. Системы Q^3 и Q^4

Системы Q^3 и Q^4 получаются соответственно из Q^1 и Q^2 путем присоединения дополнительной аксиомной схемы:

A^q8. $(\exists\, a)(\sim x \vee x) \vdash (\forall\, a)(\sim x \vee x)$.

Эти системы непротиворечивы, поскольку бескванторные формы аксиом A^q8 имеют вид $\sim x^* \vee x^* \vdash \sim x^* \vee x^*$ и являются теоремами S^s. Эти системы, очевидно, непарадоксальны.

Для доказательства независимости A^q8 принимается такое исключающее семантическое правило: вхождения вида $\sim(\exists\, a) \sim x$ заменяются на $(\forall\, a)x$; если же во всех аксиомах данной схемы a не входит свободно в x, то вхождения вида $(\forall\, a)x$ заменяются на $(\exists\, a)x$; оставшиеся вхождения вида $(\forall\, a)x$ заменяются на $(\sim x \wedge x)$.

$T1$. $\sim x \vee x \vdash (\forall\, a)(\sim x \vee x)$;

$T2$. $(\exists\, a)(\sim x \vee x) \vdash \sim x \vee x$;

$T3$. $\sim(\sim x \vee x) \vdash (\forall\, a) \sim(\sim x \vee x)$;

$T4$. $(\exists\, a) \sim(\sim x \vee x) \vdash \sim(\sim x \vee x)$.

$MT1$. Если $x \dashv\vdash \sim y \vee y$ суть теоремы, то $(\forall\, a)x \dashv\vdash x$, $(\forall\, a) \sim x \dashv\vdash \sim x$, $(\exists\, a)x \dashv\vdash x$, $(\exists\, a) \sim x \dashv\vdash \sim x$ суть теоремы.

$D1$. Кванторы $(\forall\, a)$ и $(\exists\, a)$ являются вырожденными соответственно в $(\forall\, a)x$ и $(\exists\, a)x$ в таких и только таких случаях:

1) они являются вырожденными согласно $D1$ из § 8 или, соответственно, согласно $D1$ из § 9;

2) имеется такая формула y, что $x \dashv\vdash \sim y \vee y$ или $x \dashv\vdash \sim(\sim y \vee y)$ суть теоремы S^s.

§ 15. Системы Q^{id}

Системы Q^{id} получаются из ранее рассмотренных систем путем присоединения тех дополнений к S^s, которые были приняты при построении S^d, а также дополнительного правила вывода:

R^q3. Если $x \vdash$, то $\vdash (\forall\, a)x$,

или дополнительной аксиомной схемы:

A^q9. $(\forall a)x \vdash (\exists a)x$,

где $\vdash x$ есть теорема (если Q^i есть Q^1 или Q^2)

В Q^3 и Q^4 правило R^q3 и аксиома A^q9 получаются как производные.

В Q^{id} теоремами являются формулы

$\vdash (\forall a)(\sim x \vee x)$,

$\vdash (\forall a)(\forall b)(\sim x \vee x)$,

$\vdash (\forall a)(\sim x \vee x \vee y)$,

$\vdash (\forall a) \sim (\sim x \wedge x)$

и т. п. Однако в Q^{id} не являются теоремами формулы $\vdash \sim P(a) \vee (\exists b)P(b)$, $\vdash \sim (\forall a)P(a) \vee P(b)$, $\vdash (\exists a)(P(a) \vee \sim P(b))$, $\vdash P(a) \supset (\exists b)P(b)$ и вообще формулы вида $\vdash y \supset (\exists a)x$ и $\vdash (\forall a)x \supset y$, где в x нет вхождений $(\forall b)z$, и $(\exists b)z$, в которые свободно входят a, а y образуется из x путем замены всех свободных вхождений a на b. Наше утверждение справедливо постольку, поскольку справедлива теорема:

$MT1$. Если $\vdash x$ есть теорема Q^{id}, то ее бескванторная форма $\vdash x^*$ есть теорема S^d.

§ 16. Системы для неклассического случая

Системы для неклассического случая получаются благодаря таким дополнениям к системам для классического случая и модификациям их.

Дополнения к алфавиту:

1) $\neg$ — оператор внутреннего отрицания;

2) ? — оператор неопределенности.

Дополнение к определению пропозициональной формулы: если a есть субъектная или предикатная переменная, а x есть пропозициональная формула, то $(\neg \forall a)x$, $(?\forall a)x$, $(\neg \exists a)x$ и $(?\exists a)x$ суть пропозициональные формулы.

Дополнение к определениям свободных и связанных вхождений переменных: переменные связываются кванторами с операторами $\neg$ и ? так же, как и без них.

Вместо аксиомных схем A^q5 и A^q6 принимаются аксиомные схемы:

$A^q5,1$. $(\forall a)x \vdash (\neg \exists a) \sim x$;

$A^q5,2$. $(\neg \forall a)x \vdash (\exists a) \sim x$;

$A^q5,3$. $(?\forall a)x \vdash (?\exists a) \sim x$;

$A^q6{,}1.\ (\neg \exists a) \sim x \vdash (\forall a)x;$
$A^q6{,}2.\ (\exists a) \sim x \vdash (\neg \forall a)x;$
$A^q6{,}3.\ (?\forall a)x \vdash (?\forall a) \sim x.$

Дополнительные аксиомные схемы:

$A^q10{,}1.\ (\forall a)x \vdash \sim(\neg \forall a)x \wedge \sim(?\forall a)x;$
$A^q10{,}2.\ (\neg \forall a)x \vdash \sim(\forall a)x \wedge \sim(?\forall a)x;$
$A^q10{,}3.\ (?\forall a)x \vdash \sim(\forall a)x \wedge \sim(\neg \forall a)x;$
$A^q11{,}1.\ \sim(\neg \forall a)x \wedge \sim(?\forall a)x \vdash (\forall a)x;$
$A^q11{,}2.\ \sim(\forall a)x \wedge \sim(?\forall a)x \vdash (\neg \forall a)x;$
$A^q11{,}3.\ \sim(\forall a)x \wedge \sim(\neg \forall a)x \vdash (?\forall a)x;$
$A^q12.\ (\neg \forall a)(x \wedge y) \vdash (\neg \forall a)x \vee (\neg \forall a)y;$
$A^q13.\ (\neg \forall a)x \vee (\neg \forall a)y \vdash (\neg \forall a)(x \wedge y);$
$A^q14.\ (\neg \exists a)x \vee (\neg \exists a)y \vdash (\neg \exists a)(x \wedge y).$

Бескванторные формы пропозициональных формул образуются так: все вхождения вида $(?\forall a)x (?\exists a)x$ заменяются соответственно на $\sim(\forall a)x \wedge \sim(\neg \forall a)x$ и $\sim(\exists a)x \wedge \sim(\neg \exists a)x$; все вхождения вида $(\neg \forall a)x$ и $(\neg \exists a)x$ заменяются на $\sim(\forall a)x$ и $\sim(\exists a)x$ соответственно; все кванторы из полученной формулы исключаются.

Легко убедиться в том, что все бескванторные формы аксиом систем для неклассического случая суть теоремы в системах общей теории дедукции. Отсюда следует непротиворечивость систем для неклассического случая.

§ 17. Некоторые следствия в системах для неклассического случая

$T1.\ (\exists a)x \dashv\vdash (\neg \forall a) \sim x;$
$T2.\ (\neg \exists a)x \dashv\vdash (\forall a) \sim x;$
$T3.\ (?\exists a)x \dashv\vdash (?\forall a) \sim x;$
$T4.\ \sim(\forall a)x \dashv\vdash (\neg \forall a)x \vee (?\forall a)x;$
$T5.\ \sim(\neg \forall a)x \dashv\vdash (\forall a)x \vee (?\forall a)x;$
$T6.\ \sim(?\forall a)x \dashv\vdash (\forall a)x \vee (\neg \forall a)x;$
$T7.\ (\exists a)(x \vee y) \dashv\vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y;$
$T8.\ (\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \vee y);$

$T9$. $\vdash \sim((\forall a)x \wedge (\neg \forall a)x)$,
$\vdash \sim((\exists a)x \wedge (\neg \exists a)x)$;

$T10$. $\vdash \sim((\forall a)x \wedge (?\forall a)x)$,
$\vdash \sim((\exists a)x \wedge (?\exists a)x)$;

$T11$. $\vdash \sim((\neg \forall a)x \wedge (?\forall a)x)$,
$\vdash \sim((\neg \exists a)x \wedge (?\exists a)x)$;

$T12$. $\vdash (\forall a)x \vee (\neg \forall a)x \vee (?\forall a)x$,
$\vdash (\exists a)x \vee (\neg \exists a)x \vee (?\exists a)x$;

$T13$. $\vdash \sim((\forall a)x \wedge (\neg \forall a)x$,
$\wedge (?\forall a)x) \vdash \sim((\exists a)x \wedge (\neg \exists a)x \wedge (?\exists a)x)$.

§ 18. Другой вариант систем для классического случая

Системы для классического случая можно получить из систем для неклассического случая, приняв дополнительную аксиомную схему:

$A^{q}15$. $\sim(\forall a)x \vdash (\neg \forall a)x$.

При этом будут иметь силу теоремные схемы:

$T1$. $\vdash \sim(?\forall a)x$,
$\vdash \sim(?\exists a)x$;

$T2$. $(\forall a)x \dashv\vdash \sim(\exists a) \sim x$;

$T3$. $\vdash (\forall a)x \vee (\neg \forall a)x$,
$\vdash (\exists a)x \vee (\neg \exists a)x$.

§ 19. Косвенная семантическая интерпретация для классического случая

Предикатным формулам будем приписывать значения истинности v и nv аналогично пропозициональным переменным. Две предикатные формулы будем считать различными, если и только если они различны графически. Значения истинности различных предикатных формул независимы. Операторы $\sim$, $\vee$ и $\wedge$ определяются как операторы двузначной алгебры высказываний.

Введем в алфавит особые символы отмеченных переменных следующим образом: если a есть субъектная или предикатная переменная, то ia есть ее отмеченная переменная, где $i = 1, 2, 3, \ldots$.

*D*1. Интерпретационной формой пропозициональной формулы x будем называть пропозициональную формулу x^*, которая образуется из x следующим образом. Если a есть субъектная или предикатная переменная, имеющая свободное вхождение в x, и если число отмеченных переменных для a больше нуля, то все свободные вхождения a в x заменяются на ia, где ia есть любая из отмеченных переменных для a. Все вхождения вида $(\forall b)z$ в x, где z не содержит кванторов, заменяются конъюнкциями $z^1 \wedge z^2 \wedge \ldots \wedge z^n$, где z есть результат замены всех свободных вхождений b в z соответственно ia, а все вхождения вида $(\exists b)z$, где z не содержит кванторов, заменяется дизъюнкциями $z^1 \vee z^2 \vee \ldots \vee z^n$, где $z^1, z^2, \ldots, z^n$ те же, что и выше. Причем, если число отмеченных переменных переменной b равно нулю, то $(\forall b)z$ и $(\exists b)z$ заменяются на z^i, где i есть какое-то число $1, 2, 3, \ldots$. Если b не входит свободно в z, то $(\forall b)z$ и $(\exists b)z$ заменяются на z. Указанная замена производится до тех пор, пока из формулы не будут элиминированы все кванторы.

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ суть все различные субъектные и предикатные переменные, входящие в x, а $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ суть заданные числа отмеченных переменных, соответственно переменных $a^1, \ldots, a^n$.

*SR*1. Пропозициональная формула x имеет значение j (j есть v или nv) для данных $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, если и только если ее интерпретационная форма x^* при данных $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ имеет значение j.

*D*2. Пропозициональная формула x есть тавтология для данных $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, если и только если ее интерпретационная форма x^* при данных $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ есть тавтология.

*D*3. Пропозициональная формула x есть противоречие для данных $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, если и только если x^* есть противоречие для данных $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$.

*D*4. Пропозициональная формула x есть тавтология, если, и только если, она есть тавтология для любых $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$.

*D*5. Пропозициональная формула x есть противоречие, если и только если $\sim x$ есть тавтология.

*D*6. Интерпретационная форма формулы $x \vdash y$ образуется так. Если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 0)$ суть все переменные, имеющие свободные вхождения в x и не имеющие таковых в y, а $b^1, \ldots, b^m$ $(m \geqslant 0)$ суть все переменные, имеющие свободные вхождения в y и не имеющие таковых в x, то $x \vdash y$ заменяются на $(\exists a^1) \ldots (\exists a^n)x \vdash (\forall b^1) \ldots (\forall b^m)y$. Посылка и заключение последней заменяются их интерпретационными формами. Причем, если переменная a входит свободно в x и в y, то

(если число отмеченных переменных для a больше нуля) свободные вхождения a в x и в y заменяются той же отмеченной переменной ia.

Значения бескванторных формул следования устанавливаются так же, как в общей теории дедукции (с учетом того дополнения, что в формулах встречаются предикатные формулы).

Примем следующее правило:

$SR2$. Формула $x \vdash y$ имеет значение v, если и только если при любом числе отмеченных переменных (для каждой субъектной и предикатной переменной) каждая ее интерпретационная форма имеет значение v.

Тот факт, что в $SR2$ фигурирует указание на любое число отмеченных переменных, не должен смущать, ибо в практическом применении $SR2$ строить интерпретационные формулы в доказательствах общих утверждений не приходится.

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема в системах теории кванторов $Q^1 - Q^4$ для классического случая, то она имеет значение v.

Доказательство $MT1$. Интерпретационные формы аксиом суть соответственно формулы:

1. $x \vdash x$;
2. $x \vdash x$;
3. $(x^1 \wedge \ldots \wedge x^n) \wedge (y^1 \vee \ldots \vee y^n) \vdash (x^1 \wedge y^1) \vee \ldots \vee (x^n \wedge y^n)$,

где x^i и y^i суть результат замены a на ia.

$(x^1 \wedge \ldots \wedge x^n) \wedge y \vdash (x^1 \wedge y) \vee \ldots \vee (x^n \wedge y)$,

$x \wedge (y^1 \vee \ldots \vee y^n) \vdash (x \wedge y^1) \vee \ldots \vee (x \wedge y^n)$,

$x \wedge y \vdash x \wedge y$;

4. $(x^1 \vee y^1) \wedge \ldots \wedge (x^n \vee y^n) \vdash (x^1 \wedge \ldots \wedge x^n) \vee (y^1 \vee \ldots \vee y^n)$,

$(x^1 \vee y) \wedge \ldots \wedge (x^n \vee y) \vdash (x^1 \wedge \ldots \wedge x^n) \vee y$,

$(x \vee y^1) \wedge \ldots \wedge (x \vee y^n) \vdash x \vee (y^1 \vee \ldots \vee y^n)$,

$x \vee y \vdash x \vee y$;

5. $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash \sim(\sim x^1 \vee \ldots \vee \sim x^n)$,

$x \vdash \sim\sim x$;

6. $\sim(\sim x^1 \vee \ldots \vee \sim x^n) \vdash x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \sim\sim x \vdash x$;
7. $x^* \vdash x^*$,

где x^* есть x или результат замен, указанных в $D1$.

8. $\sim x \vee x \vdash \sim x \vee x$,

$(\sim x^1 \vee x^1) \vee \ldots \vee (\sim x^n \vee x^n) \vdash (\sim x^1 \vee x^1) \wedge \ldots \wedge (\sim x^n \vee x^n)$;

9. $x \vdash x$,

$x^1 \vee \ldots \vee x^n \vdash x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$,

где все x^i суть теоремы. Все эти формулы имеют значение v. Покажем, далее, что правила R^q1 и R^q2 это свойство формул сохраняют.

Если $x \vdash y$ имеет значение v, то значение v имеет ее интерпретационная форма $x^* \vdash y^*$. Если a входит в $x^* \vdash y^*$, заменяем повсюду a на ia. Очевидно, все полученные формулы $x^i \vdash y^i$, где x^i и y^i суть результат замены a на ia в x^* и y^*, имеют значение v. Значит формулы $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y^1 \wedge \ldots \wedge y^n$ и $x^1 \vee \ldots \vee x^n \vdash y^1 \vee \ldots \vee y^n$, являющиеся интерпретационными формулами формул $(\forall a)x^* \vdash (\forall a)y^*$ и $(\exists a)x^* \vdash (\exists a)y^*$ и, следовательно, формул $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$ и $(\exists a)x \vdash (\exists a)y$, имеют значение v. Значит, по правилам R^q1 и R^q2 из истинных формул получаются только истинные формулы.

*D*7. Интерпретационная форма формулы $\vdash x$ получается из $\vdash x$ путем замены x ее интерпретационной формой.

*SR*3. Формула $\vdash x$ имеет значение v, если и только если x есть тавтология.

Производные правила:

*SR*4. Если $(\forall a)x = v$, то $x = v$.

*SR*5. Если $x = v$, то $(\exists a)x = v$.

*SR*6. Если $x = nv$, то $(\forall a)x = nv$.

*SR*7. Если $(\exists a)x = nv$, то $x = nv$.

*MT*2. Если $\vdash x$ есть теорема в системе Q^{id} для классического случая, то она имеет значение v.

Для доказательства *MT*2 достаточно показать, что если $\vdash x$ имеет значение v, то и $\vdash (\forall a)x$ имеет значение v. Пусть $\vdash x^*$ есть интерпретационная форма $\vdash x$; если она имеет значение v, то значение v будут иметь все формулы $\vdash x^i$ (см. выше). Значит, значение v будет иметь формула $\vdash x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$, являющаяся интерпретационной формой формулы $\vdash (\forall a)x$ и, следовательно, $(\vdash (\forall a)x) = v$.

§ 20. Косвенная семантическая интерпретация

Примем следующее дополнение к определению пропозициональной формулы: если x есть пропозициональная формула, то $\{x\}$ есть пропозициональная формула.

$D1$. Интерпретационная форма пропозициональной формулы x образуется из x следующим образом. Вхождения вида $(?\forall b)z$ и $(?\exists b)z$ заменяются соответственно на $\sim(\forall b)z\wedge\sim(\neg\forall b)z$ и $\sim(\exists b)z\wedge\sim(\neg\exists b)z$. Вхождения вида $(\neg\forall b)z$ и $(\neg\exists b)z$ заменяются соответственно на $(\exists b)\sim z$ и $(\forall b)\sim z$. Вхождения $(\forall b)z$ и $(\exists b)z$ заменяются соответственно на $\{z^1\wedge\ldots\wedge z^n\}$ и $\{z^1\vee\ldots\vee z^n\}$, где $z^1,\ldots,z^n$ аналогичны таковым в § 19. Если число отмеченных переменных равно нулю, то $(\forall b)z$ и $(\exists b)z$ заменяются на $\{z\}$. Если число отмеченных переменных равно единице, то $(\forall b)z$ и $(\exists b)z$ заменяются на $\{z^i\}$, где i есть какое-то $1, 2, 3, \ldots$. Если b не входит свободно в z, то $(\forall b)z$ и $(\exists b)z$ заменяются на $\{z\}$.

Дополнительные семантические правила:

$SR1$. Если $\{x\}=v$, то $x=v$. Если $x=nv$, то $\{x\}=nv$.

$SR2$. Если одна из $\{x\}$ и $\{\sim x\}$ имеет значение nv, то значение другой не зависит от первой (т. е. они обе могут иметь значение nv).

$MT1$. Если $x\vdash y$ есть теорема в системах для неклассического случая, она имеет значение v.

$MT2$. Если $\vdash x$ есть теорема в системах для неклассического случая, то она имеет значение v.

Теоремы $MT1$ и $MT2$ доказываются путем пересмотра всех аксиом и правил вывода. При построении интерпретационных форм аксиом $A^q5 - A^q14$ получатся сначала формулы:

1. $(\forall a)x\vdash(\forall a)\sim\sim x$;
2. $(\exists a)\sim x\vdash(\exists a)\sim x$;
3. $\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x\vdash\sim(\exists a)\sim x\wedge\sim(\forall a)\sim\sim x$;
4. $(\forall a)\sim\sim x\vdash(\forall a)x$;
5. $(\exists a)\sim x\vdash(\exists a)\sim x$;
6. $(\exists a)\sim x\wedge\sim(\forall a)\sim\sim x\vdash\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x$;
7. $(\forall a)x\vdash\sim(\exists a)\sim x\wedge\sim(\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x)$;
8. $(\exists a)\sim x\vdash\sim(\forall a)x\wedge\sim(\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x)$;
9. $\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x\vdash\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x$;
10. $\sim(\exists a)\sim x\wedge\sim(\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x)\vdash(\forall a)x$;
11. $\sim(\forall a)x\wedge\sim(\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x)\vdash(\exists a)\sim x$;
12. $\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x\vdash\sim(\forall a)x\wedge\sim(\exists a)\sim x$;
13. $(\exists a)\sim(x\wedge y)\vdash(\exists a)\sim x\vee(\exists a)\sim y$;
14. $(\exists a)\sim x\vee(\exists a)\sim y\vdash(\exists a)\sim(x\wedge y)$;
15. $(\forall a)\sim x\vee(\forall a)\sim y\vdash(\forall a)\sim(x\wedge y)$.

Как видим, потребуется рассмотреть лишь формулы 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15.

Полностью мы этого делать не будем (это громоздко, но принципиально не сложно). Ограничимся рассмотрением формул 7 и правила R^q1 (в качестве образца).

Интерпретационная форма формул 7 есть формула одного из следующих видов:

1) $\{x\} \vdash \sim\{\sim x\} \wedge \sim(\sim\{x\} \wedge \sim\{\sim x\})$;

2) $\{x^1\} \wedge \ldots \wedge \{x^n\} \vdash \sim(\{\sim x^1\} \vee \ldots \vee \{\sim x^n\}) \wedge$
$\wedge \sim(\sim(\{x^1\} \wedge \ldots \wedge \{x^n\}) \wedge \sim(\sim\{\sim x^1\} \vee \ldots \vee \{\sim x^n\}))$.

В первом случае имеем: если $\{x\} = v$, то $\{\sim x\} = nv$, $\sim\{\sim x\} = v$, $\sim\{x\} = nv$, $\sim\{x\} \wedge \sim\{\sim x\} = nv$, $\sim(\sim\{x\} \wedge \sim\{\sim x\}) = v$; если же заключение имеет значение nv, то $\sim\{\sim x\} = nv$ или $\sim(\sim\{x\} \wedge \sim\{\sim x\}) = nv$; если $\sim(\sim\{x\} \wedge \sim\{\sim x\}) = nv$, то $(\sim\{x\} \wedge \sim\{\sim x\}) = v$; $\sim\{x\} = v$ и $x = nv$; таким образом, формула имеет значение v. Во втором случае получим следующее. Если посылка имеет значение v, то $\sim(\{x^1\} \wedge \ldots \wedge \{x^n\}) = nv$, $\sim(\{x^1\} \wedge \ldots \wedge \{x^n\}) \wedge \sim(\{\sim x^1\} \vee \ldots \vee \{\sim x^n\}) = nv$, $\sim(\sim(\{x^1\} \wedge \ldots \wedge \{x^n\}) \wedge \sim(\{\sim x^1\} \vee \ldots \vee \{\sim x^n\})) = nv$, $\{x^1\} = v$, $\ldots, \{x^n\} = v$, $\{\sim x^1\} = nv, \ldots, \{\sim x^n\} = nv, \sim(\{\sim x^1\} \vee \ldots \vee \{\sim x^n\}) = v$, и заключение в целом имеет значение v. Если заключение имеет значение nv, то либо первый член конъюнкции имеет значение nv, либо второй. Если первый, то $\{\sim x^1\} = v, \ldots, \{\sim x^n\} = v$, $\{x^1\} = nv$, $\ldots, \{x^n\} = nv$, т. е. посылка имеет значение nv. Если второй член конъюнкции имеет значение nv, то по правилам для отрицания и конъюнкции по крайней мере одна из $\{x^1\}, \ldots, \{x^n\}$ имеет значение nv. Значит, посылка имеет значение nv. Формула, таким образом, имеет значение v.

Возьмем правило R^q1. Пусть $x^* \vdash y^*$ есть интерпретационная форма $x \vdash y$. В результате применения R^q1 получится формула $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$, интерпретационная форма которой либо есть $x^* \vdash y^*$ (если a не входит свободно в $x \vdash y$), либо есть формула вида $x^{*1} \wedge \ldots \wedge x^{*n} \vdash y^{*1} \wedge \ldots \wedge y^{*n}$. Если $x \vdash y$ есть теорема, по допущению все формулы $x^* \vdash y^*$, $x^{*1} \vdash y^{*1}$, $x^{*2} \vdash y^{*2}, \ldots, x^{*n} \vdash y^{*n}$ имеют значение v. Откуда следует, что интерпретационная форма $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$ для любого n имеет значение v. Значит, сама эта формула имеет значение v.

§ 21. Некоторые важные следствия

Из теорем $MT1$ и $MT2$ предшествующего параграфа следуют утверждения:

$MT1$. Формулы $\sim(\neg\forall a)x \vdash (\forall a)\sim x$ и $\sim(\neg\exists a)x \vdash (\exists a)x$, в которых a входит свободно в x, не являются теоремами в рассмотренных системах для неклассического случая (поскольку они имеют значение nv).

$MT2$. Формулы $\sim(\forall a)x \vdash (\exists a)x$ и $\sim(\exists a)\sim x \vdash (\forall a)x$, в которых a входит свободно в x, не являются теоремами в системах для неклассического случая (поскольку имеют значение nv).

$MT3$. Формулы $\vdash\sim(\neg Ka)x \vdash (Ka)x$, $\vdash (Ka)x \vee (\neg Ka)x$, $\vdash (Ka)x \vee (?Ka)x$ и $\vdash (\neg Ka)x \vee (?Ka)x$ (где K есть $\forall$ или $\exists$), в которых a входит свободно в x, не являются теоремами в Q^{id} для неклассического случая (так как имеют значение nv).

§ 22. Теория предикации

Система Q^{p}, содержащая теорию предикации, получается благодаря таким дополнениям к системам теории кванторов.

Дополнение к определению предикатной формулы: если $a^1, \ldots, a^n$ ($n \geqslant 1$) суть индивидные (субъектные переменные, а Q есть предикатная переменная, то $\neg Q(a^1, \ldots, a^n)$ и $?Q(a^1, \ldots, a^n)$ суть предикатные формулы.

Пусть α есть сокращенная запись (a) или $(a^1, \ldots, a^n)$.

Дополнительные аксиомы схемы A^{p}:

1. $Q\alpha \dashv\vdash \sim\neg Q\alpha \wedge \sim ?Q\alpha$;
2. $\neg Q\alpha \dashv\vdash \sim Q\alpha \wedge \sim ?Q\alpha$;
3. $?Q\alpha \dashv\vdash \sim Q\alpha \wedge \sim\neg Q\alpha$.

Дополнительные семантические правила SR^{p}:

1) Если одна $Q\alpha$ и $\neg Q\alpha$ имеет значение v, то другая из них имеет значение nv. Если же одна из них имеет значение nv, то значение другой не зависит от первой.

2) Формулы $?Q\alpha$ равнозначна формуле $\sim Q\alpha \wedge \sim\neg Q\alpha$.

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема Q^{p}, то она имеет значение v.

$MT2$. Если $\vdash x$ есть теорема Q^{p}, то она имеет значение v.

$MT3$. Формулы $\sim\neg Q\alpha \vdash Q\alpha$ и $\vdash Q\alpha \vee \neg Q\alpha$ теоремами Q^{p} не являются (поскольку имеют значение nv). Аналогично теоремами не являются формулы $(\neg\forall a)Q(a) \vdash (\exists a)\neg Q(a)$, $(\neg\forall a)\neg Q(a) \vdash (\exists a)Q(a)$ и т. п.

$MT4$. В Q^{p} теоремами являются формулы вида

$\sim(\forall a)\sim Q(a) \vdash (\neg\forall a)\sim Q(a) \vee (?\forall a)\sim Q(a)$,

$(\forall a)Q(a) \vdash (\neg\exists a)\neg Q(a) \wedge (\neg\exists a)?Q(a)$

и т. п. вместо привычных теорем $\sim(\forall a)\sim Q(a) \vdash (\exists a)Q(a)$, $(\forall a)Q(a) \vdash \sim(\exists a)\sim Q(a)$ и т. п. для классического случая.

§ 23. Системы с оператором условности

Системы теории кванторов с оператором условности получаются благодаря таким дополнениям к рассмотренным системам. Принимаются все те дополнения к общей теории дедукции, благодаря которым получаются системы теории условных высказываний. Принимаются такие дополнительные аксиомные схемы:

$A^{\text{if}}1.$ $(x \to y) \vdash (\forall a)(x \to y)$;

$A^{\text{if}}2.$ $(\exists a)\sim(x \to y) \vdash \sim(x \to y)$;

$A^{\text{if}}3.$ $(\forall a)(x \to y) \vdash ((\forall a)x \to (\forall a)y)$;

$A^{\text{if}}4.$ $(\forall a)(x \to y) \vdash ((\exists a)x \to (\exists a)y)$.

В классическом случае аксиомы $A^{\text{if}}4$ получаются из $A^{\text{if}}3$ как следствие.

§ 24. Другие возможные расширения теории кванторов

Примем следующее дополнение к определению пропозициональной формулы: если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть субъектные или предикатные переменные, а x есть пропозициональная формула, то $(\alpha K(a^1, \ldots, a^n))x$ есть пропозициональная формула, где α обозначает наличие или отсутствие операторов $\neg$ и ?, а K есть $\forall$ или $\exists$.

В таком случае к аксиомным схемам систем теории кванторов можно добавить: $(Ka^1)\ldots(Ka^n)x \dashv\vdash (K(a^1, \ldots, a^n))x$.

Причем, формулы такого вида практически употребляются в языке в таком смысле: $(\forall(a, b))x$ — как «Для всех пар (a, b) имеет место x», $(\forall(a, b, c))x$ — как «Для всех троек (a, b, c) имеет место x» и т. п.

Кроме того, можно ввести в число пропозициональных формул выражения ($K^1, K^2, \ldots, K^n$ — кванторы $\forall$ и $\exists$):

$$((K^1a) \wedge (K^2b))x, \quad ((K^1a) \vee (K^2b))x,$$

$$((K^1a^1) \wedge \ldots \wedge (K^na^n))x$$

и т. п. для различных комбинация $\vee$, $\wedge$, $\sim$, а также с операторами $\neg$ и ? и принять соответствующие правила вроде $((\forall a) \wedge (\forall b))x \dashv\vdash (\forall a)x \wedge (\forall b)x$ и т. п. Конечно, эти правила выглядят тривиальными. Но это не отменяет факта их возможности (между прочим заметим, что большинство правил логики по отдельности вообще тривиально).

§ 25. Другие кванторы

Кванторы $\forall$ и $\exists$ не являются единственно возможными, как уже отмечалось. Тот факт, что в логике грандиозную разработку получила теория кванторов $\forall$ и $\exists$, а прочие кванторы почти не рассматривались, имеет историческое оправдание: кванторы $\forall$ и $\exists$ фигурировали в первой в истории логики логической системе — в силлогистике Аристотеля; исчисление кванторов $\forall$ и $\exists$ в математической логике разрабатывалось в интересах математики, в которой эти кванторы играют существенную роль (квантор $\exists$, в частности, истолковывается как предикат существования), а прочие кванторы не употребляются (или почти не употребляются). Однако, поскольку практически употребляются и другие кванторы, отличные от $\forall$ и $\exists$, логика должна это обстоятельство так или иначе учитывать.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда роль кванторов выполняют знаки натуральных чисел. Ограничимся классическим случаем.

Дополнение к алфавиту: знаки натуральных чисел — кванторы. Дополнение к определению пропозициональной формулы: если N есть натуральное число, a есть субъектная или предикатная переменная, x есть пропозициональная формула, то $(Na)x$ есть пропозициональная формула.

Кванторы N употребляются в различном смысле (поскольку их употребление не обработано с логической точки зрения). Поясним это на примере. Возьмем высказывание «Пять студентов провалились на экзамене». Его можно понимать как «Пять, а не больше и не меньше», «По крайней мере пять», как «Пять, а значит, четыре, три, два, один», «Пять, а может быть, больше». Здесь различия аналогичны различиям видов дизъюнкций. Принимая те или иные аксиомы для операторов N, логика устанавливает их точный смысл.

Примем (с чисто иллюстративной целью) такие аксиомные схемы N:

1. $((N+1)a)x \vdash (Na)x$;
2. $\sim(Na)x \vdash \sim((N+1)a)x$;
3. $(Na)(x \wedge y) \vdash (Na)x \wedge (Na)y$;
4. $x \vee (Na)y \vdash (Na)(x \vee y)$;
5. $(Na)(Kb)x \vdash (Kb)(Na)x$,

где K есть любой из кванторов $\forall$, $\exists$, N;

6. $(Kb)(Na)x \vdash (Na)(Kb)x$;
7. $(Na)(K^1b^1)\ldots(K^nb^n)(Ka)x \vdash (K^1b^1)\ldots(K^nb^n)(Ka)x$,

где $n \geqslant 0$, а $K^1, \ldots, K^n, K$ суть любые кванторы $\forall$, $\exists$, N;

8. $(K^1b^1)\dots(K^nb^n)(Ka)x \vdash (Na)(K^1b^1)\dots(K^nb^n)(Ka)x.$

Если принята Q^2, то 7 и 8 заменяются на такие:

7. $(Na)x \vdash x;$

8. $x \vdash (Na)x,$

где a не входит свободно в x.

Квантор $\exists$ определяется аксиомными схемами:

9. $(\exists a)x \vdash (1a)x;$

10. $(1a)x \vdash (\exists a)x.$

Квантор 0 («ноль») определяется аксиомными схемами:

11. $(0a)x \vdash \sim(1a)x;$

12. $\sim(1a)x \vdash (0a)x.$

Если рассматривать квантор $\forall$ как особое число, которое всегда больше или равно N, то можно принять аксиомные схемы:

13. $\forall(a)x \vdash (Na)x;$

14. $(\forall a)x \wedge (Na)y \vdash (Na)(x \wedge y).$

§ 26. Парадоксы вырожденных кванторов и системы с зависимыми переменными

В классическом (и интуиционистском) исчислении предикатов теоремами являются формулы

$$(\exists a)x \supset x \quad \text{и} \quad x \supset (\forall a)x,$$

где a не входит свободно в x. Эти формулы позволяют отбрасывать вырожденные кванторы. Теоремами являются при этом также формулы, в которых в x имеются свободные вхождения переменных того же рода, что и a, но отличных от a. Например, таковы теоремы

$$(\exists a)P(b) \supset P(b) \quad \text{и} \quad P(b) \supset (\forall a)P(b).$$

В системе Q^2 (и Q^4) таким теоремам соответствуют теоремы

$$(\exists a)x \vdash x \quad \text{и} \quad x \vdash (\forall a)x,$$

в которых a не входит свободно в x. В частности, здесь теоремами являются формулы

$$(\exists a)P(b) \vdash P(b) \quad \text{и} \quad P(b) \vdash (\forall a)P(b).$$

Рассмотрим, однако, такого рода формулы внимательнее.

Такого рода формулы принимаются в качестве правил логического следования лишь постольку, поскольку молчаливо предполагается отсутствие логической связи между терминами из областей значения переменных (и это, заметим, кстати, при условии допущения совпадения областей значения индивидных переменных!). Поясним на примерах, о какого рода связи терминов здесь идет речь.

Возьмем высказывание α: «Все четные числа таковы, что число делится на два без остатка». В практике аналогичные высказывания употребляются довольно часто. Причем, высказывание α фактически употребляется как равнозначное высказыванию β: «Все четные числа таковы, что четное число делится на два без остатка». Но термины «число» и «четные числа» различны. Последний не входит свободно в высказывание γ: «Число делится на два без остатка». Согласно правилу логики

$$P(b) \supset (\forall a)P(b) \quad \text{или} \quad P(b) \vdash (\forall a)P(b),$$

из высказывания γ должно следовать высказывание α. А если принять, что из α следует β, то получим, что из γ следует β. А это не верно.

Таким образом, если ориентироваться на то, что для некоторых терминов правомерны утверждения вида $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$, т. е. ориентироваться на то (на языке логики), что для некоторых переменных a и b возможно, что $(\forall b)P(b) \vdash (\forall b)P(a)$ и $(\forall b)P(a) \vdash (\forall b)P(b)$, то на операции с вырожденными кванторами должны быть наложены ограничения. Мы это сделали, различив системы Q^1 и Q^2. В системе Q^1 формулы типа $P(b) \vdash (\forall a)P(b)$ и $(\exists a)P(b) \vdash P(b)$ недоказуемы, и указанные выше парадоксы не получаются.

Как поступить с такого рода случаями, когда между терминами имеет место логическая связь, влияющая на правомерность некоторых логических операций традиционной теории кванторов, мы покажем ниже.

Продолжим наш пример. Возьмем высказывание δ: «Все числа таковы, что четное число делится на два без остатка». И такие высказывания практически употребляются. Причем, высказывание δ воспринимается как равнозначное высказыванию β. Так что в некоторых случаях оказываются правомерными утверждения вроде

$$(\forall a)P(b) \to (\forall b)P(b) \quad \text{и} \quad (\forall b)P(b) \to (\forall a)P(b)$$

или правила

$$(\forall a)P(b) \wedge W \vdash (\forall b)P(b) \quad \text{и} \quad (\forall b)P(b) \wedge W \vdash (\forall a)P(b),$$

где W есть некоторое условие, фиксирующее логическую связь a и b. Аналогично — для квантора $\exists$. В дальнейшем мы такие правила сформулируем, расширив тем самым изложенную выше теорию кванторов (за счет введения новых операторов и установления связей терминов, а не за счет присоединения к рассмотренным системам новых аксиом на том же языке).

Интересно отметить, что в традиционной теории кванторов в нерасчлененном виде содержатся разнотипные правила логики, и использование ее в качестве теории вывода заставляет принимать явные или неявные допущения и оговорки, подчас исключающие друг друга. Так, если принимаются правила

$$(\forall a)P(a) \vdash P(b) \quad \text{и} \quad P(b) \vdash (\forall a)P(a),$$

то это предполагает допущение, согласно которому области значения a и b совпадают. При переводе на язык отношения терминов это означает, что термины, подставляемые на место a и b, находятся именно в такой логической зависимости, о которой говорилось выше. А если принимаются правила $P(b) \vdash (\forall a)P(b)$ и $(\exists a)P(b) \vdash P(b)$, то молчаливо предполагается, что между терминами, подставляемыми на место a и b, именно такой зависимости нет.

Зависимость терминов, о которой говорилось выше, может быть выражена с помощью предикатов включения терминов по значению $(\rightharpoonup)$ или включения индивидов в класс $(\in)$.

Системы Q^{2*} и Q^{4*}, учитывающие эту зависимость, получаются путем присоединения к алфавиту Q^2 и Q^4 предиката $\rightharpoonup$ (или $\in$), соответствующего расширения определения пропозициональной формулы и замены аксиомной схемы A^q7 на такую:

$$A^{q^*}7.\ (\exists a)x \wedge \sim(\rightharpoonup b^1) \wedge \ldots \wedge \sim(a \rightharpoonup b^n) \vdash (\forall a)x,$$

где a не входит свободно в x, а $b^1, \ldots, b^n$ $(n \geqslant 1)$ суть все переменные той же категории, что и a, имеющие свободные вхождения в x.

Рассмотренные системы могут быть расширены за счет принятия таких аксиомных схем:

$$A^q16.\ (\forall a)x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\forall a)y,$$
$$(\forall a)y \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\forall a)x,$$
$$(\exists a)x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\exists a)y,$$
$$(\exists a)y \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\exists a)x,$$

где y образуется из x путем замены b на a везде, где b свободно входит в x;

$$A^q17.\ (\forall a)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\forall b)x,$$
$$(\forall b)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\forall a)x,$$
$$(\exists a)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\exists b)x,$$
$$(\exists b)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\exists a)x,$$

где a не входит свободно в x.

В аксиомных схемах $A_7^{q^*}$, A^q16 и A^q17 выражения вида $\alpha \to \beta$ заменяются соответственно на $(\forall \alpha)(\alpha \in K\beta)$, если зависимость переменных фиксируется в языке логики классов (K — классообразующий оператор).

§ 27. Неявные кванторы

Предикаты обладают одной особенностью сравнительно с субъектами, которая заставляет несколько пересмотреть идею квантификации предикатов.

Возьмем высказывание «Тело a имеет цвет» и его отрицание «Тело a не имеет цвета». Известно, что цвета различаются по видам; так что можно говорить о некоторых цветах и всех цветах. Интуитивно кажется очевидным, что если верно высказывание «Некоторые цвета таковы, что тело a имеет цвет», то будет верно и высказывание «Тело a имеет цвет». Интуитивно также кажется очевидным, что если верно высказывание «Тело a не имеет цвет», то будет верно высказывание «Для всех цветов, тело a не имеет цвета» (т. е. «Тело a не имеет никакого цвета»).

Таким образом, для предикатов кажется возможным принять такие аксиомные схемы (буква a есть любая энка субъектных переменных):

$A^p1.\ (\exists P)P(a) \vdash P(a);$

$A^p2.\ \neg P(a) \vdash (\forall P) \neg P(a);$

$A^p3.\ ?P(a) \vdash (\forall P) \sim P(a).$

Из A^p2 и A^p3 следует:

$T1.\ \sim P(a) \vdash (\forall P) \sim P(a).$

В классическом случае вместо A^p2 и A^p3 достаточно принять $T1$.

Поскольку в теории кванторов доказуемы формулы $\forall (P)\alpha P(a) \vdash \alpha P(a)$, где α есть $\neg$, ? или $\sim$, и $P(a) \vdash (\exists P)P(a)$, то предикаты фактически всегда связаны неявным образом.

Но принятие $A^p1 - A^p3$ ведет к парадоксальным следствиям, если не менять изложенную выше теорию кванторов. В самом деле, $(\forall P)P(a) \vdash (\forall P)P(a)$ есть теорема. Поскольку $P(a) \dashv\vdash (\exists P)P(a)$ суть теоремы, по правилу замены эквивалентности получим $(\forall P)(\exists P)P(a) \vdash (\forall P)P(a)$, согласно A^q7 $(\exists P)P(a) \vdash (\forall P)(\exists P)P(a)$. Откуда согласно A^q2 и правилу транзитивности следования получим $P(a) \vdash (\forall P)P(a)$. А это — парадоксальная формула, что видно из следующего примера: если тело a имеет какой-то цвет, то отсюда не следует, что оно имеет любой цвет.

Нам представляется целесообразным такой выход из положения. Если для предикатных переменных принимаются аксиомные схемы $A^p1 - A^p3$, то в аксиомных схемах A^q7 для вырожденных кванторов

надо считать, что a есть только субъектная переменная (но не предикатная переменная).

§ 28. Нестандартная семантика для систем теории кванторов

Изложенная выше система семантических правил близка к традиционной семантике для теории кванторов, поскольку отмеченные переменные можно рассматривать по аналогии с индивидами из области значений переменных, только с допущением, что различные переменные имеют различные области значения, и с правилом для пустого множества индивидов. Ниже мы сформулируем систему семантических правил, существенно отличную от нее и содержащую лишь зависимости значений формул того типа, как указанные в § 5. Предикатным формулам, как и выше, значения истинности при этом будут приписываться аналогично пропозициональным переменным. Правила для операторов $\sim$, $\wedge$, $\vee$ те же, что и выше. Для бескванторных форм формул сохраняются те же определения тавтологии, противоречия, выполнимости, стандартных форм, что и в системах общей теории дедукции. Бескванторным формулам следования значения истинности приписываются так же, как в общей теории дедукции.

Примем следующие семантические правила для классического случая.

*SR*1. Если $(\forall a)x = v$, то $x = v$.

*SR*2. Если $x = nv$, то $(\forall a)x = nv$.

*SR*3. Если $(\forall a)x = nv$, и $(\forall a)$ не является вырожденным в $(\forall a)x$, то значение x не зависит от $(\forall a)x$.

*SR*4. Если $x = v$, и $(\forall a)$ не является вырожденным в $(\forall a)x$, то значение $(\forall a)x$ не зависит от x.

*SR*5. $(\exists a)x$ равнозначна $\sim(\forall a)\sim x$.

*SR*6. Если (Ka), где K есть $\forall$ или $\exists$, является вырожденным в $(Ka)x$, то x и $(Ka)x$ равнозначны.

Из *SR*1 – *SR*5 получаются такие производные правила:

$SR^1$5. Если $x = v$, то $(\exists a)x = v$.

$SR^2$5. Если $(\exists a)x = nv$, то $x = nv$.

$SR^3$5. Если $x = nv$, и $(\exists a)$ не является вырожденным в $(\exists a)x$, то значение $(\exists a)x$ не зависит от x.

$SR^4$5. Если $(\exists a)x = v$, и $(\exists a)$ не является вырожденным в $(\exists a)x$, то значение x не зависит от $(\exists a)x$.

Пусть $z^1, \ldots, z^n$ $(n \geqslant 1)$ суть все пропозициональные формулы, входящие в пропозициональную формулу x. Приписав x значение v или nv, можно установить всевозможные комбинации значений $z^1, \ldots, z^n$

при этом условии по правилам для $\sim$, $\vee$, $\wedge$, а также по правилам $SR1$, $SR3$, $SR6$, SR^25, SR^45. Например, если $(\forall a)(z^1 \vee z^2) = v$, то $(z^1 \vee z^2) = v$ по правилу $SR1$, а для z^1 и z^2 возможны три комбинации по правилу для дизъюнкции:

1) $z^1 = v$, $z^2 = v$;
2) $z^1 = v$, $z^2 = nv$;
3) $z^1 = nv$, $z^2 = v$.

Затем берем каждую из этих комбинация и в зависимости от строения z^1 и z^2 выясняем значение их составляющих при условии $z^1 = i$, $z^2 = j$. Например, пусть z^1 есть $z^3 \vee (\exists a)z^4$, а z^2 есть $(\forall b)z^3 \wedge z^5$; при $z^1 = v$ возможны такие комбинации значений ее составляющих:

1) $z^3 = v$, $(\exists a)z^4 = v$, $z^4 = v$;
2) $z^3 = v$, $(\exists a)z^4 = v$, $z^4 = nv$;
3) $z^3 = v$, $(\exists a)z^4 = nv$, $z^4 = nv$;
4) $z^3 = nv$, $(\exists a)z^4 = v$, $z^4 = v$;
5) $z^3 = nv$, $(\exists a)z^4 = v$, $z^4 = nv$;

при $z^2 = nv$ возможны такие комбинации значений ее составляющих:

1) $(\forall b)z^3 = nv$, $z^3 = v$, $z^5 = v$;
2) $(\forall b)z^3 = nv$, $z^3 = nv$, $z^5 = v$;
3) $(\forall b)z^3 = nv$, $z^3 = v$, $z^5 = nv$;
4) $(\forall b)z^3 = nv$, $z^3 = nv$, $z^5 = nv$;
5) $(\forall b)z^3 = v$, $z^3 = v$, $z^5 = nv$.

Аналогично находим комбинации значений составляющих z^1 и z^2 для первой и третьей комбинации. Аналогично продолжаем процесс для составляющих z^3, z^4 и 5 (вплоть до пропозициональных переменных и предикатных формул). В итоге устанавливаются всевозможные комбинации значений $z^1, z^2, \ldots, z^n$ при условии $x = v$ или $x = nv$. В частности, в нашем примере одна из таких комбинаций есть $(\forall a)(z^1 \vee z^2) = v$, $z^1 \vee z^2 = v$, $z^1 = v$, $z^2 = nv$, $z^3 = v$, $(\exists a)z^4 = v$, $z^4 = v$, $(\forall b)z^3 = nv$, $z^3 = nv$, $z^5 = v$, если процесс останавливается на z^3, z^4 и z^5.

*D*1. Возможны комбинации значений $z^1, \ldots, z^n$ при условии $x = j$ такие, что разным вхождениям одной и той же формулы z^i в x приписываются разные значений v и nv. Будем такие комбинации называть недопустимыми. Комбинации же, в которых всем вхождениям z^i в x приписывается одно и то же значение v или nv, причем это имеет силу для всех $z^1, \ldots, z^n$, будем называть допустимыми.

Например, если $(\forall a)(z \wedge \sim z) = v$, то $(z \wedge \sim z) = v$, $z = v$, $\sim z = v$ и $z = nv$. Таким образом, получили недопустимую комбинацию.

Причем, независимо от строения z, все комбинации значений формул, входящих в $(\forall a)(z \wedge \sim z)$, являются недопустимыми. Если $(\forall a)(P(a) \vee \sim P(a)) = v$, то возможны комбинации:

1) $P(a) \vee \sim P(a) = v$, $P(a) = v$, $\sim P(a) = nv$;
2) $P(a) \vee \sim P(a) = v$, $P(a) = nv$, $\sim P(a) = v$.

Обе они допустимы.

*SR*7. Если при условии $x = v$ все комбинации значений $z^1, \ldots, z^n$ являются недопустимыми, и в y не входят пропозициональные переменные и предикатные формулы, отсутствующие в x, то $(x \vdash y) = v$.

*SR*8. Если при условии $x = nv$ все комбинации значений $z^1, \ldots, z^n$ являются недопустимыми, и в x не входят пропозициональные переменные и предикатные формулы, отсутствующие в y, то $(y \vdash x) = v$.

Пусть (как и выше) $z^1, \ldots, z^n$ суть все пропозициональные формулы, входящие в x, а в $w^1, \ldots, w^m$ $(m \geqslant 1)$ суть все пропозициональные формулы, входящие в y. Ниже мы сформулируем правила для формул $x \vdash y$, в которых x и y таковы, что множество допустимых комбинаций значений $z^1, \ldots, z^n$ при условии $x = v$ и множество допустимых комбинаций значений $w^1, \ldots, w^m$ при условии $y = nv$ не являются пустыми.

*SR*9. Если для любой допустимой при условии $x = v$ комбинации значений $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ формул соответственно $z^1, \ldots, z^n$ из того, что $(z^1 = \alpha^1) \wedge \ldots \wedge (z^n = \alpha^n)$, по принятым правилам следует, что $z = v$ (что $z = nv$), и при этом a не входит свободно в x, то формуле $(\forall a)z$, входящей в y, приписывается значение v при условии $x = v$ (соответственно формуле $(\exists a)z$, входящей в y, приписывается значение nv при условии $x = v$. Если же по крайней мере для одной допустимой при условии $x = v$ комбинации значений $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ формул $z^1, \ldots, z^n$ из $(z^1 = \alpha^1) \wedge \ldots \wedge (z^n = \alpha^n)$ следует то, что $z = nv$ (что $z = v$), то формуле $(\forall a)z$, входящей в y, приписывается значение nv при условии $x = v$ (соответственно формуле $(\exists a)z$, входящей в y, приписывается значение v при условии $x = v$).

Вторую часть *SR*9 можно сформулировать еще таким образом: если по крайней мере для одной допустимой при условии $x = v$ комбинации значений $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ формул $z^1, \ldots, z^n$ возможно, что $z^1 = \alpha^1, \ldots, z^n = \alpha^n$ и $z = nv$ (и $z = v$), то $(\forall a)z = nv$ при условии $x = v$ (соответственно $(\exists a)z = v$ при условии $x = v$).

Обращаем внимание на следующее обстоятельство: результатом применения *SR*9 является не просто установление значения формул $(\forall a)z$ и $(\exists a)z$, а нахождение зависимостей такого вида $(x = v) \to ((\forall a)z = v)$, $(x = v) \to ((\exists a)z = nv)$ и т. п.

$SR10$. Если для любой допустимой при условии $y = nv$ комбинации значений $\beta^1, \ldots, \beta^m$ формул $w^1, \ldots, w^m$ из того, что $(w^1 = \beta^1) \wedge \ldots \wedge (w^m = \beta^m)$ следует то, что $z = v$ (что $z = nv$), и при этом a не входит свободно в y, то формуле $(\forall a)z$, входящей в x, приписывается значение v при условии $y = nv$ (формуле $(\exists a)z$, входящей в x, приписывается значение nv при условии $y = nv$). Если по крайней мере для одной допустимой при условии $y = nv$ комбинации значений $\beta^1, \ldots, \beta^m$ формул $w^1, \ldots, w^m$ возможно, что $w^1 = \beta^1, \ldots, w^m = \beta^m$ и $z = nv$ (и $z = v$), и при этом a не входит свободно в y, то формуле $(\forall a)z$, входящей в x, приписывается значение nv при условии $y = nv$ (соответственно формуле $(\exists a)z$, входящей в x, приписывается значение v при условии $y = nv$).

Опять-таки результатом применения $SR10$ является установление зависимостей $(y = nv) \to ((\forall a)z = v)$, $(y = nv) \to ((\exists a)z = nv)$ и т. д.

Если дана формула $x \vdash y$, то, приписав x значение v (приписав y значение nv), мы можем установить, по правилам для $\sim, \vee, \wedge$, а также по правилам $SR2, SR4, SR6, SR^1 5, SR^3 5, SR9$ и $SR10$, какие значение может принять y при условии $x = v$ (принять x при условии $y = nv$).

$SR11$. Если из допущения $x = v$ по принятым правилам следует, что $y = v$, а из допущения $y = nv$ следует, что $x = nv$, и при этом в y не входят пропозициональные переменные и предикатные формулы, отсутствующие в x, то $(x \vdash y) = v$. Если же из допущения $x = v$ не следует, что $y = v$, или из допущения $y = nv$ не следует, что $x = nv$, или в y входят пропозициональные переменные или предикатные формулы, отсутствующие в x, то $(x \vdash y) = nv$.

Правило $SR11$ можно также сформулировать так (пусть W есть утверждение «В y не входят пропозициональные переменные и предикатные формулы, отсутствующие в x»): если W, $(x = v) \to (y = v)$ и $(y = nv) \to (x = nv)$, то $(x \vdash y) = v$; если $\sim W$ или $\sim((x = v) \to (y = v))$ или $\sim((y = nv) \to (x = nv))$, то $(x \vdash y) = nv$.

$SR12$. Если $(x \vdash y) = v$, то имеет место один из трех случаев, указанных в антидецентах правил $SR9$, $SR10$, $SR11$, т. е.

а) либо все комбинации значений $z^1, \ldots, z^n$ при условии $x = v$ недопустимы;

б) либо все комбинации значений $w^1, \ldots, w^m$ при условии $y = nv$ недопустимы;

в) либо $(x = v) \to (y = v)$ и $(y = nv) \to (x = nv)$; причем во всех трех случаях (а), (б) и (в) имеет силу W.

Приведем несколько примеров. Возьмем формулы:

1) $(\forall a)x \vdash x$;
2) $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\exists a)y$;
3) $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\exists a)y$.

Пусть $(\forall a)x = v$ по правилу $SR1$ $x = v$. Значит, $((\forall a)x = v) \to (x = v)$. Пусть $x = nv$. По правилу $SR2$ $(\forall a)x = nv$. Значит, $(x = nv) \to ((\forall a)x = nv)$. По правилу $SR11$ $((\forall a)x \vdash x) = v$. Пусть $(\forall a)(x \vee y) = v$. По правилу $SR1$ $(x \vee y) = v$. Допустимые комбинации значений x и y:

1) $x = v$ и $y = v$;
2) $x = nv$ и $y = v$;
3) $x = v$ и $y = nv$.

Из второй комбинации не следует $x = v$. Значит, $(\forall a)x = nv$ при условии $(\forall a)(x \vee y) = v$ по правилу $SR9$. Но из первой и второй комбинаций не следует $y = nv$. Значит, $(\exists a)y = v$ при условии $(\forall a)(x \vee y) = v$ по правилу $SR9$. По правилу для дизъюнкции $((\forall a)x \vee (\exists a)y) = v$. Значит, $((\forall a)(x \vee y) = v) \to ((\forall a)x \vee (\exists a)y) = v$. Пусть $((\forall a)x \vee (\exists a)y) = nv$. По правилу для дизъюнкции $(\forall a)x = nv$ и $(\forall a)y = nv$. По правилам $SR3$ и $SR^2 5$ для x возможны случаи $x = v$ и $x = nv$, а $y = nv$. Так что для случая $x = nv$ и $y = nv$ получим, что $(x \vee y) = nv$. Значит, по правилу $SR10$ $(\forall a)(x \vee y) = nv$. Значит, $(((\forall a)x \vee (\exists a)y) = nv) \to ((\forall a)(x \vee y) = nv)$. Таким образом формула 2 имеет значение v по правилу $SR11$. Пусть, далее, $(\exists a)y = nv$. По правилу $SR^2 5$ $y = nv$. Но отсюда не следует как $(x \vee y) = v$, так и $(x \vee y) = nv$. Следовательно, значение $x \vee y$ не зависит от $(\exists a)y$, и формуле $(\forall a)(x \vee y)$ можно приписать значение v при условии $(\exists a)y = nv$. Значит формула 3 имеет значение nv.

$MT1$. Для любой формулы $x \vdash y$ можно установить, имеет она значение v или nv.

Теорема $MT1$ доказывается путем пересмотра всех случаев структур x и y и установления того, что для всех этих случаев есть правила нахождения значений вхождений в формулу при заданном значении формулы и нахождения значений формулы по заданным значениям вхождений в нее.

Для других систем теории кванторов правила $SR9 - SR12$ легко переформулировать, изменив лишь ограничение на соотношение пропозициональных переменных и предикатных формул, входящих в посылки и заключения формул следования.

$MT2$. Если $x \vdash y$ есть теорема в системе Q^1 для классического случая, то она имеет значение v.

Доказательство $MT2$. Легко убедиться в том, что все аксиомы имеют значение v. Для $A^q 1$: если $(\forall a)x = v$, то по $SR1$ $x = v$; если $x = nv$, то по $SR2$ $(\forall a)x = nv$. Для $A^q 2$: если $x = v$, то по $SR^1 5$ $(\exists a)x = v$; если $(\exists a)x = nv$, то по $SR^2 5$ $x = nv$. Для $A^q 3$. Пусть кванторы не вырождены и правила $SR9, SR10$ неприменимы. Пусть

$((\forall a)x \wedge (\exists a)y) = v$. В таком случае $(\forall a)x = v$, $x = v$, $(\exists a)y = v$, $y = v$ или $y = nv$. Поскольку возможно $y = v$, то возможно $(x \wedge y) = v$, и по правилу $SR9$ $(\exists a)(x \wedge y) = v$. Пусть $(\exists a)(x \wedge y) = nv$. В таком случае $(x \wedge y) = nv$, возможно $x = nv$, $(\forall a)x = nv$ и $((\forall a)x \wedge (\exists a)y) = nv$. По правилу $SR11$ данная формула имеет значение v.

Если применимы $SR9$ и $SR10$, то она имеет значение v для любых x. Для A^q4: если $(\forall a)(x \vee y) = v$, то $(x \vee y) = v$, возможно $y = v$, значит, $(\exists a)y = v$ и по правилу для дизъюнкции $((\forall a)x \vee (\exists a)y) = v$; если $((\forall a)x \vee (\exists a)y) = nv$, то $(\forall a)x = nv$, $(\exists a)y = nv$, $y = nv$, возможно $x = nv$, возможно $(x \vee y) = nv$ и значит, $(\forall a)(x \vee y) = nv$. Для A^q5 и A^q6 формулы $(\forall a)x$ и $\sim(\exists a) \sim x$ равнозначны согласно $SR5$, а для A^q7 и A^q8 посылка и заключение равнозначны согласно $SR6$. Правила вывода свойство формул следования иметь значение v сохраняют. Пусть $(x \vdash y)v$.

Если имеет место то, что сказано в антецеденте $SR9$ или $SR10$, то это же самое будет иметь силу для $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$ и $(\exists a)x \vdash (\exists a)y$. Если же $(x \vdash y) = v$ в силу $SR11$, то справедливо такое рассуждение: если $(\forall a)x = v$, то $x = v$, по условию $y = v$; по правилу $SR7$ $(\forall a)y = v$; если $(\forall a)y = nv$, возможно $y = nv$, по условию $x = nv$ и по правилу $SR8$ $(\forall a)x = nv$. Значит, $((\forall a)x \vdash (\forall a)y) = v$.

Аналогично для R^q2: если $(\exists a)x = v$, то возможно $x = v$, по условию $y = v$ и в силу $SR10$ $(\exists a)y = v$; если $(\exists a)y = nv$, то $y = nv$, по условию $x = nv$ и по правилу $SR9$ $(\exists a)x = nv$.

Для неклассического случая правило $SR5$ исключается, правила SR^15–SR^45 принимаются как основные и, кроме того, принимаются следующие правила:

SR^113. Если $(\forall a)x = v$, то $(\neg \forall a)x = nv$.

SR^213. Если $(\neg \forall a)x = v$, то $(\forall a)x = nv$.

SR^114. Если $(\forall a)x = nv$ и $(\forall a)$ не является вырожденным в $(\forall a)x$, то значение $(\neg \forall a)x$ не зависит от $(\forall a)x$.

SR^214. Если $(\neg \forall a)x = nv$ и $(\forall a)$ не является вырожденным в $(\forall a)x$, то значение $(\forall a)x$ не зависит от $(\neg \forall a)x$.

SR^115. $(?\forall a)x$ равнозначна $\sim(\forall a)x \wedge \sim(\neg \forall a)x$.

SR^215. $(\exists a)x$ равнозначна $(\neg \forall a) \sim x$.

SR^315. $(\neg \exists a)x$ равнозначна $(\forall a) \sim x$.

SR^415. $(?\exists a)x$ равнозначна $(?\forall a) \sim x$.

Производные правила:

SR^116. $(\neg \forall a)x$ равнозначна $(\exists a) \sim x$.

SR^216. $(?\forall a)x$ равнозначна $\sim(\forall a)x \wedge \sim(\exists a) \sim x$.

$SR^3$16. $(?\exists a)x$ равнозначна $\sim(\exists a)x \wedge (\neg\exists a)x$.

$SR^4$16. $(?\exists a)x$ равнозначна $\sim(\forall a)\sim x \wedge \sim(\exists a)x$.

Правила для предикатных формул в неклассическом случае:

$SR^1$17. Если $Q(b^1,\ldots,b^n) = v$ (где $n \geqslant 1$), то $\neg Q(b^1,\ldots,b^n) = nv$.

$SR^2$17. Если $\neg Q(b^1,\ldots,b^n) = v$, то $Q(b^1,\ldots,b^n) = nv$.

$SR^1$18. Если $Q(b^1,\ldots,b^n) = nv$, то значение $\neg Q(b^1,\ldots,b^n)$ не зависит от $Q(b^1,\ldots,b^n)$.

$SR^2$18. Если $\neg Q(b^1,\ldots,b^n) = nv$, то значение $Q(b_1,\ldots,b^n)$ не зависит от $\neg Q(b_1,\ldots,b^n)$.

SR19. $?Q(b^1,\ldots,b^n)$ равнозначна $\sim Q(b^1,\ldots,b^n)\wedge\sim\neg Q(b^1,\ldots,b^n)$.

MT3. Если $x \vdash y$ есть теорема в системе Q^i для неклассического случая, то $(x \vdash y) = v$.

D1. Тавтологии:

1) пропозициональная формула $x \wedge y$ есть тавтология, если и только если x и y обе суть тавтологии;

2) формула $x \vee y$ есть тавтология, если и только если $\sim x \vdash y$ есть теорема Q^i;

3) $(\forall a)x$ есть тавтология, если и только если x есть тавтология;

4) $(\exists a)x$ есть тавтология, если и только если x есть тавтология;

5) в остальных случаях x есть тавтология, если и только если $x \dashv\vdash y$ суть теоремы Q^i, а y есть формула одного из указанных в 1–4 видов;

6) формула есть тавтология только в случаях 1–5.

Формулы, указанные в пункте 5, суть формулы вида

$$\sim z,\quad (\neg\forall a)z,\quad (\neg\exists a)z,\quad (?\forall a)z \text{ и } (?\exists a)z.$$

A в Q^i имеются теоремы, позволяющие элиминировать операторы $\neg$ и ?, а оператор $\sim$ переместить за кванторы и за скобки в конъюнктивные и дизъюнктивные члены.

Главным в установлении того, является пропозициональная формула тавтологией или нет, является вопрос о формулах вида $x \vee y$, который сводится к вопросу, является $\sim x \vdash y$ теоремой или нет. Например,

$$\sim(\forall a)(x \vee y) \vee ((\forall a)x \vee (\exists a)y)$$

есть тавтология, поскольку

$$\sim\sim(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\exists a)y$$

есть теорема (в силу A^q1 и правила двойного отрицания).

D2. Пропозициональная формула x есть противоречие, если и только если $\sim x$ есть тавтология.

*D*3. Пропозициональная формула выполнима, если и только если она не есть противоречие.

Правило для формул вырожденного следования:

*SR*20. $(\vdash x) = v$, если и только если x есть тавтология.

*MT*3. Если $\vdash x$ есть теорема Q^{id}, то $(\vdash x) = v$.

Эта семантическая система интересна тем, что в ней не предполагаются никакие области значения переменных в традиционном смысле и не предполагаются никакие соотношения областей значения различных переменных. Области значения переменных при этом суть логические объекты — термины и высказывания языка. И вопрос о них есть вопрос внелогический в том смысле, что это вопрос приложений логических теорий, но не их вида (не затрагивающий классов логических правил).

§ 29. Проблема полноты

Проблема полноты для систем теории кванторов может рассматриваться в узком смысле (т. е. лишь для определенного вида формул следования, имеющих значение v) и в широком смысле (для любых формул следования, имеющих значение v). В этом параграфе мы рассмотрим полноту систем теории кванторов в узком смысле. Ограничимся лишь системами для классического случая. Для систем неклассического случая проблема решается аналогично, меняется только число и вид рассматриваемых базисных формул и объем используемых семантических правил. Последующее изложение будет иметь силу как для косвенной семантической интерпретации (§ 19), так и для нетрадиционной семантики, изложенной в предшествующем параграфе.

*D*1. Формулу следования будем называть базисной, если и только если она есть одна из формул такого вида:

1) $\alpha(Ka)\beta x \vdash \gamma x$;

2) $\gamma x \vdash \alpha(Ka)\beta x$;

3) $\alpha(K^1a)\beta x \vdash \gamma(K^2a)\delta x$;

4) $\alpha^1(K^1a)(\alpha^2 x \wedge \alpha^3 y) \vdash \beta^1(K^2a)\beta^2 x \wedge \beta^3(K^3a)\beta^4 y$;

5) $\alpha^1(K^1a)(\alpha^2 x \vee \alpha^3 y) \vdash \beta^1(K^2a)\beta^2 x \vee \beta^3(K^3a)\beta^4 y$;

6) $\beta^1(K^2a)\beta^2 x \wedge \beta^3(K^2a)\beta^4 y \vdash \alpha^1(K^1a)(\alpha^2 x \wedge \alpha^3 y)$;

7) $\beta^1(K^2a)\beta^3 x \vee \beta^3(K^3a)\beta^4 y \vdash \alpha^1(K^1a)(\alpha^2 x \vee \alpha^3 y)$;

8) $\alpha^1(K^1a)\beta^1(K^2b)\gamma^1 x \vdash \alpha^2(K^3b)\beta^2(K^4a)\gamma^2 x$,

где K, K^1–K^4 суть кванторы $\forall$ и $\exists$ в любой комбинации, а буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ означают наличие или отсутствие отрицания (точно так же в любых комбинациях).

$MT1$. Если базисная формула имеет значение v, то она есть теорема Q^i.

Теорема $MT1$ доказывается путем пересмотра всевозможных базисных формул. Благодаря правилам для отрицания операторов $\sim, \vee, \wedge, \forall, \exists$ число случаев, которые нужно рассмотреть, сокращается (сводится к числу случаев (1–8) без отрицаний перед кванторами). Кроме того, в этих системах имеются правила, позволяющие отбрасывать вырожденные кванторы. Наконец, в силу утверждения, согласно которому формула $x^* \vdash y^*$ имеет значение nv при том условии, что ее бескванторная форма имеет значение nv, достаточно рассмотреть лишь случаи (1–8), в которых перед x и y нет отрицания.

В результате пересмотра базисных формул получается, что следующие базисные формулы имеют значение v:

1) $(\forall a)x \vdash x$;

2) $x \vdash (\exists a)x$;

3) $(\forall a)x \vdash (\forall a)x$,
$(\forall a)x \vdash (\exists a)x$,
$(\exists a)x \vdash (\exists a)x$;

4) $(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\forall a)x \wedge (\forall a)y$,
$(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\forall a)x \wedge (\exists a)y$,
$(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\forall a)y$,
$(\forall a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\exists a)y$,
$(\exists a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\exists a)y$;

5) $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\exists a)y$,
$(\forall a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\forall a)y$,
$(\forall a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y$,
$(\exists a)(x \vee y) \vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y$;

6) $(\forall a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \wedge y)$,
$(\forall a)x \wedge (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$,
$(\exists a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$,
$(\forall a)x \wedge (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$;

7) $(\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \vee y)$,
$(\forall a)x \vee (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$,

$(\exists a)x \vee (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$,
$(\exists a)x \vee (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$,
$(\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\exists a)(x \vee y)$;

8) $(\forall a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\forall a)x$,
$(\forall a)(\forall b)x \vdash (\exists b)(\forall a)x$,
$(\forall a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\exists a)x$,
$(\forall a)(\forall b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$,
$(\forall a)(\exists b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$,
$(\exists a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\exists a)x$,
$(\exists a)(\forall b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$,
$(\exists a)(\exists b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$.

Все эти формулы суть теоремы (см. § 13). Теоремами будут также базисные формулы, полученных из них путем применения правила замены эквивалентности, правил отрицания операторов и правил для вырожденных кванторов. Все прочие базисные формулы имеют значение nv.

$MT2$. Если $x \vdash y$ имеет значение v, $x^* \vdash y^*$ есть ее бескванторная форма, x^* и y^* тождественны или одна из них может быть получена из другой заменой вхождений вида $\sim\sim z$ на z, то $x \vdash y$ есть теорема.

Теорема $MT2$ доказывается путем пересмотра всех возможных соотношений структур x и y. Для x возможны только такие случаи, когда x есть:

1) пропозициональная переменная или предикатная формула;
2) $(\forall a)u$;
3) $(\exists a)u$;
4) $u^1 \vee u^2$;
5) $u^1 \wedge u^2$;
6) $\sim u$.

Для y возможны только такие случаи, когда y есть:

1) пропозициональная переменная или предикатная формула;
2) $(\forall b)w$;
3) $(\exists b)w$;
4) $w^1 \vee w^2$;
5) $w^1 \wedge w^2$;
6) $\sim w$.

Затем рассматриваются всевозможные комбинации $(i) \vdash (k)$ перечисленных случаев. Шестой случай сводится к остальным.

Для (1) $\vdash$ (1) теорема верна в силу S^s. Случаи (1) $\vdash$ (2) и (1) $\vdash$ (3) сводятся к базисным. Случаи (1) $\vdash$ (4) и (1) $\vdash$ (5) исключаются. Случай (2) $\vdash$ (1) сводится к базисному. Для случая (2) $\vdash$ (2) имеет силу следующее: если a и b тождественны и (2) $\vdash$ (2) имеет значение v, то $u \vdash w$ имеет значение v; если $u \vdash w$ есть теорема, то (2) $\vdash$ (2) — теорема в силу R^q1; если a и b различны и (2) $\vdash$ (2) имеет значение v, то $u \vdash (\forall b)w$ имеет значение v; а если $u \vdash (\forall b)w$ есть теорема, то в силу теоремы $(\forall a)u \vdash u$ теоремой будет (2) $\vdash$ (2).

Для случая (2) $\vdash$ (3) рассуждение аналогично: если a и b одинаковы, то $u \vdash w$ имеет значение v; если $u \vdash w$ есть теорема, то по правилу R^q2 $(\exists a)u \vdash (\exists a)w$ — теорема, а согласно теореме $(\forall a)u \vdash (\exists a)u$ теоремой является (2) $\vdash$ (3); если a и b различны и (2) $\vdash$ (3) имеет значение v, то $(\exists a)u \vdash w$ имеет значение v; если она есть теорема, то согласно теоремам $(\forall a)u \vdash (\exists a)u$ и $w \vdash (\exists b)w$ будет теоремой (2) $\vdash$ (3). Случай (2) $\vdash$ (4) сводится к базисному. Случай (2) $\vdash$ (5) тоже сводится к базисному.

Случай (3) $\vdash$ (1) сводится к базисному. Для случая (3) $\vdash$ (2) имеет место следующее: если a и b одинаковы, то (3) $\vdash$ (2) может иметь значение v лишь при том условии, что $(\exists a)$ или $(\forall b)$ является вырожденным; в таком случае $u \vdash (\forall b)w$ или $(\exists a)u \vdash w$ имеют значение v; а если какая-то из них есть теорема, то теоремой будет (3) $\vdash$ (2) в силу R^q1 или R^q2 и аксиом для вырожденных кванторов; если a и b различны, то $u \vdash (\forall b)w$ имеет значение v и $(\exists a)$ является вырожденным в $(\exists a)(\forall b)w$ (т. е. a не входит свободно в w или теоремами являются $w \dashv\vdash k \vee \sim k$); а если она есть теорема и указанное ограничение выполнено, то в силу R^q2 и аксиом для вырожденных кванторов теоремой будет (3) $\vdash$ (2).

Для (3) $\vdash$ (3) имеет силу следующее: если a и b одинаковы, то $u \vdash w$ имеет значение v, а если она есть теорема, то в силу R^q2 (3) $\vdash$ (3) есть теорема; если a и b различны, то $(\exists a)u \vdash w$ имеет значение v, а если она есть теорема, то в силу теоремы $w \vdash (\exists b)w$ теоремой является (3) $\vdash$ (3). Случаи (3) $\vdash$ (4) и (3) $\vdash$ (5) сводятся в базисным. Случаи (4) $\vdash$ (1), (4) $\vdash$ (5), (5) $\vdash$ (1) и (5) $\vdash$ (4) исключаются. Случаи (4) $\vdash$ (2), (4) $\vdash$ (3), (4) $\vdash$ (4), (5) $\vdash$ (2), (5) $\vdash$ (3), (5) $\vdash$ (5) сводятся к базисным.

Системы теории кванторов для классического случая являются полными в некотором узком (или интуитивном) смысле, поскольку верна теорема $MT2$.

§ 30. Полнота сильной теории кванторов для классического случая

В этом параграфе мы изложим доказательство полноты систем сильной теории кванторов для классического случая в более широком

(чем в § 27) смысле, а именно — в смысле такого утверждения: если $(x \vdash y) = v$, то $x \vdash y$ есть теорема. Напоминаем, что упомянутые системы в качестве общей теории дедукции предполагают S^s, неопределенности в них исключены, а отрицания не различаются. С некоторыми модификациями, учитывающими соотношения пропозициональных переменных и предикатных формул в посылках и заключениях формул следования, а также (затем) наличие неопределенностей и двух отрицаний, излагаемое доказательство может быть распространено на прочие системы теории кванторов. Значения формул следования будем устанавливать по семантическим правилам, изложенным в § 19 (т. е. косвенной семантической интерпретации).

Из принятых выше правил получаются такие производные правила, которые будут полезны в дальнейшем.

*SR*4. Если $(x \vdash y) = v$ и $x = v$, то $y = v$. Если $(x \vdash y) = v$ и $y = nv$, то $x = nv$.

*SR*5. Если при некотором допущении W имеет место $(x = v) \to (y = v)$, то $W \to ((x \vdash y) = v)$. Если $W \to ((y = nv) \to (x = nv))$, то $W \to ((x \vdash y) = v)$.

Примем также следующие дополнительные определения.

*D*8. Значение пропозициональной формулы x зависит от субъектной или предикатной переменной a, если и только если a входит свободно в x и для различных отмеченных переменных ia и ka формулы x^i и x^k не равнозначны (x^i и x^k суть результат замены свободных вхождений a в x соответственно на ia и ka).

*MT*1. Если x есть тавтология, а y есть ее бесквантерная форма, то $x \vdash y$ и $y \vdash x$ суть теоремы.

Доказательство *MT*1. Если x есть тавтология, то $(y \vdash x) = v$, и согласно *MT*2 из § 27 формула $y \vdash x$ есть теорема. Если x есть тавтология, то y есть тавтология, поскольку y есть одна из интерпретационных форм x. Значит, $(x \vdash y) = v$, и согласно *MT*2 из § 27 формула $x \vdash y$ есть теорема.

*MT*2. Если x есть противоречие, а y есть ее бесквантерная форма, то $x \vdash y$ и $y \vdash x$ суть теоремы.

Доказательство *MT*2. Если x есть противоречие, то $\sim x$ есть тавтология. Согласно *MT*1 формулы $\sim x \vdash \sim y$ и $\sim y \vdash \sim x$ суть теоремы. Значит, теоремы суть $\sim\sim x \vdash \sim\sim y$, $\sim\sim y \vdash \sim\sim x$, $x \vdash y$ и $y \vdash x$.

*MT*3. Если $x \vdash y$ имеет значение v, то ее бесквантерная форма $x^* \vdash y^*$ есть теорема.

Доказательство $MT3$. Если $(x \vdash y) = v$, то $(x^* \vdash y^*) = v$, поскольку $x^* \vdash y^*$ есть одна из интерпретационных форм формулы $x \vdash y$ (при $n = 0$). А в силу полноты S^s формула $x^* \vdash y^*$ есть теорема.

$MT4$. Если $(x \vdash y) = v$, то $(x \vdash x \wedge y) = v$. И если $(x \vdash x \wedge y) = v$, то $(x \vdash y) = v$.

Доказательство $MT4$. Пусть $(x \vdash y) = v$. Если x есть противоречие, то $(x \vdash x \wedge y) = v$. Если y есть тавтология, то x равнозначна $x \wedge y$. Если $x = v$, то $(x \wedge y) = v$. Если $(x \wedge y) = nv$, то $x = nv$. Значит, $(x \vdash x \wedge y) = v$. Если $(x \vdash y) = v$ и $x = v$, то $y = v$ и $(x \wedge y) = v$. Если $(x \wedge y) = nv$, то $x = nv$ или $y = nv$. Если $y = nv$, то $x = nv$. Если $x = nv$, то $x = nv$. Значит, $(x \vdash x \wedge y) = v$. И в обратную сторону. Пусть $(x \vdash x \wedge y) = v$. Если x противоречие, то $(x \vdash y) = v$. Если $x \wedge y$ есть тавтология, то y есть тавтология, и $(x \vdash y) = v$. Если $(x \vdash x \wedge y) = v$ и $x = v$, то $(x \wedge y) = v$ и $y = v$. Если $y = nv$, то $(x \wedge y) = nv$ и $x = nv$. Таким образом, из допущения $x = v$ следует $y = v$, а из допущения $y = nv$ следует $x = nv$. Значит, $(x \vdash y) = v$.

Возьмем произвольную формулу $x \vdash y$, имеющую значение v. Возможны три случая:

1) x есть противоречие;
2) y есть тавтология;
3) x не есть противоречие, а y не есть тавтология.

Рассмотрим первый случай. Если x есть противоречие, то $x \vdash x^*$ и $x^* \vdash x$ суть теоремы (согласно $MT2$), где x^* есть бескванторная форма x. Если $(x \vdash y) = v$, то в силу $MT3$ будет теоремой формула $x^* \vdash y^*$, являющаяся бескванторной формой $x \vdash y$. Очевидно, y^* есть бескванторная форма y. Значит, $x \vdash y^*$ есть теорема. Формула y может быть:

1) пропозициональной переменной или предикатной формулой α;
2) $\sim \alpha$;
3) $(\exists a)B$;
4) $(\forall a)B$;
5) $A \vee B$;
6) $A \wedge B$;
7) $\sim A$.

В первом и втором случае y совпадает с y^*. Случай 7 сводится к 1–6. Для случая 3: $(x \vdash B) = v$, поскольку x есть противоречие. Пусть $x \vdash B$ есть теорема; $B \vdash (\exists a)B$ есть теорема; значит, $x \vdash (\exists a)B$ есть теорема. Для случая 4: $(x \vdash B) = v$, поскольку x есть противоречие; пусть $x \vdash B$ есть теорема; по правилу R^q1 теоремой будет $(\forall a)x \vdash (\forall a)B$; но $(x \vdash (\forall a)x) = v$, и согласно $MT2$ из § 27 формула $x \vdash (\forall a)x$ есть теорема; значит, $x \vdash (\forall a)B$ есть теорема. Для случая 5: если $(x \vdash A \vee B) = v$, то $(x \vdash A) = v$ и $(x \vdash B) = v$; пусть $x \vdash A$

и $x \vdash B$ суть теоремы, тогда $x \vdash A \vee B$ есть теорема. Для случая 6: если $(x \vdash A \wedge B) = v$, то $(x \vdash A) = v$ и $(x \vdash B) = v$; если $x \vdash A$ и $x \vdash B$ суть теоремы, то $x \vdash A \wedge B$ есть теорема.

Рассмотрим, далее, случай, когда y есть тавтология. Если y есть тавтология, то согласно $MT1$, $y \dashv\vdash y^*$ суть теоремы, где y^* есть бескванторная форма y. Если $(x \vdash y) = v$, то согласно $MT3$ бескванторная форма $x^* \vdash y^*$ формулы $x \vdash y$ есть теорема. Значит, $x^* \vdash y$ есть теорема. Пропозициональная формула x есть формула одного из видов:

1) пропозициональная переменная или предикатная формула α;
2) $\sim\alpha$;
3) $(\exists a)B$;
4) $(\forall a)B$;
5) $A \vee B$;
6) $A \wedge B$;
7) $\sim A$.

Случай 7 сводится к 1–6. В случаях 1 и 2 x совпадает с x^*. Для случая 3: если $((\exists a)B \vdash y) = v$, то $(B \vdash y) = v$, поскольку y есть тавтология; пусть $B \vdash y$ есть теорема; по правилу R^q2 $(\exists a)B \vdash (\exists a)y$ есть теорема; если y есть тавтология, то $((\exists a)y \vdash y) = v$; по $MT2$ из § 27 формула $(\exists a)y \vdash y$ есть теорема; значит, $(\exists a)B \vdash y$ есть теорема. Для случая 4: $(B \vdash y) = v$, поскольку y есть тавтология; пусть $B \vdash y$ есть теорема; $(\forall a)B \vdash B$ есть теорема; значит, $(\forall a)B \vdash y$ есть теорема. Для случая 5: $(A \vdash y) = v$ и $(B \vdash y) = v$, поскольку y есть тавтология; пусть $A \vdash y$ и $B \vdash y$ суть теоремы; тогда $A \vee B \vdash y$ есть теорема. Для случая 6 аналогично.

Остается, таким образом, рассмотреть такие формулы $x \vdash y$, в которых посылка не есть противоречие, а заключение не есть тавтология. Здесь возможны два подслучая:

1) $(x \vdash y) = v$ и $(y \vdash x) = v$;
2) $(x \vdash y) = v$, но $(y \vdash x) = nv$.

Благодаря $MT4$ второй подслучай сводится к первому. Если $(x \vdash y) = v$ и $(y \vdash x) = nv$, то вместо $x \vdash y$ можно взять формулу $x \vdash x \wedge y$:

1) $(x \vdash y) = v$, если и только если $(x \vdash x \wedge y) = v$;
2) $x \vdash y$ есть теорема, если и только если $x \vdash x \wedge y$ есть теорема.

Так что в дальнейшем мы будем рассматривать только такие $x \vdash y$, для которых верно: $(x \vdash y) = v$ и $(y \vdash x) = v$. В таких формулах, очевидно, x и y равнозначны.

$MT5$. Если $x \vdash y$ есть теорема и при этом x и y равнозначны, то $\sim x \vdash \sim y$ есть теорема.

Доказательство $MT5$. Для каждой аксиомы $x \vdash y$, в которой посылка и заключение равнозначны, доказуема формула $\sim x \vdash \sim y$ (это

доказывается пересмотром всех аксиомных схем такого рода). Остаются аксиомы вида:

1. $A \wedge B \vdash A$;
2. $(\forall a)A \wedge (\exists a)B \vdash (\exists a)(A \wedge B)$;
3. $(\forall a)(A \vee B) \vdash (\forall a)A \vee (\exists a)B$,

среди которых имеются аксиомы $x \vdash y$ с неравнозначными x и y. Нам нужно выбрать лишь такие $x \vdash y$, в которых x и y равнозначны и, следовательно, $(y \vdash x) = v$. Возьмем (1). Если A и $A \wedge B$ равнозначны, то A и B равнозначны и $(A \vdash A \wedge B) = v$. Значит, $(A \vdash B) = v$. Если $A \vdash B$ есть теорема, то $\sim B \vdash \sim A$ есть теорема (поскольку A и B равнозначны, в A не входят пропозициональные переменные и предикатные формулы, отсутствующие в B). Формула $\sim A \vdash \sim A$ есть теорема. Значит, $\sim A \vee \sim B \vdash \sim A$ есть теорема и $\sim (A \wedge B) \vdash \sim A$ есть теорема.

Возьмем (2). Если $(\forall a)A \wedge (\exists a)B$ и $(\exists a)(A \wedge B)$ равнозначны, то $((\exists a)(A \wedge B) \vdash (\forall a)A \wedge (\exists a)B) = v$, $((\exists a)(A \wedge B) \vdash (\forall a)A) = v$ и $((\exists a)(A \wedge B) \vdash (\exists a)B) = v$. Пусть $(\exists a)(A \wedge B) \vdash (\forall a)A$ и $(\exists a)(A \wedge B) \vdash (\exists a)B$ суть теоремы. В таком случае теоремами являются следующие формулы:

$$(\exists a)(A \wedge B) \vdash (\forall a)A \wedge (B \vee \sim B),$$

$$(\exists a)(A \wedge B) \vdash (\exists a)B \wedge (A \vee \sim A),$$

$$\sim (\forall a)A \vee \sim (B \vee \sim B) \vdash \sim (\exists a)(A \wedge B),$$

$$\sim (\exists a)B \vee \sim (A \vee \sim A) \vdash \sim (\exists a)(A \wedge B),$$

$$\sim (\forall a)A \vee \sim (B \vee \sim B) \vee \sim (\exists a)B \vee \sim (A \vee \sim A) \vdash \sim (\exists a)(A \wedge B),$$

$$\sim (\forall a)A \vee \sim (\exists a)B \vdash \sim (\exists a)(A \wedge B),$$

$$\sim ((\forall a)A \wedge \sim (\exists a)B) \vdash \sim (\exists a)(A \wedge B).$$

Аналогично получим для (3): если $(\forall a)(A \vee B)$ и $(\forall a)A \vee (\exists a)B$ равнозначны, то $\sim (\forall a)(A \vee B) \vdash \sim ((\forall a)A \vee (\exists a)B)$ есть теорема.

Путем пересмотра правил вывода получим, что они сохраняют рассматриваемое свойство теорем.

Пусть $x \vdash y$ есть произвольная формула, такая, что $(x \vdash y) = v$ и $(y \vdash x) = v$. Докажем, что $x \vdash y$ есть теорема. Доказательство проведем индукцией по числу вхождений логических операторов в x и в y.

Формула x есть формула одного из следующих видов:

1) пропозициональная переменная или предикатная формула α;
2) $\sim \alpha$;
3) $(\exists a)B$;
4) $(\forall a)B$;

5) $B \vee C$;
6) $B \wedge C$;
7) $\sim B$.

Формула y есть формула одного из следующих видов:

1) пропозициональная переменная или предикатная формула β;
2) $\sim \beta$;
3) $(\exists b)D$;
4) $(\forall b)D$;
5) $D \vee E$;
6) $D \wedge E$;
7) $\sim D$.

Случай $x \vdash \beta$. Если x есть α, то $(x \vdash \beta) = v$ лишь тогда, когда α есть β. Но $\beta \vdash \beta$ есть теорема. Если x есть $\sim \alpha$, то $(x \vdash \beta) = nv$ при любом α. Пусть x есть $(\exists a)B$. Если $B = v$, то $(\exists a)B = v$. И если $((\exists a)B \vdash \beta) = v$, то $\beta = v$. Если $\beta = nv$, то при $((\exists a)B \vdash \beta) = v$ будет $(\exists a)B = nv$ и $B = nv$. Значит, $(B \vdash \beta) = v$.

Пусть $B \vdash \beta$ есть теорема. Но $((\exists a)B \vdash \beta) = v$ лишь при том условии, что a не входит свободно в B. Если a входит свободно в B, то $(B^i \vdash \beta^i) = v$ (i указывает на то, что свободные a заменены на ia). Приписав β^i значение nv, мы должны приписать B^i значение nv. Но если число отмеченных переменных для a более единицы, то формуле B^k, где $i \neq k$, мы можем приписать значение v, поскольку в нее не входит β^i. Получим, что $(B^i \vee B^k) = v$, а $\beta^i = nv$, т. е. $((\exists a)B \vdash \beta) = nv$, что противоречит условию.

Пусть x есть $(\forall a)B$. Если $((\forall a)B \vdash B) = v$, то $(\beta \vdash (\forall a)B) = v$. Если B зависит от a, то $(\beta \vdash (\forall a)B) = nv$. Значит, B не зависит от a. Значит, $(B \vdash \beta) = v$. Если $B \vdash \beta$ есть теорема, то $(\forall a)B \vdash \beta$ — теорема. Пусть x есть $B \vee C$. Если $B = v$, то $B \vee C = v$ и $\beta = v$. Если $C = v$, то $B \vee C = v$ и $\beta = v$. Если $\beta = nv$, то $B \vee C = nv$, $B = nv$ и $C = nv$. Значит, если $(B \vee C \vdash \beta) = v$, то $(B \vdash \beta) = v$ и $(C \vdash \beta) = v$. Если $B \vdash \beta$ и $C \vdash \beta$ суть теоремы, то $B \vee C \vdash \beta$ есть теорема.

Пусть x есть $B \wedge C$. Если β есть пропозициональная переменная, то $(B^* \wedge C^* \vdash \beta) = v$, где $B^* \wedge C^*$ есть бескванторная форма $B \wedge C$, и в силу полноты S^s $B^* \wedge C^* \vdash \beta$ есть теорема. Поскольку $B \wedge C \vdash B^* \wedge C^*$ есть теорема (все кванторы, если они входят в $B \wedge C$, вырождены), то $B \wedge C \vdash \beta$ есть теорема. Пусть β есть $Q(a^1, \ldots, a^n)$, где $n \geqslant 1$.

Пусть $B' \wedge C' \vdash iQ(i^1a^1, \ldots, i^na^n)$ есть произвольная интерпретационная форма $B \wedge C \vdash \beta$. Поскольку в B и C не входят никакие пропозициональные переменные и не входят никакие предикатные формулы, кроме β, то имеет силу следующее: если $B' = v$, то $iQ(i^1a^1, \ldots, i^na^n) = v$; если $C' = v$, то $iQ(i^1a^1, \ldots, i^na^n) = v$; если

$iQ(i^1a^1, \ldots, i^na^n) = nv$, то по крайней мере одна из B' и C' имеет значение nv. Значит, по крайней мере одна из $B \vdash \beta$ и $C \vdash \beta$ имеет значение v. Если одна из них есть теорема, то $B \wedge C \vdash \beta$ есть теорема, поскольку $B \wedge C \vdash B$ и $B \wedge C \vdash C$ суть теоремы.

Пусть x есть $\sim B$. Благодаря правилу снятия двойного отрицания и правилам для отрицания конъюнкции, дизъюнкции и кванторов этот случай сводится к предшествующим.

Случай $x \vdash \sim\beta$ аналогичен случаю $x \vdash \beta$.

Случай $x \vdash (\forall b)D$. Пусть значение x не зависит от b. Если $x = v$, то $(\forall b)D = v$; если $D = nv$, то $(\forall b)D = nv$ и $x = nv$. Значит, $(x \vdash D) = v$. Пусть $x \vdash D$ есть теорема. По правилу R^q1 $(\forall b)x \vdash (\forall b)D$ есть теорема. Но $(x \vdash (\forall b)x) = v$, и по $MT2$ из § 27 $x \vdash (\forall b)x$ есть теорема.

Значит, $x \vdash (\forall b)D$ есть теорема.

Пусть значение x зависит от b. Возможны два случая:

1) значение D не зависит от b;
2) значение D зависит от b.

В первом случае $(x \vdash D) = v$ и $(D \vdash (\forall b)D) = v$. Если $x \vdash D$ есть теорема, то $x \vdash (\forall b)D$ есть теорема, поскольку $D \vdash (\forall b)D$ есть теорема (в силу $MT2$ из § 27). Во втором случае, приписав интерпретационной форме x^{*1} формулы x значение v, мы можем какому-либо из членов конъюнкции интерпретационной формы $D^{*1} \wedge \ldots \wedge D^{*n}$ формулы $(\forall b)D$ приписать значение nv. Значит, в этом случае $(x \vdash (\forall b)D) = nv$.

Для случая $x \vdash (\exists b)D$ имеет силу следующее. Если $(x \vdash (\exists b)D) = v$ и $((\exists b)D \vdash x) = v$, то x и $(\exists b)D$ равнозначны. Значит, $(\sim x \vdash \sim(\exists b)D) = v$, $(\sim x \vdash (\forall b) \sim D) = v$ и $\sim x \vdash (\forall b) \sim D$ есть теорема (предыдущий случай). Согласно $MT5$ теоремой будет $\sim\sim x \vdash \sim(\forall b)\sim D$, и, следовательно, $x \vdash (\exists b)D$.

Случай $x \vdash D \wedge E$. Если $(x \vdash D \wedge E) = v$ и $x = v$, то $D \wedge E = v$, $D = v$ и $E = v$. Если $D = nv$, то $D \wedge E = nv$ и $x = nv$. Если $E = nv$, то $D \wedge E = nv$ и $x = nv$. Значит, $(x \vdash D) = v$ и $(x \vdash E) = v$. Пусть $x \vdash D$ и $x \vdash E$ суть теоремы. Значит, $x \vdash D \wedge E$ есть теорема.

Случай $x \vdash D \vee E$ сводится к предшествующему благодаря $MT5$. Если $(x \vdash D \vee E) = v$ и $(D \vee E \vdash x) = v$, то $(\sim x \vdash \sim (D \vee E)) = v$, $(\sim x \vdash \sim D \wedge \sim E) = v$, $(\sim x \vdash \sim D) = v$ и $(\sim x \vdash \sim E) = v$. Пусть $\sim x \vdash \sim D$ и $\sim x \vdash \sim E$ суть теоремы. Значит, $\sim x \vdash \sim D \wedge \sim E$, $\sim\sim x \vdash \sim(\sim D \wedge \sim E)$ и $x \vdash D \vee E$ суть теоремы.

Наконец, случай $x \vdash \sim D$ сводится к рассмотренным ранее благодаря правилу снятия двойного отрицания и правилам для отрицания конъюнкции, дизъюнкции и кванторов.

Таким образом, имеет силу утверждение:

$MT6$. Если $(x \vdash y) = v$, то $x \vdash y$ есть теорема.

§ 31. Полнота сильной теории кванторов для классического случая относительно нестандартной семантики

Теорема $MT6$ предшествующего параграфа верна и относительно системы семантических правил, изложенных в § 28.

Примем еще такие семантические правила:

$SR13$. Всегда $x = nv$ (или невозможно $x = v$), если и только если все комбинации значений пропозициональных формул, входящих в x, являются недопустимыми при условии $x = v$.

$SR14$. Всегда $x = v$ (или невозможно $x = nv$), если и только если все комбинации значений пропозициональных формул, входящих в x, являются недопустимыми при условии $x = nv$.

Имеют силу, очевидно, производные правила:

1) если $(x \vdash y) = v$ и $x = v$, то $y = v$; если $(x \vdash y) = v$ и $y = nv$, то $x = nv$;

2) если $(x \vdash y) = v$ и $(y \vdash x) = v$, то x и y равнозначны; и наоборот.

Пусть x^* есть бескванторная форма x, $A^1, \ldots, A^n$ суть все вхождения пропозициональных формул в x, $A_1, \ldots, A_m$ суть все вхождения пропозициональных формул в x^*, $B^1, \ldots, B^k$ суть все пропозициональные переменные и предикатные формулы, входящие в x (и, очевидно, в x^*).

$MT1$. Если $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ есть недопустимая комбинация значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = i$ (i есть v или nv), то при этом по крайней мере одной B^j приписываются оба значения v и nv.

Теорема $MT1$ доказывается индукцией по числу вхождений логических операторов в A^j, которой в комбинации $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ приписываются оба значения v и nv (т. е. одному вхождению A^j в x приписывается v, а другому — nv).

$MT2$. Все комбинации значений $B^1, \ldots, B^k$ при условии $x^* = i$ включаются в множество комбинаций значений $B^1 \ldots, B^k$ при условии $x = i$ (доказывается индукцией по числу вхождений логических операторов в x).

Из $MT1$ и $MT2$ следует:

$MT3$. Если все комбинации значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = i$ недопустимы, то все комбинации значений $A_1, \ldots, A_m$ при условии $x^* = i$ также недопустимы.

*MT*4. Если все комбинации значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = v$ недопустимы, то x^* есть противоречие. Если все комбинации значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = nv$ недопустимы, то x^* есть тавтология.

Доказательство *MT*4. Если все комбинации значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = v$ недопустимы, то согласно *MT*3 все комбинации значений $A_1, \ldots, A_m$ при условии $x^* = v$ недопустимы. Приведем x^* к дизъюнктивной нормальной форме $y^1 \vee \ldots \vee y^r$. Если y^i $(i = 1, \ldots, r)$ приписано значение v, то в y^i должны входить B^j и $\sim B^j$ (иначе число комбинаций значений не будет недопустимой). И так для всех $y^1, \ldots, y^r$. Значит, $y^1 \vee \ldots \vee y^r$ (и x^*) есть противоречие. Если все комбинации значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = nv$ недопустимы, то согласно *MT*3 все комбинации значений $A_1, \ldots, A_m$ при условии $x^* = nv$ недопустимы. Приведем x^* к конъюнктивной нормальной форме $y^1 \wedge \ldots \wedge y^r$. Если y^i приписано значений $= nv$, то в y^i должны входить B^j и $\sim B^j$. И так для всех $y^1, \ldots, y^r$. Значит, $y^1 \wedge \ldots \wedge y^r$ (и x^*) есть тавтология.

*MT*5. Если все комбинации значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = i$ недопустимы, то $x^* \vdash x$ и $x \vdash x^*$ суть теоремы.

Доказательство *MT*5. Если все комбинации значений $A^1, \ldots, A^n$ при условии $x = i$ недопустимы, то согласно *MT*3 все комбинации значений $A_1, \ldots, A_m$ при условии $x^* = i$ недопустимы. И согласно *SR*9 и *SR*10 $(x \vdash x^*) = v$ и $(x^* \vdash x) = v$. Согласно *MT*2 из § 27 $x \vdash x^*$ и $x^* \vdash x$ суть теоремы.

*MT*6. Если $(x \vdash y) = v$, то $(x \vdash x \wedge y) = v$. Если $(x \vdash x \wedge y) = v$, то $(x \vdash y) = v$.

Доказательство *MT*6. Если все комбинации значений пропозициональных формул, входящих в x (входящих в y), при условии $x = v$ (при условии $y = nv$) недопустимы, то $(x \vdash y) = v$ и $(x \vdash x \wedge y) = v$. Если же возможно $x = v$ и возможно $y = nv$, то имеет место следующее: если $x = v$, то $y = v$, $x \wedge y = v$; если $x \wedge y = nv$, то либо $x = nv$, либо $y = nv$ и опять-таки $x = nv$. И наоборот, если $x = v$, то $x \wedge y = v$ и $y = v$; если $y = nv$, то $x \wedge y = nv$ и $x = nv$.

*MT*7. Если $x \vdash y$ есть теорема и при этом x и y равнозначны, то $\sim x \vdash \sim y$ есть теорема (доказательство аналогично доказательству *MT*5 из § 31).

Благодаря *MT*6 достаточно (как и в § 31) рассмотреть далее формулы $x \vdash y$ такие, что $(x \vdash y) = v$ и $(y \vdash x) = v$.

Возможны три случая:

1) все комбинации значений пропозициональных формул, входящих в x, при условии $x = v$ недопустимы;

2) все комбинации значений пропозициональных формул, входящих в y, при условии $y = nv$, недопустимы;

3) возможно $x = v$ и $y = nv$.

В случаях 1 и 2 $(x \vdash x^*) = v$, $(x^* \vdash y^*) = v$ и $(y^* \vdash y) = v$, и согласно $MT2$ из § 27 и в силу полноты S^5 формулы $x \vdash x^*$, $x^* \vdash y^*$, $y^* \vdash y$ суть теоремы. Значит, $x \vdash y$ есть теорема.

В случае 3 необходимо рассмотреть всевозможные комбинации, когда x есть $\alpha, \sim\alpha, (\exists a)A, (\forall a)A, A \vee B, A \wedge B, \sim A$, а y есть $\beta, \sim\beta, (\exists b)C, (\forall b)C, C \vee D, C \wedge D, \sim C$.

Рассмотрим формулы $x \vdash \beta$ и $x \vdash \sim\beta$. Если x есть α, то $(x \vdash \beta) = v$ лишь тогда, когда α есть β, а $\beta \vdash \beta$ есть теорема. Если x есть $\sim\alpha$, то $(x \vdash \beta) = nv$ для любых α. Если x есть α, то $(x \vdash \sim\beta) = nv$ для любых α. Если x есть $\sim\alpha$, то $(x \vdash \sim\beta) = v$ лишь при том условии, что α есть β. А $\sim\beta \vdash \sim\beta$ есть теорема. Если $((\exists a)A \vdash \beta) = v$, то $(A \vdash \beta) = v$. Пусть $A \vdash \beta$ есть теорема. Если A и $(\exists a)A$ равнозначны, то $((\exists a)A \vdash A) = v$ и $(\exists a)A \vdash A$ есть теорема согласно $MT2$ из § 27. Значит, $(\exists a)A \vdash \beta$ есть теорема. Если $(\exists a)A$ и A неравнозначны, то возможно $(\exists a)A = v$ и при этом $A = nv$, возможно $A = nv$ и при этом $\beta = v$ (поскольку $(\exists a)A$ и β равнозначны). Значит, возможно приписать β значение v, а A значение nv. Но тогда $(\exists a)A$ можно приписать значение nv. Получим, что $(\beta \vdash (\exists a)A) = nv$, что противоречит условию. Аналогичное рассуждение имеет силу для $(\exists a)A \vdash \sim\beta$.

Пусть x есть $(\forall a)A$. Если $((\forall a)A \vdash \beta = v$, то $(\beta \vdash (\forall a)A) = v$, $(\sim(\forall a)A \vdash \sim\beta) = v$ и $((\exists a) \sim A \vdash \sim\beta) = v$. Если $(\exists a) \sim A \vdash \sim\beta$ есть теорема, то $\sim(\exists a) \sim A \vdash \sim\sim\beta$ — теорема и $(\forall a)A \vdash \beta$ — теорема. Если $((\forall a)A \vdash \sim\beta) = v$, то $((\exists a) \sim A \vdash \beta) = v$. Если $(\exists a) \sim A \vdash \beta$ есть теорема, то $(\forall a)A \vdash \sim\beta$ — теорема. Пусть x есть $A \vee B$. Если $(A \vee B) \vdash \beta) = v$, то $(A \vdash \beta) = v$ и $(B \vdash \beta) = v$. Если $A \vdash \beta$ и $B \vdash \beta$ суть теоремы, то $A \vee B \vdash \beta$ — теорема. Аналогично для $A \vee B \vdash \sim\beta$. Пусть x есть $A \wedge B$. Если $(A \wedge B \vdash \beta) = v$, то $(\sim A \vee \sim B \vdash \sim\beta) = v$ и $A \wedge B \vdash \beta$ — теоремы. Если $(A \wedge B \vdash \sim\beta) = v$, то $(\sim A \vee \sim B \vdash \beta) = v$ и $A \wedge B \vdash \sim\beta$ — теорема. Случаи $\sim A \vdash \beta$ и $\sim A \vdash \sim\beta$ сводятся к ранее рассмотренным по правилам снятия двойного отрицания и для отрицания конъюнкции, дизъюнкции и кванторов.

Случай $x \vdash \sim C$ сводится к прочим по правилам двойного отрицания и отрицания конъюнкции, дизъюнкции и кванторов. Случай $x \vdash C \vee D$ сводится к случаю $\sim x \vdash \sim C \wedge \sim D$ (согласно $MT7$). Случай $x \vdash (\exists b)C$ сводится к случаю $\sim x \vdash (\forall b) \sim C$ (согласно $MT7$). Для

случая $x \vdash C \wedge D$ имеет силу следующее: если $(x \vdash C \wedge D) = v$, то $(x \vdash C) = v$ и $(x \vdash D) = v$; если $x \vdash C$ и $x \vdash D$ суть теоремы, то $x \vdash C \wedge D$ есть теорема. Таким образом, остается лишь случай $x \vdash (\forall b)C$.

Если $(x \vdash (\forall b)C) = v$, то $(x \vdash C) = v$. Если $x \vdash C$ теорема, то $(\forall b)x \vdash (\forall b)C$ — теорема. Если x и $(\forall b)x$ равнозначны, то $x \vdash (\forall b)x$ — теорема и $x \vdash (\forall b)C$ — теорема. Если x и $(\forall b)x$ неравнозначны, то возможно $(\forall b)x = nv$ и при этом $x = v$. Если $((\forall bC) \vdash x) = v$, то $((\forall b)(\forall b)C \vdash (\forall b)x) = v$. Приписав $(\forall b)x$ значение nv, мы можем приписать x значение v. А если $x = v$, то $(\forall b)C = v$ и $(\forall b)(\forall b)C = v$, то возможно $((\forall b)(\forall b)C \vdash (\forall b)x) = nv$, что противоречит условию.

Таким образом, имеем:

*MT*8. Если $(x \vdash y) = v$, то $x \vdash y$ — теорема.

§ 32. Разрешимость сильной теории кванторов для классического случая

Выше (в § 28) уже говорилось, что в нестандартной семантике для любой $x \vdash y$ можно установить, имеет она значение v или nv. Справедливость этого утверждения видна из того, что если задано значение x (значение y), то по правилам для $\sim, \vee, \wedge, \forall$ и $\exists$ можно установить всевозможные комбинации значений пропозициональных формул, входящих в x (входящих в y), а если задана комбинация значений всех пропозициональных переменных и предикатных формул, входящих в x (входящих в y), то можно установить значение x (значение y). Доказательство можно строго провести индукцией по числу вхождений логических операторов в x (и в y).

И в силу полноты рассматриваемых систем, для любой $x \vdash y$ теории кванторов для классического случая можно установить, является она теоремой или нет.

§ 33. О других системах

Вопрос о полноте и разрешимости наших систем для формул типа $\vdash x$ решается в зависимости от решения соответствующего вопроса для формул типа $x \vdash y$.

Путем некоторых модификаций и дополнений изложенного в предшествующих параграфах можно найти доказательство полноты и разрешимости других систем для классического и неклассического случаев.

Квантификация предикатов сводится к квантификации субъектов путем такого расширения систем теории кванторов. Дополнения к алфавиту:

1) j — особый оператор, превращающий предикатные переменные в индивидно-предикатные переменные;

2) Π — постоянный предикат «является признаком».

Определение индивидно-предикатной переменной: выражение ja есть индивидно-предикатная переменная, если и только если a есть предикатная переменная.

Дополнения к определению пропозициональной формулы:

$$\alpha\Pi(jQ, a^1, \ldots, a^n), \quad (\alpha\forall jQ)x \quad \text{и} \quad (\alpha\exists jQ)x$$

суть пропозициональные формулы, если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть индивидные переменные, Q есть предикатная переменная, x есть пропозициональная формула, а α означает наличие $\neg$ или ? или их отсутствие.

Дополнительные аксиомные схемы:

1. $Q(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash \Pi(jQ, a^1, \ldots, a^n)$;
2. $\neg Q(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash \neg \Pi(jQ, a^1, \ldots, a^n)$;
3. $(\forall Q)x \dashv\vdash (\forall jQ)x$;
4. $(\neg\forall Q)x \dashv\vdash (\neg\forall jQ)x$.

Теперь выражения вида $(\alpha\forall Q)x$, $(\alpha\exists Q)x$, $\alpha Q(a^1, \ldots, a^n)$ заменяются в формулах на выражения соответственно $(\alpha\forall jQ)x$, $(\alpha\exists jQ)x$, $\alpha\Pi(jQ, a^1, \ldots, a^n)$. Проблема полноты и разрешимости систем теории кванторов с квантифицируемыми предикатными переменными сводится теперь к соответствующей проблеме систем теории кванторов без квантифицируемых предикатных переменных, поскольку кванторы $(\alpha\forall jQ)$ и $(\alpha\exists jQ)$ рассматриваются как кванторы с индивидными переменными.

В нашей теории доказуемы формулы $\vdash (\forall b)(b \in Ka) \rightarrow ((\forall a)x \supset y)$, где y образуется из x путем замены всех свободных вхождений a в x на b. В классическом исчислении предикатов доказуема не любая формула вида $(\forall a)x \supset y$, поскольку в некоторых случаях здесь требуется, чтобы в x не было вхождений вида $(\forall b)z$ и $(\exists b)z$, содержащих свободные вхождения a. Так что если рассматривать в качестве экспликации гипотезы совпадения областей значения индивидных переменных принятие аксиом вида $\vdash (a \in Kb)$, то в полученной системе будут доказуемы некоторые формулы $\vdash ((\forall a)x \supset y)$, такие, что формулы $(\forall a)x \supset y$ недоказуемы в классическом исчислении предикатов.

Раздел VII

ЛОГИКА КЛАССОВ (МНОЖЕСТВ)

Выражение «класс» и «множество» мы употребляем как синонимы. Мы различаем логическую теорию классов, или логическую часть теории классов (или, точнее, теорию любых классов), и математическую теорию классов, или математическую часть теории классов (или, точнее, теорию математических классов). Задача логической теории классов — установление правил оперирования терминами классов и высказываниями с этими терминами.

О понятии класса (множества) существует гигантская логико-философская литература. Мы здесь излагаем теорию классов, существенно отличающуюся от известных нам концепций и теорий. Она в основном была сформулирована автором в работах «Основы логической теории научных знаний» (М., 1967), «Комплексная логика» (М., 1970) и «Логика науки» (М., 1971). Здесь в нее внесены существенные исправления, дополнения и разъяснения. При этом используются некоторые символы и положения теории терминов, имеющейся в упомянутых работах, и предполагаются общая теория дедукции, теория кванторов и условных высказываний.

§ 1. Классообразующий оператор

Прежде всего мы различаем термин «класс», который мы рассмотрим ниже, и классообразующий оператор «класс». Будем во втором случае употреблять символ K. С помощью классообразующего оператора K образуются первичные термины классов по такому правилу:

$R1$. Если a есть термин-субъект, то Ka есть термин-субъект. Причем Ka есть индивидуальный термин.

$D1$. Термины типа Ka будем называть первичными терминами классов, а обозначаемые ими предметы — первичными классами.

$D2$. Индивиды из области значения a суть элементы Ka.

$T1$. Первичные классы суть индивиды.

Образовать класс индивидов (в случае первичных классов) — значит буквально сказать «Класс a», где a есть какой-то данный субъект, или «Класс индивидов из области значения a», т. е. построить определенный термин. Например, образовать класс богов — значит сказать «класс богов», образовать класс чисел — сказать «класс чисел» и т. п., где слово «класс» есть особый терминообразующий оператор. Свойства этого оператора определяются в логике. И если известно

значение термина a и известны свойства оператора K, то известно значение термина Ka.

Для существования первичного класса достаточно его образовать. Так, построив выражение «класс богов», мы образовали класс богов, и этот класс стал существовать как особый предмет, независимо от того, как решается вопрос о существовании элементов этого класса — богов. Существование класса не зависит от существования его элементов, и наоборот.

Термины типа Ka всегда суть индивидуальные термины. И если будет как-то построен другой термин b, обозначающий тот же класс, то $Ka \rightleftharpoons b$.

Из сказанного следует одно важное различие классов предметов и энок (пар, троек и т. д.) предметов. Например, тройка целых положительных чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего, не существует. Но класс такие троек будет существовать, стоит нам построить выражение «класс троек целых положительных чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего». И этот класс может исследоваться как особый предмет. В частности, о нем можно сказать, что элементы этого класса не существуют.

Подчеркиваем, K есть оператор, а не термин. В случае Ka термин a обязательно должен быть субъектом. Если нужно образовать класс признаков b, то из данного термина-предиката надо образовать субъект «признак b» и затем построить термин «Класс признаков b».

Термины первичных классов образуют основу, на которой строится вся терминология, обозначающая классы. Это — исходный пункт логического анализа всей проблематики, относящейся к теории классов.

§ 2. Включение индивидов в класс

Будем рассматривать сначала первичные классы с целью установить свойства оператора K.

Высказывания о том, что индивид, обозначаемый термином a (из области значения a), есть элемент Kb, будем для краткости записывать символами вида

$$\in (a, Kb).$$

Эти высказывания читаются так же, как «a включается в класс b» или как «a включается в b». Эти высказывания суть высказывания с двухместным предикатом и двумя субъектами (или бинарным субъектом): субъекты-термины a и Kb; предикат — выражение «первый есть элемент второго» (или «первый есть индивид из области значений субъекта, фигурирующего во втором», или «первый включается во второй»).

В дальнейшем будет удобнее вместо записи $\in (a, Kb)$ употреблять более привычную и близкую к естественному языку запись.

$$a \in Kb,$$

совершенно равноценную первой. Одновременно с установлением правил для K логика устанавливает правила для предиката $\in$ (предиката включения индивидов в класс).

Обращаем внимание на то, что хотя $a \in Kb$ и есть высказывание «Индивид, обозначаемый термином a, включается в класс b», из этого не следует, что термин a непременно должен быть индивидуальным. Например, в высказывании «целое число включается в класс чисел» термин «целое число» не является индивидуальным. Из этого следует лишь то, что высказывание $a \in Kb$ может быть истинно в отношении одних индивидов из области значения a и неистинно в отношении других и что термин a может быть связан квантором, т. е. имеют смысл высказывания вида

$$(\forall a)(a \in Kb),\ (\exists a)(a \in Kb),\ (\exists a) \sim (a \in Kb)$$

и т. д. Связывание кванторами термина Kb излишне, поскольку он есть индивидуальный термин, для которого имеют силу теоремы логики

$$(a \in Kb) \dashv\vdash (\forall Kb)(a \in Kb);$$
$$(a \in Kb) \dashv\vdash (\exists Kb)(a \in Kb).$$

Поскольку образование первичных классов всецело зависит от построения их терминов, то неопределенности для их существования исключаются, т. е.

$$\neg E(Ka) \dashv\vdash \sim E(Ka).$$

Неопределенности исключаются также и для предиката $\in$, т. е.

$$\neg \in (a, Kb) \dashv\vdash \sim \in (a, Kb).$$

Это исключение неопределенностей не есть следствие каких-то других посылок. Оно само есть некоторая интуитивно ясная предпосылка построения логики классов: образование классов — продукт нашей воли, и естественно строить их так, чтобы для любого индивида a можно было установить, является он элементом Kb или нет.

§ 3. Включение индивидов в класс и включение терминов по значению

Между включением индивидов в класс и включением терминов по значению имеет место связь, устанавливаемая утверждением

$$(a \rightarrow b) \dashv\vdash (\forall a)(a \in Kb).$$

Из этого, однако, никак не следует, что какой-то из предикатов $\rightharpoonup$ и $\in$ полностью сводится к другому и может быть в принципе элиминирован из языка.

Во-первых, в пользу нашего тезиса говорит тот факт, что только для первичных классов возможна замена $\in$ на $\rightharpoonup$. Как увидим ниже, возможны термины классов, не содержащие оператор K, и для них замена высказываний с $\in$ на высказывание с $\rightharpoonup$ не всегда оказывается возможной.

Во-вторых, в логике играет роль не только отношение терминов, операторов и высказываний, описываемое посредством знака логического следования, но и последовательность анализа логических объектов. А с этой точки зрения предикат $\rightharpoonup$ целесообразнее ввести в рассмотрение на более ранних этапах науки логики, чем $\in$. Впрочем, здесь (надо полагать) возможны вариации.

§ 4. Термин «класс»

Слово «класс» употребляется не только как терминообразующий оператор K, но и как термин-субъект. Будем во втором случае для краткости использовать символ kl.

Термин kl вводится в употребление по правилу обобщения терминов конкретных классов, в том числе — терминов первичных классов. Причем введение какого-либо термина путем обобщения данных терминов вовсе не предполагает того, что обобщаемые термины всегда строго установлены и заданы все исчерпывающим образом. Кроме того, здесь можно использовать переменные. Так что термин kl можно ввести таким определением:

$D1$. Если a есть термин класса, то $a \rightharpoonup kl$. Если a не есть термин класса, то $\sim(a \rightharpoonup kl)$.

Имея термин kl, можно образовывать другие термины классов по общим правилам построения терминологии, в частности — $kl \downarrow x$ («класс такой, что x»), $kl \downarrow P$ («класс, имеющий признак P») и т. п. Эти термины не обязательно индивидуальны. Так, термины «класс, который содержит два элемента», «класс, все элементы которого не существуют» и т. п. являются общими. Частным случаем таких классов являются классы, образуемые путем перечисления их элементов. Например, «класс, элементами которого являются предметы a и b», «класс, элементами которого являются пропозициональные исчисления и пропозициональные алгебры» и т. п.

§ 5. Производные классы

Термин kl и содержащие его термины типа $kl \downarrow x$ и $kl \downarrow P$ — частный случай производных терминов классов. Перечислить их строго и исчерпывающим образом нельзя, так как к ним относятся все правила образования терминов вообще, а ограничить раз и навсегда возможности на этот счет вряд ли правомерно.

Обычно рассматривают производные классы, термины которых образуются с помощью классообразующих операторов $\cup$ (объединения классов), $\cap$ (пересечения классов) и $^-$ (дополнения классов). Правила построения терминов имеют следующий вид.

$R1$. Если A и B суть термины классов, то $(A \cap B)$ и $(A \cup B)$ — термины классов.

$R2$. Если A есть термин класса, то $\overline{A}$ — термин класса.

Для производных классов вопрос об их существовании решается иначе, чем для первичных классов. Причем он решается различно в зависимости от строения термина. Приведем несколько утверждений, определяющих существование производных классов:

$E(kl \downarrow x) \dashv\vdash x$,

$E(A \cup B) \dashv\vdash E(A) \wedge E(B)$,

$E(A \cap B) \dashv\vdash E(A) \wedge E(B)$,

$E(\overline{A}) \dashv\vdash E(A)$.

§ 6. Включение класса в класс

Высказывание о том, что класс A включается в класс B, имеет строение $\subset (A, B)$, где $\subset$ есть предикат включения класса в класс. Будем вместо $\subset (A, B)$ употреблять более наглядный и общепринятый, совершенно равноценный ему символ

$A \subset B$.

$D1$. $A \subset B$, если и только если для любого a $(a \in A) \to (a \in B)$ (т. е. если все элементы A суть элементы B).

$D2$. $Ka \subset Kb$, если и только если $(\forall a)(a \in Kb)$.

§ 7. Классы классов

Если a есть термин класса, то Ka есть термин класса, элементы которого суть классы. В частности, таковы термины Kkl («класс классов»), «класс пустых классов», «класс непустых классов» и т. п.

Обращаем внимание на то, что термин «класс, элементами которого являются классы» есть термин $kl \downarrow x$, где x есть «элементы класса суть классы» (или «класс включает в качестве своих элементов классы»). Этот термин по структуре отличен от Kkl, хотя в литературном исполнении похож на него, и практически они не различаются. Различие этих терминов, однако, существенно, в частности — с точки зрения существования соответствующих классов. Класс, обозначаемый термином Kkl, существует по построению, а вопрос о существовании класса $kl \downarrow x$ зависит от x.

Рассмотрим несколько подробнее некоторые термины классов классов, с которыми связаны известные в логике затруднения, а именно — «класс всех классов» и «класс всех нормальных классов».

Для термина Kkl имеет силу такое рассуждение:

$$\vdash kl \rightharpoonup kl,$$

$$\vdash (\forall kl)(kl \in Kkl),$$

$$\vdash (a \rightharpoonup kl) \wedge (\forall kl)(kl \in Kkl) \rightarrow (a \in Kkl),$$

$$\vdash (a \rightharpoonup kl) \rightarrow (a \in Kkl),$$

т. е. если a есть термин классов, то $a \in Kkl$. Таким образом, термин Kkl («класс классов», где первое слово «класс» есть оператор класса, а второе — термин) имеет то значение, какое интуитивно приписывают выражению «класс всех классов».

Если рассматривать термин «класс всех классов» как сокращение для «класс, в который включаются все классы», т. е. как

$$kl \downarrow ((\forall kl)(kl \in kl)),$$

то в силу правил теории терминов

$$\vdash kl \downarrow ((\forall kl)(kl \in kl)) \rightleftharpoons kl,$$

так что термин «класс всех классов» оказывается равнозначным термину «класс». Однако, для такого термина можно получить утверждение «если a есть термин класса, то $a \in Kkl$» (из определения $D1$ термина kl в § 4), но не утверждение «Если a есть термин класса, то $a \in kl$». Последнее может быть принято как определение термина kl (вместо $D1$). Но в таком случае вступает в силу ограничение, согласно которому термин a не может быть термином kl и любым термином, содержащим kl или определяемым через него. В частности, утверждение $kl \in kl$ будет недоказуемо.

Чтобы выражение $kl \downarrow ((\forall kl)(kl \in kl)$ могло быть термином класса всех классов, нужно чтобы оно приняло вид

$$kl^1 \downarrow ((\forall kl^2)(kl^2 \in kl^1)),$$

где kl^1 и kl^2 различаются как «один класс» («какой-то класс») и «другой класс» или суть особые переменные, области значения которых — термины классов. Но из этого термина никак не выведешь то, что любой класс есть элемент такого класса, т. е. что

$$(\forall kl^3)(kl^3 \in kl^1 \downarrow ((\forall kl^2)(kl^2 \in kl^1))).$$

Чтобы такое утверждение получить, его надо так или иначе принять в самом определении термина «класс всех классов». Подчеркиваем, именно в определении, ибо в самом этом выражении желаемое свойство термина фактически не заключено. Это можно, в частности, сделать так: пусть выражение «класс всех классов» будет термином класса таким, что для любого термина a, являющегося термином класса, будет верно ($a \in$ «класс всех классов»); причем пусть термин a может содержать термин «класс всех классов» или определяться через него.

Таким образом, построив термин типа $a \downarrow x$, где в x термину a приписываются некоторые свойства P, мы отсюда еще не получим в качестве следствия $P(a)$. Если такое следствие требуется, то определение должно быть подобрано соответствующим образом.

Возможно также такое определение: класс b будем называть классом всех классов, если и только если для любого класса a (для любого термина a) имеет силу $a \in b$. При этом в качестве следствия получим, что любой класс a есть элемент класса всех классов. Но при этом предполагается:

1) класс b уже как-то построен;

2) установлено, что для любого класса a верно $a \in b$.

И определение оказывается излишним, поскольку b и есть класс всех классов.

Короче говоря, не всегда то, что кажется ясным и правомерным в обычном словесном выражении, является логически корректным и удовлетворяющим интуитивным требования к терминологии. Еще более интересным на этот счет оказывается анализ выражений «нормальный класс», «класс нормальных классов» и «класс всех нормальных классов».

§ 8. О парадоксе класса нормальных классов

Нормальным классом называют класс, который не является элементом самого себя. Будем для сокращения употреблять символ nk вместо выражения «нормальный класс». Если записать это определение буквально, оно примет вид

$$nk = Df \cdot kl \downarrow \sim (kl \in kl).$$

Но из этого определения невозможно вывести даже утверждение

$$\sim(nk \in nk).$$

Когда такое утверждение получают, то его фактически принимают как часть наивного определения nk, а не выводят по правилам логики.

Когда получают известный парадокс класса всех нормальных классов, то фактически используют такое неявное определение nk: a есть nk, если и только если a есть класс такой, что $\sim(a \in a)$. Причем выражение «a есть nk» истолковывают как $a \in Knk$. Таким образом, определение принимает вид: $a \in Knk$, если и только если $\sim(a \in a)$, где a играет роль переменной для терминов классов (или есть любой термин класса). Неявно эту роль выполняет слово «класс», когда определение записывают в форме «Класс является нормальным, если и только если он не есть элемент самого себя». Наглядно это можно записать в форме:

$$\sim(a \in a) \leftrightarrow (a \in Knk).$$

В качестве следствия отсюда (по правилу контрапозиции) имеем

$$(a \in a) \leftrightarrow \sim(a \in Knk).$$

Взяв в качестве a класс Knk (или подставляя на место a термин Knk), получим

$$\sim(Knk \in Knk) \rightarrow (Knk \in Knk),$$
$$(Knk \in Knk) \rightarrow \sim(Knk \in Knk),$$

т. е. известный парадокс класса нормальных классов (если класс нормальных классов является нормальным, то отсюда следует, что он не является нормальным; и наоборот).

Однако от получении этого парадокса допускают грубую логическую ошибку, которая остается незаметной, пока все рассуждение проделывается в обычном (разговорном) языке. Ошибка состоит в том, что игнорируется правило определения с переменными. Определение nk в полном виде должно быть записано так: будем выражение nk считать термином класса таким, что если a есть термин класса и при этом

$$\sim(a \in a) \leftrightarrow (a \rightharpoonup nk).$$

Поскольку

$$(a \rightharpoonup nk) \dashv\vdash (\forall a)(a \in Knk)$$

и поскольку

$$(\sim(a \in a) \leftrightarrow (a \in Knk) \dashv\vdash \sim(a \in a) \leftrightarrow (\forall a)(a \in Knk))),$$

выражение $a \rightharpoonup nk$ в определении nk можно заменить на $a \in Knk$. А так как nk (или Knk) вводится здесь в употребление впервые как термин, то a должен быть термином класса до построения определения. Если a — термин, то это означает, что nk не входит в a и не используется при определении a. Если a — переменная, то на место a не может быть подставлен термин, содержащий nk или определяемый через него. А получить из определения nk утверждение

$$\sim(a \in a) \leftrightarrow (a \in Knk)$$

невозможно. Можно получить только такое утверждение: если a есть термин класса, не зависящий по значению от nk (т. е. не содержащий nk и не определяемый через него), то

$$\sim(a \in a) \leftrightarrow (a \in Knk).$$

И по условию этого утверждения подставить Knk на место a нельзя.

§ 9. Подкласс

Слово «подкласс» также употребляется как оператор и как термин. Будем в первом случае употреблять букву $П$.

Право построения терминов с $П$:

*R*1. *Если a есть термин класса, то $Пa$ есть термин класса* (читается как «Подкласс a»).

Из $R1$ следует: если a есть термин-субъект, то

$$\vdash Пa \rightharpoonup kl,$$

$$\vdash Пa \in Kkl$$

(т. е. подкласс класса есть класс).

Свойства оператора $П$ определяются так:

*D*1. $(a \rightharpoonup Пb)$, если и только если $a \subset b$. Или, в другой форме,

$$(a \rightharpoonup Пb) \dashv\vdash (a \subset b).$$

Из $D1$ следует:

$$(a \rightharpoonup Пb) \dashv\vdash (\forall a)(a \in KПb).$$

Из сказанного получается такое важное следствие для соотношения Kkl (класса классов) и $КПКkl$ (класса подклассов класса классов): поскольку Kkl есть термин класса, по правилу $R1$ термином класса будет $ПКkl$, а по правилу $R1$ из § 1 термином класса будет $КПКkl$. По определению термина kl отсюда получим:

$$\vdash ПКkl \in Kkl,$$

$$\vdash (\forall ПКkl)\,(ПКkl \in Kkl),$$

$$\vdash КПК\,kl \subset Kkl.$$

§ 10. О системах логики классов

В упомянутых работах автора был изложен набросок ряда систем логики классов. Как заметили А. М. Федина и В. А. Смирнов, некоторые из этих систем с формулами вида $\vdash a \in K(a \vee b)$ и $\vdash (a \wedge b) \in Ka$ противоречивы. Ниже мы изложим другие варианты систем логики классов (за исключением SK^1), приведем доказательство их непротиворечивости и частично рассмотрим проблему полноты. При этом будем предполагать системы теории кванторов для классического случая без ограничений на вырожденные кванторы, изложенные в работе автора «Нетрадиционная теория кванторов», и системы теории условных высказываний, изложенные в упомянутых в предисловии работах автора.

§ 11. Система SK^1

Алфавит:

1) K — классообразующий оператор;
2) $\in$ — двухместный предикат включения индивидов в класс.

$D1$. Субъектная форма SK^1:

1) индивидная переменная есть субъектная форма SK^1;

2) если a есть субъектная форма SK^1, то $\sim a$ есть субъектная форма SK^1;

3) нечто есть субъектная форма SK^1 лишь в силу 1 и 2.

$D2$. Элементарная формула SK^1 $:\in (a, Kb)$ есть элементарная пропозициональная формула SK^1, если и только если a и b суть субъектные формы SK^1.

Элементарная пропозициональная формула SK^1 есть пропозициональная формула. Если x есть пропозициональная формула, а a есть субъектная форма SK^1, то $(\forall a)x$ и $(\exists a)x$ суть пропозициональные формулы.

Вместо символов вида $\in (a, Kb)$ будем употреблять равноценные им (но более наглядные и общеупотребимые) символы вида $(a \in Kb)$.

Аксиомные схемы SK^1:

$A1$. $(\exists a)(a \in Kb) \vdash (\exists b)(b \in Ka)$;
$A2$. $\sim (a \in Kb) \vdash (a \in K \sim b)$;
$A3$. $(a \in K \sim b) \vdash \sim (a \in Kb)$;
$A4$. $(a \in Kb) \wedge (\forall b)(b \in Kc) \vdash (a \in Kc)$;
$A5$. $(a \in Kb) \wedge (a \in Kc) \vdash (\exists b)(b \in Kc)$.

Для доказательства непротиворечивости SK^1 примем такие семантические правила.

Будем индивидным переменным приписывать значения 1 и 0 аналогично тому, как приписываются значения v и nv пропозициональным переменным.

Субъектным формам с оператором $\sim$ будем приписывать значения 1 и 0 по правилу, устанавливаемому таблицей:

a	$\sim a$
1	0
0	1

Кванторы будем опускать. Формулам $a \in Kb$ будем приписывать значения v и nv по правилу, устанавливаемому таблицей:

a	b	$a \in Kb$
1	1	v
1	0	nv
0	1	nv
0	0	v

Для пропозициональных формул с операторами $\vee$, $\wedge$ и $\sim$ правила обычные. Формула $x \vdash y$ имеет значение v, если и только если $\sim x \vee y$ имеет значение v для любых комбинаций значений входящих в нее индивидных переменных.

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема SK^1, то она имеет значение v.

Теорема доказывается путем пересмотра аксиом SK^1. Из $MT1$ следует противоречивость SK^1.

Система SK^1 содержит в себе полную силлогистику классов, как показала А. М. Федина (см.: «О силлогистике классов», «Неклассическая логика», М., 1970).

§ 12. Система SK^2

Алфавит:

1) список переменных для классов;
2) K — классообразующий оператор (оператор первичных классов);
3) $\in$ — двухместный предикат включения индивидов в класс;
4) $\subset$ — двухместный предикат включения классов в класс;
5) $\cup$ — оператор объединения классов;
6) $\cap$ — оператор пересечения классов;
7) $^-$ — оператор дополнения классов.

Область значения переменных для классов образуют термины классов.

$D1$. Субъектная форма класса:

1) переменная для класса есть субъектная форма класса;

2) если a есть индивидная переменная, то Ka есть субъектная форма класса;

3) если a есть субъектная форма класса, то $\bar{a}$ есть субъектная форма класса;

4) если a и b суть субъектные формы класса, то $(a \cup b)$ и $(a \cap b)$ суть субъектные формы класса;

5) нечто есть субъектная форма класса лишь в силу (1–4).

Правила опускания и восстановления скобок для субъектных форм класса с операторами $\cup$ и $\cap$ аналогичны соответствующим правилам для пропозициональных формул с операторами $\vee$ и $\wedge$.

$D2$. Субъектные формы класса и индивидные переменные суть субъектные формы SK^2.

$D3$. Элементарная формула SK^2:

1) если a есть индивидная переменная, а b есть субъектная форма класса, то $\in (a, b)$ есть элементарная формула SK^2;

2) если a и b суть субъектные формы класса, то $\subset (a, b)$ есть элементарная формула SK^2;

3) нечто есть элементарная формула SK^2 лишь в силу (1) и (2).

$D4$. Элементарная формула SK^2 есть пропозициональная формула.

Вместо символов вида $\in (a, b)$ и $\subset (a, b)$ будем употреблять равноценные им символы соответственно $(a \in b)$ и $(a \subset b)$.

Аксиомные схемы SK^2:

$A1$. $(\exists a)(a \in Kb) \vdash (\exists b)(b \in Ka)$;

$A2$. $\sim (a \in b) \vdash (a \in \bar{b})$;

$A3$. $(a \in \bar{b}) \vdash \sim (a \in b)$;

$A4$. $(Ka \subset b) \vdash (\forall a)(a \in b)$;

$A5$. $(\forall a)(a \in b) \vdash (Ka \subset b)$;

$A6$. $(\forall a)((a \in b) \to (a \in c)) \vdash (b \subset c)$;

$A7$. $(b \subset c) \vdash (\forall a)((a \in b) \to (a \in c))$;

$A8$. $(a \in b) \vee (a \in c) \vdash (a \in (b \cup c))$;

$A9$. $(a \in (b \cup c)) \vdash (a \in b) \vee (a \in c)$;

$A10$. $(a \in b) \wedge (a \in c) \vdash (a \in (b \cap c))$;

$A11$. $(a \in (b \cap c)) \vdash (a \in b) \wedge (a \in c)$;

$A12$. $(a \in Kb) \wedge (\forall b)(b \in c) \vdash (a \in c)$;

$A13$. $(a \in Kb) \wedge (a \in c) \vdash (\exists b)(b \in c)$.

Для доказательства непротиворечивости SK^2 примем такие семантические правила.

Субъектным формам будем приписывать значения 1 и 0. Пропозициональным формулам и формулам следования приписываются значения v и nv. Для операторов $\vee$, $\wedge$ и $\sim$ правила обычные.

Формула $x \vdash y$ имеет значение v, если и только если $\sim x \vee y$ имеет значение v для любых комбинаций значений входящих в нее субъектных форм.

Формула $(Ka \subset b)$ равнозначна формуле $(\forall a)(a \in b)$, формула $(b \subset c)$ равнозначна формуле $(\forall a)((a \in b) \to (a \in c))$, формула $a \in (b \cup c)$ равнозначна $(a \in b) \vee (a \in c)$, формула $a \in (b \cap c)$ равнозначна $(a \in b) \wedge (a \in c)$, формула $a \in \bar{b}$ равнозначна $\sim (a \in b)$ (т. е. первые формулы в указанных парах можно рассматривать как сокращения для вторых). Субъектная форма Ka равнозначна a. Кванторы опускаются. Формула $x \to y$ равнозначна $\sim x \vee y$.

Формулам $a \in b$ значения v и nv приписываются по правилу, устанавливаемому таблицей:

a	b	$a \in b$
1	1	v
1	0	nv
0	1	nv
0	0	nv

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема SK^2, то она имеет значение v.

Теорема доказывается путем пересмотра аксиом SK^2. При этом достаточно взять аксиомы $A1$, $A12$ и $A13$. Из $MT1$ следует непротиворечивость SK^2.

§ 13. Система SK^3

Система SK^3 логики классов образуется благодаря таким изменениям системы SK^2.

Принимается дополнительное определение $D5$.

$D5$. Субъектная форма терминов:

1) индивидная переменная есть субъектная форма терминов;

2) если a есть субъектная форма терминов, то $\sim a$ есть субъектная форма терминов;

3) если a и b суть субъектные формы терминов, то $(a \vee b)$ и $(a \wedge b)$ суть субъектные формы терминов;

4) нечто есть субъектная форма терминов лишь в силу (1–3).

Дополнение к определению пропозициональной формулы: если a есть субъектная форма терминов, а x — пропозициональная формула, то $(\forall a)x$ и $(\exists a)x$ суть пропозициональные формулы.

Пункт (2) определения $D1$ изменяется так: 2) если a есть субъектная форма терминов, то Ka — субъектная форма классов.

Дополнение к $D2$: субъектные формы терминов суть субъектные формы SK^3.

Пункт (1) определения $D3$ изменяется так: 1) если a есть субъектная форма терминов, а b — субъектная форма классов, то $\in (a, b)$ — элементарная формула SK^3.

Повсюду буквы SK^2 заменяются на SK^3.

Аксиомные схемы $A1$, $A3$ и $A13$ заменяются такими:

$A1$. $(\exists a)(a \in Kb) \wedge \sim (a \in K(c \wedge \sim c)) \vdash (\exists b)(b \in Ka)$;

$A3$. $(a \bar{\in} b) \wedge \sim (a\ K(c \wedge \sim c)) \vdash \sim (a \in b)$;

$A13$. $(a \in Kb) \wedge (a \in c) \wedge \sim (a \in K(d \wedge \sim d)) \vdash (\exists b)(b \in c)$.

Принимаются дополнительные аксиомные схемы:

$A14$. $(\forall a)(a \in Kb) \vdash (\forall \sim b)(\sim b \in K \sim a)$;

$A15$. $\vdash (a \subset \bar{\bar{a}}) \wedge (\bar{\bar{a}} \subset a)$;

$A16$. $\vdash (\overline{(a \cup b)} \subset (\bar{a} \cap \bar{b})) \wedge ((\bar{a} \cap \bar{b}) \subset \overline{(a \cup b)})$;

$A17$. $\vdash (\overline{(a \cap b)} \subset (\bar{a} \cup \bar{b})) \wedge ((\bar{a} \cup \bar{b}) \subset \overline{(a \cap b)})$;

$A18$. $\vdash (K(a \vee b) \subset (Ka \cup Kb)) \wedge ((Ka \cup Kb) \subset \overline{(K(a \vee b))})$;

$A19$. $\vdash (K(a \wedge b) \subset (Ka \cap Kb)) \wedge ((Ka \cap Kb) \subset K(a \wedge b))$;

$A20$. $\vdash (K \sim a \subset \overline{Ka}) \wedge (\overline{Ka} \subset \sim Ka)$.

Принимаются также аксиомные схемы A^t (символы $x[\alpha/\beta]$ означают, что формула получена из x путем замены нуля или более вхождений α в x на β):

1. $x \vdash x[\sim\sim a/a]$;
2. $x \vdash x[a/\sim\sim a]$;
3. $x \vdash x[a \wedge b/b \wedge a]$;
4. $x \vdash x[a \wedge a/a]$;
5. $x \vdash x[a/a \wedge a]$;
6. $x \vdash x[a \wedge (b \wedge c)/(a \wedge b) \wedge c]$;
7. $x \vdash x[(a \wedge b) \wedge c/a \wedge (b \wedge c]$;
8. $x \vdash x[a \vee b) \wedge c/(a \wedge c) \vee (b \wedge c)]$;
9. $x \vdash x[(a \wedge c) \vee (b \wedge c)/(a \vee b) \wedge c]$;
10. $x \vdash x[\sim (a \wedge b)/\sim a \vee \sim b]$;
11. $x \vdash x[\sim a \vee \sim b/\sim (a \wedge b)]$;
12. $x \vdash x[a \wedge (b \vee \sim b)/a]$;

13. $x \vdash x[a/a \wedge (b \vee \sim b)]$.

Приведем некоторые теоремные схемы:

$T1$. $\vdash a \in K(a \vee b)$;

$T2$. $\vdash (a \wedge b) \in Ka$;

$T3$. $\vdash (a \wedge \sim a) \in Kb$;

T. $\vdash b \in K(a \vee \sim a)$.

Для доказательства непротиворечивости SK^3 примем следующие семантические правила.

Субъектным формам с операторами $\cup, \cap, \bar{}$ значения 1 и 0 приписываются по правилам, устанавливаемым таблицами:

a	b	$a \cup b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	$a \cap b$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Субъектным формам с операторами $\vee, \wedge, \sim$ значения 1 и 0 приписываются по правилам, устанавливаемым таблицами:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

a	$\sim a$
1	0
0	1

Формулам $a \in b$ будем приписывать значения v и nv по правилу, устанавливаемому таблицей:

a	b	$a \in b$
1	1	v
1	0	nv
0	1	v
0	0	v

Остальные правила такие же, как для SK^2.

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема SK^3, то она имеет значение v (доказывается пересмотром аксиом).

Из $MT1$ следует непротиворечивость SK^3.

§ 14. Пустые и универсальные классы

$D1$. Класс a универсален, если и только если $(\forall b)(b \in a)$.

$D2$. Класс a пуст, если и только если $(\forall b)(b \in \bar{a})$.

$MT1$. Если a есть пустой класс, то $\vdash a \subset b)$ есть теорема для любого класса b.

$MT2$. Если a и b суть пустые классы, то они эквивалентны (все пустые классы эквивалентны), т. е. $\vdash (a \subset b) \wedge (b \subset a)$.

$MT3$. Если a есть универсальный класс, то $\vdash (b \subset a)$ есть теорема для любого класса b.

$MT4$. Если a и b суть универсальные классы, то они эквивалентны (все универсальные классы эквивалентны).

$MT5$. Класс $a \cap \bar{a}$ пуст.

$MT6$. Класс $a \cup \bar{a}$ универсален.

§ 15. Проблема полноты SK^i

Проблема полноты SK^i распадается на ряд проблем полноты их относительно отдельных видов формул.

Пусть пропозициональная формула $x \supset y$ образуется из формулы $c \in Kd$ (и наоборот) следующим образом:

1) индивидные переменные заменяются пропозициональными переменными, причем одинаковые элементы заменяются одинаковыми, разными — разными (и наоборот);

2) оператор K опускается (в обратную сторону — вписывается на соответствующем месте после $\in$);

3) предикат $\in$ заменяется на оператор материальной импликации $\supset$ (и наоборот); причем $x \supset y$ рассматривается как сокращение для $\sim x \vee y$.

$MT1$. Если $x \supset y$ доказуема в классическом исчислении высказываний, то $\vdash (c \in Kd)$ — теорема SK^3; и наоборот.

Доказательство $MT1$. В SK^3 имеют силу такие теоремные схемы:

$T1$. $\vdash (a \vee b) \in K(b \vee a)$;

$T2$. $\vdash (a \vee (b \vee c)) \in K((a \vee b) \vee c))$;

$T3$. $\vdash ((a \vee b) \vee c) \in K(a \vee (b \vee c))$;

$T4$. $\vdash ((a \vee b) \wedge c) \in K((a \wedge c) \vee (b \wedge c))$;

$T5$. $\vdash ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \in K((a \vee b) \wedge c))$;

$T6$. $\vdash (a \wedge b) \in K \sim (\sim a \vee \sim b)$;

$T7$. $\vdash \sim(\sim a \vee \sim b) \in K(a \wedge b)$;

$T8$. $\vdash \sim\sim a \in Ka$;

$T9$. $\vdash a \in K \sim\sim a$;

$T10$. $\vdash (a \vee a) \in Ka$;

$T11$. $\vdash a \in K(a \wedge (b \vee \sim b))$;

$T12$. $\vdash a \in K(a \vee b)$.

В SK^3, далее, имеет силу следующее производное правило вывода: если $\vdash (a \in Kb)$, то $\vdash (c \in Kd)$, где $c \in Kd$ получается из $a \in Kb$ путем замен, указанных в A^t.

Возьмем исчисление высказываний в такой форме. Аксиомные схемы:

1. $(x \vee y) \supset (y \vee x)$;
2. $(x \vee (y \vee z)) \supset ((x \vee y) \vee z)$;
3. $((x \vee y) \vee z) \supset (x \vee (y \vee z))$;
4. $((x \vee y) \wedge z) \supset ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$;
5. $((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \supset ((x \vee y) \wedge z)$;
6. $(x \wedge y) \supset \sim(x \vee \sim y)$;
7. $\sim(\sim x \vee \sim y) \supset (x \wedge y)$;
8. $\sim\sim x \supset x$;
9. $x \supset \sim\sim x$;
10. $(x \vee x) \supset x$;
11. $x \supset (x \wedge (y \vee \sim y))$;
12. $x \supset (x \vee y)$.

Причем $A \supset B$ есть лишь сокращение для $\sim A \vee B$.

Правило вывода: если $x \supset y$ и $y \supset x$, то из A получается B путем замены нуля или более вхождений x в A на y.

Очевидно, аксиомным схемам 1–12 соответствуют теоремные схемы $T1$–$T12$, а правилу вывода — правило SK^3, приведенное после $T12$.

Система SK^3 полна относительно формул вида $\vdash (a \in Kb)$ в смысле $MT1$.

Пусть, далее, пропозициональная формула $x \supset y$ образуется из $c \subset d$ (и наоборот) так:

1) переменные для классов заменяются пропозициональными переменными, причем — одинаковые одинаковыми и разные разными (и наоборот);

2) предикат $\subset$ заменяется на оператор $\supset$ (и наоборот);

3) операторы $\cup, \cap, \bar{}$ заменяются соответственно на $\vee, \wedge, \sim$ (и наоборот); причем выражение $\bar{a}$ заменяется на $\sim a$ (в обратную сторону — $\sim a$ на $\bar{a}$).

*MT*2. Если $x \supset y$ есть теорема классического исчисления высказываний, то $\vdash (c \subset d)$ — теорема SK^2 (*и* SK^3); и наоборот.

Для доказательства *MT*2 достаточно показать, что в SK^2 (и в SK^3) имеют силу теоремные схемы:

1. $\vdash (a \cup b) \subset (b \cup a)$;
2. $\vdash (a \cup (b \cup c)) \subset ((a \cup b) \cup c)$;
3. $\vdash ((a \cup b) \cup c) \subset (a \cup (b \cup c))$;
4. $\vdash ((a \cup b) \cap c) \subset ((a \cap c) \cup (b \cap c))$;
5. $\vdash ((a \cap c) \cup (b \cap c)) \subset ((a \cup b) \cap c)$;
6. $\vdash (a \cap b) \subset \overline{(\bar{a} \cup \bar{b})}$;
7. $\vdash \overline{(\bar{a} \cup \bar{b})} \subset (a \cap b)$;
8. $\vdash (a \subset \bar{\bar{a}})$;
9. $\vdash (\bar{\bar{a}} \subset a)$;
10. $\vdash (a \cup a) \subset a$;
11. $\vdash a \subset (a \cap (b \cup \bar{b}))$;
12. $\vdash a \subset (a \cup b)$

и правило вывода: если $\vdash (a \subset b)$ и $\vdash (b \subset a)$, то $\vdash (c \subset d)$, где d образуется из c путем замены нуля или более вхождений a в c на b. Это правило доказывается индукцией по числу вхождений операторов $\cup, \cap, \bar{}$ в c.

Системы SK^2 и SK^3 полны относительно формул вида $\vdash (a \subset b)$ в смысле *MT*2.

Пусть формула $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y$ системы SK^1 обладает такими свойствами: 1) $n \geqslant 1$; 2) все $x^1, \ldots, x^n, y$ суть элементарные формулы SK^1, их отрицания, упомянутые формулы с кванторами и их отрицания.

Примем такие семантические правила:

Формулам $x \vdash y$ значения v и nv приписываются по правилам нестандартной семантики, изложенной в работе автора «Нетрадиционная теория кванторов» (в данном сборнике). Формулам $a \in Kb$ будем приписывать значения v и nv по правилам, устанавливаемым таблицами (читаются только слева направо):

Субъектным формам будем приписывать значения 1 и 0. Пропозициональным формулам и формулам следования приписываются значения v и nv. Для операторов $\vee$, $\wedge$ и $\sim$ правила обычные.

Формула $x \vdash y$ имеет значение v, если и только если $\sim x \vee y$ имеет значение v для любых комбинаций значений входящих в нее субъектных форм.

Формула $(Ka \subset b)$ равнозначна формуле $(\forall a)(a \in b)$, формула $(b \subset c)$ равнозначна формуле $(\forall a)((a \in b) \to (a \in c))$, формула $a \in (b \cup c)$ равнозначна $(a \in b) \vee (a \in c)$, формула $a \in (b \cap c)$ равнозначна $(a \in b) \wedge (a \in c)$, формула $a \in \bar{b}$ равнозначна $\sim (a \in b)$ (т. е. первые формулы в указанных парах можно рассматривать как сокращения для вторых). Субъектная форма Ka равнозначна a. Кванторы опускаются. Формула $x \to y$ равнозначна $\sim x \vee y$.

Формулам $a \in b$ значения v и nv приписываются по правилу, устанавливаемому таблицей:

a	b	$a \in b$
1	1	v
1	0	nv
0	1	nv
0	0	nv

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема SK^2, то она имеет значение v.

Теорема доказывается путем пересмотра аксиом SK^2. При этом достаточно взять аксиомы $A1$, $A12$ и $A13$. Из $MT1$ следует непротиворечивость SK^2.

§ 13. Система SK^3

Система SK^3 логики классов образуется благодаря таким изменениям системы SK^2.

Принимается дополнительное определение $D5$.

$D5$. Субъектная форма терминов:

1) индивидная переменная есть субъектная форма терминов;

2) если a есть субъектная форма терминов, то $\sim a$ есть субъектная форма терминов;

3) если a и b суть субъектные формы терминов, то $(a \vee b)$ и $(a \wedge b)$ суть субъектные формы терминов;

4) нечто есть субъектная форма терминов лишь в силу (1–3).

Дополнение к определению пропозициональной формулы: если a есть субъектная форма терминов, а x — пропозициональная формула, то $(\forall a)x$ и $(\exists a)x$ суть пропозициональные формулы.

Пункт (2) определения $D1$ изменяется так: 2) если a есть субъектная форма терминов, то Ka — субъектная форма классов.

Дополнение к $D2$: субъектные формы терминов суть субъектные формы SK^3.

Пункт (1) определения $D3$ изменяется так: 1) если a есть субъектная форма терминов, а b — субъектная форма классов, то $\in (a, b)$ — элементарная формула SK^3.

Повсюду буквы SK^2 заменяются на SK^3.

Аксиомные схемы $A1$, $A3$ и $A13$ заменяются такими:

$A1$. $(\exists a)(a \in Kb) \wedge \sim (a \in K(c \wedge \sim c)) \vdash (\exists b)(b \in Ka)$;

$A3$. $(a \bar{\in} b) \wedge \sim (a\ K(c \wedge \sim c)) \vdash \sim (a \in b)$;

$A13$. $(a \in Kb) \wedge (a \in c) \wedge \sim (a \in K(d \wedge \sim d)) \vdash (\exists b)(b \in c)$.

Принимаются дополнительные аксиомные схемы:

$A14$. $(\forall a)(a \in Kb) \vdash (\forall \sim b)(\sim b \in K \sim a)$;

$A15$. $\vdash (a \subset \bar{\bar{a}}) \wedge (\bar{\bar{a}} \subset a)$;

$A16$. $\vdash (\overline{(a \cup b)} \subset (\bar{a} \cap \bar{b})) \wedge ((\bar{a} \cap \bar{b}) \subset \overline{(a \cup b)})$;

$A17$. $\vdash (\overline{(a \cap b)} \subset (\bar{a} \cup \bar{b})) \wedge ((\bar{a} \cup \bar{b}) \subset \overline{(a \cap b)})$;

$A18$. $\vdash (K(a \vee b) \subset (Ka \cup Kb)) \wedge ((Ka \cup Kb) \subset \overline{(K(a \vee b))})$;

$A19$. $\vdash (K(a \wedge b) \subset (Ka \cap Kb)) \wedge ((Ka \cap Kb) \subset K(a \wedge b))$;

$A20$. $\vdash (K \sim a \subset \overline{Ka}) \wedge (\overline{Ka} \subset \sim Ka)$.

Принимаются также аксиомные схемы A^t (символы $x[\alpha/\beta]$ означают, что формула получена из x путем замены нуля или более вхождений α в x на β):

1. $x \vdash x[\sim\sim a/a]$;
2. $x \vdash x[a/\sim\sim a]$;
3. $x \vdash x[a \wedge b/b \wedge a]$;
4. $x \vdash x[a \wedge a/a]$;
5. $x \vdash x[a/a \wedge a]$;
6. $x \vdash x[a \wedge (b \wedge c)/(a \wedge b) \wedge c]$;
7. $x \vdash x[(a \wedge b) \wedge c/a \wedge (b \wedge c]$;
8. $x \vdash x[a \vee b) \wedge c/(a \wedge c) \vee (b \wedge c)]$;
9. $x \vdash x[(a \wedge c) \vee (b \wedge c)/(a \vee b) \wedge c]$;
10. $x \vdash x[\sim (a \wedge b)/\sim a \vee \sim b]$;
11. $x \vdash x[\sim a \vee \sim b/\sim (a \wedge b)]$;
12. $x \vdash x[a \wedge (b \vee \sim b)/a]$;

13. $x \vdash x[a/a \wedge (b \vee \sim b)]$.

Приведем некоторые теоремные схемы:

$T1$. $\vdash a \in K(a \vee b)$;

$T2$. $\vdash (a \wedge b) \in Ka$;

$T3$. $\vdash (a \wedge \sim a) \in Kb$;

T. $\vdash b \in K(a \vee \sim a)$.

Для доказательства непротиворечивости SK^3 примем следующие семантические правила.

Субъектным формам с операторами $\cup, \cap, \bar{}$ значения 1 и 0 приписываются по правилам, устанавливаемым таблицами:

a	b	$a \cup b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	$a \cap b$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Субъектным формам с операторами $\vee, \wedge, \sim$ значения 1 и 0 приписываются по правилам, устанавливаемым таблицами:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

a	$\sim a$
1	0
0	1

Формулам $a \in b$ будем приписывать значения v и nv по правилу, устанавливаемому таблицей:

a	b	$a \in b$
1	1	v
1	0	nv
0	1	v
0	0	v

Остальные правила такие же, как для SK^2.

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема SK^3, то она имеет значение v (доказывается пересмотром аксиом).

Из $MT1$ следует непротиворечивость SK^3.

§ 14. Пустые и универсальные классы

$D1$. Класс a универсален, если и только если $(\forall b)(b \in a)$.

$D2$. Класс a пуст, если и только если $(\forall b)(b \in \bar{a})$.

$MT1$. Если a есть пустой класс, то $\vdash a \subset b)$ есть теорема для любого класса b.

$MT2$. Если a и b суть пустые классы, то они эквивалентны (все пустые классы эквивалентны), т. е. $\vdash (a \subset b) \wedge (b \subset a)$.

$MT3$. Если a есть универсальный класс, то $\vdash (b \subset a)$ есть теорема для любого класса b.

$MT4$. Если a и b суть универсальные классы, то они эквивалентны (все универсальные классы эквивалентны).

$MT5$. Класс $a \cap \bar{a}$ пуст.

$MT6$. Класс $a \cup \bar{a}$ универсален.

§ 15. Проблема полноты SK^i

Проблема полноты SK^i распадается на ряд проблем полноты их относительно отдельных видов формул.

Пусть пропозициональная формула $x \supset y$ образуется из формулы $c \in Kd$ (и наоборот) следующим образом:

1) индивидные переменные заменяются пропозициональными переменными, причем одинаковые элементы заменяются одинаковыми, разными — разными (и наоборот);

2) оператор K опускается (в обратную сторону — вписывается на соответствующем месте после $\in$);

3) предикат $\in$ заменяется на оператор материальной импликации $\supset$ (и наоборот); причем $x \supset y$ рассматривается как сокращение для $\sim x \vee y$.

$MT1$. Если $x \supset y$ доказуема в классическом исчислении высказываний, то $\vdash (c \in Kd)$ — теорема SK^3; и наоборот.

Доказательство $MT1$. В SK^3 имеют силу такие теоремные схемы:

$T1$. $\vdash (a \vee b) \in K(b \vee a)$;

$T2$. $\vdash (a \vee (b \vee c)) \in K((a \vee b) \vee c))$;

$T3$. $\vdash ((a \vee b) \vee c) \in K(a \vee (b \vee c))$;

$T4$. $\vdash ((a \vee b) \wedge c) \in K((a \wedge c) \vee (b \wedge c))$;

$T5$. $\vdash ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \in K((a \vee b) \wedge c))$;

$T6$. $\vdash (a \wedge b) \in K \sim (\sim a \vee \sim b)$;

$T7$. $\vdash \sim(\sim a \vee \sim b) \in K(a \wedge b)$;

$T8$. $\vdash \sim\sim a \in Ka$;

$T9$. $\vdash a \in K \sim\sim a$;

$T10$. $\vdash (a \vee a) \in Ka$;

$T11$. $\vdash a \in K(a \wedge (b \vee \sim b))$;

$T12$. $\vdash a \in K(a \vee b)$.

В SK^3, далее, имеет силу следующее производное правило вывода: если $\vdash (a \in Kb)$, то $\vdash (c \in Kd)$, где $c \in Kd$ получается из $a \in Kb$ путем замен, указанных в A^t.

Возьмем исчисление высказываний в такой форме. Аксиомные схемы:

1. $(x \vee y) \supset (y \vee x)$;
2. $(x \vee (y \vee z)) \supset ((x \vee y) \vee z)$;
3. $((x \vee y) \vee z) \supset (x \vee (y \vee z))$;
4. $((x \vee y) \wedge z) \supset ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$;
5. $((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \supset ((x \vee y) \wedge z)$;
6. $(x \wedge y) \supset \sim(x \vee \sim y)$;
7. $\sim(\sim x \vee \sim y) \supset (x \wedge y)$;
8. $\sim\sim x \supset x$;
9. $x \supset \sim\sim x$;
10. $(x \vee x) \supset x$;
11. $x \supset (x \wedge (y \vee \sim y))$;
12. $x \supset (x \vee y)$.

Причем $A \supset B$ есть лишь сокращение для $\sim A \vee B$.

Правило вывода: если $x \supset y$ и $y \supset x$, то из A получается B путем замены нуля или более вхождений x в A на y.

Очевидно, аксиомным схемам 1–12 соответствуют теоремные схемы $T1$–$T12$, а правилу вывода — правило SK^3, приведенное после $T12$.

Система SK^3 полна относительно формул вида $\vdash (a \in Kb)$ в смысле $MT1$.

Пусть, далее, пропозициональная формула $x \supset y$ образуется из $c \subset d$ (и наоборот) так:

1) переменные для классов заменяются пропозициональными переменными, причем — одинаковые одинаковыми и разные разными (и наоборот);

2) предикат $\subset$ заменяется на оператор $\supset$ (и наоборот);

3) операторы $\cup, \cap, \bar{}$ заменяются соответственно на $\vee, \wedge, \sim$ (и наоборот); причем выражение $\bar{a}$ заменяется на $\sim a$ (в обратную сторону — $\sim a$ на $\bar{a}$).

*MT*2. Если $x \supset y$ есть теорема классического исчисления высказываний, то $\vdash (c \subset d)$ — теорема SK^2 (*и* SK^3); и наоборот.

Для доказательства *MT*2 достаточно показать, что в SK^2 (и в SK^3) имеют силу теоремные схемы:

1. $\vdash (a \cup b) \subset (b \cup a)$;
2. $\vdash (a \cup (b \cup c)) \subset ((a \cup b) \cup c)$;
3. $\vdash ((a \cup b) \cup c) \subset (a \cup (b \cup c))$;
4. $\vdash ((a \cup b) \cap c) \subset ((a \cap c) \cup (b \cap c))$;
5. $\vdash ((a \cap c) \cup (b \cap c)) \subset ((a \cup b) \cap c)$;
6. $\vdash (a \cap b) \subset \overline{(\bar{a} \cup \bar{b})}$;
7. $\vdash \overline{(\bar{a} \cup \bar{b})} \subset (a \cap b)$;
8. $\vdash (a \subset \bar{\bar{a}})$;
9. $\vdash (\bar{\bar{a}} \subset a)$;
10. $\vdash (a \cup a) \subset a$;
11. $\vdash a \subset (a \cap (b \cup \bar{b}))$;
12. $\vdash a \subset (a \cup b)$

и правило вывода: если $\vdash (a \subset b)$ и $\vdash (b \subset a)$, то $\vdash (c \subset d)$, где d образуется из c путем замены нуля или более вхождений a в c на b. Это правило доказывается индукцией по числу вхождений операторов $\cup, \cap, \bar{}$ в c.

Системы SK^2 и SK^3 полны относительно формул вида $\vdash (a \subset b)$ в смысле *MT*2.

Пусть формула $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y$ системы SK^1 обладает такими свойствами: 1) $n \geqslant 1$; 2) все $x^1, \ldots, x^n, y$ суть элементарные формулы SK^1, их отрицания, упомянутые формулы с кванторами и их отрицания.

Примем такие семантические правила:

Формулам $x \vdash y$ значения v и nv приписываются по правилам нестандартной семантики, изложенной в работе автора «Нетрадиционная теория кванторов» (в данном сборнике). Формулам $a \in Kb$ будем приписывать значения v и nv по правилам, устанавливаемым таблицами (читаются только слева направо):

$a \in Kb$	a	b
v	1	1
nv	1	0

a	b	$a \in b$
1	1	v
1	0	nv
0	1	nv
0	0	nv

Кроме того, каждой формуле $a \in Kb$ по отдельности можно приписать как значение v, так и nv.

$MT3$. Если $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y$ имеет значение v, то они есть теорема SK^1.

Для доказательства $MT3$ достаточно рассмотреть случаи, когда все $x^1, \ldots, x^n, y$ попарно различны, число $x^1, \ldots, x^n$ нельзя сократить (т. е. исключение какой-либо из $x^1, \ldots, x^n$ дает формулу, имеющую значение nv), повсюду исключены двойные отрицания (т. е. вхождения $\sim\sim a$ заменены на a), все вхождения вида $\sim (\exists a)x$ и $\sim (\forall a)x$ заменены соответственно на $(\forall a) \sim x$ и $(\exists a) \sim x$. Кроме того, сразу можно исключить случаи, когда в y входят индивидные переменные, отсутствующие в $x^1, \ldots, x^n$, а также случаи, когда $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$ есть противоречие.

Для случаев, когда $n = 1$ и $n = 2$, теорема доказывается путем пересмотра всех возможных вариантов. Случаи, когда $n \geqslant 3$, сводятся к случаям с двумя членами конъюнкции в посылке по такой схеме. Если $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y$ имеет значение v, то, согласно семантическим правилам и принятым ограничениям, будет иметь силу следующее. Пусть α и β суть индивидные переменные, входящие в у в указанном порядке. Выбираем среди $x^1, \ldots, x^n$ такую x^{i_1}, которая содержит α. Пусть γ^1 есть вторая индивидная переменная, входящая в x^{i_1}. Выбираем среди $x^1, \ldots, x^n$ такую x^{i_2}, которая содержит γ^1. Пусть γ^2 есть вторая индивидная переменная, входящая в x^{i_2}. Если $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y$ имеет значение v, то будет иметь значение v формула $z^1 \wedge x^{i_3} \wedge \ldots \wedge x^{in} \vdash y$ такая, что $x^{i_1} \wedge x^{i_2} \vdash z^1$ есть теорема SK^1, а $x^{i_3}, \ldots, x^{in}$ — суть остальные из $x^1, \ldots, x^n$, отличные от x^{i_1} и x^{i_2}; и наоборот.

Таким образом, число конъюнктивных членов в посылке сокращается на один. И так до тех пор, пока не получим формулу $w^1 \wedge w^2 \vdash y$, которая находится в следующей зависимости с $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y$: если вторая имеет значение v, то первая имеет значение v (и наоборот), а формула $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash w^1 \wedge w^2$ есть теорема SK^1.

Подробное доказательство $MT3$ мы здесь не приводим.

§ 16. Система SK^4

Интерес представляет система SK^4, которая образуется из SK^1 путем таких дополнений.

К $D1$ добавляется пункт: если a и b суть субъектные формы, то $(a \vee b)$ и $(a \wedge b)$ суть субъектные формы.

К аксиомным схемам добавляются такие:

$A6$. $(a \in Kb) \wedge (a \in Kc) \dashv\vdash (a \in K(b \wedge c))$;

$A7$. $(a \in Kb) \vee (a \in Kc) \dashv\vdash (a \in K(b \vee c))$;

$A8$. $\vdash a \in K(a \vee b)$,

где в a, b, c не входят одинаковые субъектные формы.

Для доказательства непротиворечивости SK^4 примем такие семантические правила:

Субъектным формам приписываются значения 1 и 0 по правилам, которые аналогичны соответствующим правилам для субъектных форм системы SK^1.

Формулам $a \in Kb$ приписываются значения v и nv по правилу, аналогичному правилу, изложенному в § 11. Кроме того, принимаются такие правила:

1) формула $a \in K(b \wedge c)$ равнозначна формуле

$(a \in Kb) \wedge (a \in Kc)$;

2) формула $a \in K(b \vee c)$ равнозначна формуле

$(a \in Kb) \vee (a \in Kc)$.

Кванторы опускаются. Формула $x \vdash y (\vdash x)$ имеет значение v, если и только если $x \supset y$ (соответственно x) принимает значение v для любых комбинаций значений входящих в нее субъектных форм.

В системе SK^4 недоказуемы формулы вида:

$\vdash a \in K(b \vee \sim b)$, $\vdash (a \wedge \sim a) \in Ka$,

$\vdash (a \wedge \sim a) \in Kb$, $\vdash (a \wedge \sim a) \in K \sim a$.

§ 17. Соответствие и мощность классов

Всякий подкласс класса есть класс, так что по определению термина kl и оператора K имеем: класс подклассов класса классов включается в класс классов. В математической теории классов доказывается, что мощность (число элементов) класса подклассов класса превосходит мощность самого этого класса. Поскольку это утверждение относится к классу классов и классу подклассов класса классов как к частному

случаю, получается парадоксальная ситуация: часть класса содержит больше элементов, чем сам класс.

По нашему мнению, парадокс можно устранить путем уточнения понятия взаимно однозначного соответствия классов и предикатов отношения мощностей классов.

Мы считает целесообразным такое уточнение упомянутого понятия: два класса находятся во взаимнооднозначном соответствии, если и только если они не являются пустыми, не пересекаются (не имеют общих элементов), и найдется по крайней мере один способ установления соответствия элементов классов, с помощью которого каждому элементу одного из них ставится в соответствие один и только один элемент другого, причем разным элементам одного ставятся в соответствие разные элементы другого. Если между классами A и B имеет место взаимнооднозначное соответствие, будем это кратко записывать символами вида $A \Leftrightarrows B$.

Выражения «A превосходит по мощности B» и «A тождественно по мощности B» будем кратко записывать символами соответственно $A > B$ и $A = B$.

Примем такие утверждения, определяющие свойства предикатов $>$ и $=$ (ниже a есть индивидная переменная, а α — переменная для терминов классов):

$A1.$ $\vdash (A \subset B) \to \sim (A > B)$;

$A2.$ $\vdash (\forall a) \sim (a \in B) \wedge (\exists a)(a \in A) \to (A > B)$;

$A3.$ $\vdash (A \subset C \cup D) \wedge (C \cup D \subset A) \wedge (B \subset C \cup E) \wedge$
$\wedge (C \cup E \subset B) \to ((A > B) \leftrightarrow (D > E)) \wedge ((A = B) \leftrightarrow (D = E))$;

$A4.$ $\vdash (\exists a)(a \in A) \wedge (\exists a)(a \in B) \wedge \sim (\exists a)((a \in A) \wedge$
$\wedge (a \in B)) \to ((A > B) \leftrightarrow (\exists \alpha)((\alpha \subset A) \wedge (\alpha \Leftrightarrows B) \wedge \sim (A \subset \alpha))$;

$A5.$ $\vdash (\exists a)(a \in A) \wedge (\exists a)(a \in B) \wedge \sim (\exists a)((a \in A) \wedge$
$(a \in B)) \to ((A = B) \leftrightarrow (A \Leftrightarrows B))$.

Читаются $A1-A5$ так:

1) мощность подкласса всякого класса не превосходит мощность самого класса;

2) мощность любого непустого класса превосходит мощность любого пустого класса;

3) отношение мощностей пересекающихся классов тождественно отношению мощностей их пересекающихся частей;

4) если классы A и B непусты и не пересекаются, то A превосходит по мощности B, если и только если найдется такой собственный подкласс класса A, который находится во взаимнооднозначном соответствии с B;

5) если классы не пусты и не пересекаются, то они равномощны, если и только если находятся во взаимнооднозначном соответствии.

Таким образом, между классом подклассов класса классов и классом подклассов нет взаимнооднозначного соответствия (они пересекаются, поскольку непусты, и первый содержится во втором), и мощность первого из них не превосходит мощность второго.

В математической теории классов в связи с принятыми уточнениями необходимо сделать коррективы, суть которых мы поясним ниже на примере классов натуральных чисел и четных чисел.

Эти коррективы затрагивают лишь логические основания теории классов.

Прежде всего мы различаем термины чисел и обозначаемые ими числа. Например, термин «единица» есть общий термин, обозначающий единицы 1, 1, 1, «один», 1 и т. п., — любые единицы, которые могут быть написаны, произнесены и т. п. Единиц существует много. Причем две единицы, написанные или произнесенные в разных местах или в разное время, разные представители класса единиц.

Аналогично для прочих чисел.

Класс натуральных чисел (сокращенно *Кнч*), таким образом, состоит не из одной единицы, одной двойки и т. д., а из класса единиц, класса двоек и т. п. Аналогично класс четных чисел (сокращенно *Кчч*) состоит не из одной двойки, одной четверки и т. п., а из класса двоек, класса четверок и т. п.

Утверждение «Между *Кнч* и *Кчч* имеет место взаимнооднозначное соответствие» с точки зрения, излагаемой здесь, неверно, поскольку они непусты и *Кнч* $\subset$ *Кчч*. Правильным будет другое утверждение, которое мы сформулируем ниже.

Пусть α есть класс, в который включается одна и только одна единица, одна и только одна двойка и т. д. для всех натуральных чисел, и никакие другие индивиды в α не включаются. Очевидно, таких классов много. Так, класс α, в который включается записываемая здесь единица 1, и класс α, в который включается записываемая здесь другая единица 1, суть разные классы α. Все α суть подклассы класса натуральных чисел, т. е. $(\forall a)(\alpha \subset$ *Кнч*$)$, где *нч* — термин «натуральное число».

Аналогично пусть β есть класс, в который включается одно и только одно число 2, одно и только одно число 4 и т. д. для всех четных чисел, причем никакие другие индивиды в β не включаются. Очевидно, $(\forall \beta)(\beta \subset$ *Кчч*$)$. Все α и β непусты.

Правильным будет такое утверждение о соотношении α и β: «Для всех α и для всех β, если α и β не пересекаются, то между ними имеет место взаимооднозначное соответствие», т. е. $(\forall \alpha)(\forall \beta)((\sim (\exists a)((a \in \alpha) \wedge (a \in \beta)) \rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta))$.

Имеет смысл допустить некоторый класс-эталон, который есть класс α, но который не пересекается ни с одним из всех прочих классов α. Аналогично для β и вообще для любых классов. Целесообразно также принять допущение, что ни один класс-эталон не пересекается с каким другим классом-эталоном.

§ 18. О методе строгой индукции

Пусть класс A разбит на подклассы $A^1, A^2, A^3, \ldots$, так, что

$$(\forall \alpha)(\alpha \subset A) \wedge (\forall a)(\exists \alpha)((a \in A) \to (a \in \alpha)),$$

где α есть переменная, область значения которой суть термины классов $A^1, A^2, A^3, \ldots$, а a — индивидная переменная. При этом не исключено, что один и тот же индивид будет включаться в различные A^i.

Пусть A^i упорядочены так, что для любой пары из них установлено, какой из них следует по порядку за другим (превосходит по порядку другой), и установлено, какой из них является первым по порядку (т. е. таким, что все остальные превосходят его по порядку).

Будем говорить, что A^k следует по порядку непосредственно за A^i, если и только если нет такого A^l, что A^l превосходит по порядку A^i, а A^k превосходит по порядку A^l.

Пусть A^1 есть первый по порядку из рассматриваемых подклассов класса A, и если A^n есть произвольный из этих подклассов, то A^{n+1} непосредственно следует за *ним по порядку*.

Принцип строгой индукции в общелогической форме можно сформулировать так:

$$(\forall a)((a \in A^1) \to x) \wedge ((\forall a)((a \in A^n) \to x) \to (\forall a)((a \in A^{n+1}) \to x)) \to (\forall a)x$$

(т. е. «Если x верно для всех a, принадлежащих к A^1, и из допущения того, что x верно для всех a, принадлежащих к A^n, следует, что x верно для всех a, принадлежащих к A^{n+1}, то x верно для всех a, принадлежащих к A»).

Используя оператор ограничения терминов $\downarrow$ ($a \downarrow B$ читается как «a такой, что B»), принцип строгой индукции можно записать также в такой форме:

$$(\forall a \downarrow (a \in A^1))x \wedge ((\forall a \downarrow (a \in A^n))x \to \to (\forall a \downarrow (a \in A^{n+1}))x) \to (\forall a)x.$$

Часто используемое в логике доказательство теорем индукцией по числу вхождений логических операторов в формулы есть неявное

применение сформулированного выше принципа строгой индукции. При этом класс формул исчисления разбивается на подклассы по числу вхождений логических операторов следующим образом:

1) первый по порядку подкласс образуют формулы, а которые не входят логические операторы;

2) в n-й по порядку подкласс включаются все формулы, в которые логические операторы входят не более $(n-1)$ раз;

3) $(n+1)$-й подкласс непосредственно следует и по порядку за n-м подклассом.

Формулировка принципа строгой индукции для натуральных чисел (принцип математической индукции) есть лишь частный случай. Причем если эта формулировка имеет вид «Если x верно для 1, и из допущения, что x верно для произвольного натурального числа n, следует, что x верно для $(n+1)$, то x верно для всех натуральных чисел», то с точки зрения концепции, изложенной здесь, необходимо принять еще аксиомную схему

$$(\exists a^i)x \vdash (\forall a^i)x,$$

где a^i есть переменная для чисел i ($i = 1, 2, \ldots$, т. е. a^1 есть переменная для единиц, a^2 — переменная для двоек и т. д.).

Раздел VIII

ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОЙ ЛОГИКИ

Глава 1

Общая теория терминов и высказываний

§ 1. Знаки

В общей теории терминов и высказываний устанавливаются правила построения терминов и высказываний и оперирования ими, являющиеся определениями входящих в них логических (терминообразующих и высказываниеобразующих) операторов. Эта теория является общей теорией определения понятий и вывода (дедукции).

Термины суть знаки. Потому рассмотрению терминов предпошлем рассмотрение того, что такое знак.

Слово «предмет» мы будем употреблять в самом широком смысле: предмет — все то, что может быть как-то воспринято, представлено, названо и т. д. исследователем, короче говоря, — все, что угодно: атом, корова, вселенная, любовь, тот факт, что число четыре делится на два, бог, мировоззрение, способность растворяться в воде и т. п. Предметы будем изображать символами $П, П^1, П^2, \ldots$.

Мы допускаем, что наш исследователь обладает изначальной способностью выделять или выбирать предметы, т. е. способностью «сосредоточить на них свое внимание». Термин «выбор предметов» (выбор) *мы здесь принимаем* как первичный, разъясняемый лишь на уровне обычного языка и с помощью примеров. Исследователь выбирает некоторый предмет, если видит, слышит, представляет, воображает его, употребляет его название, что-то говорит о нем, создает или разглядывает его схему, рисунок, фотографию. Так, исследователь выбирает электрон, разглядывая его след на фотопластинке; выбирает флогистон, заявляя, что флогистон не существует; выбирает тройку чисел x, y и z, записывая равенство $x + y = z$.

Выбор предметов есть элементарное познавательное действие исследователя. Это всегда есть какое-то состояние его природного аппарата отражения. Наглядно это можно представить так: на отражательном

табло исследователя есть особая секция выбора, и если он выбрал некоторый предмет, то в ней зажглась определенная лампочка. Допускаем также, что исследователь умеет различать и отождествлять выбираемые предметы и никаких затруднений на этот счет не испытывает.

Выбор предмета может быть результатом воздействия предмета на исследователя (например, в случае зрительного или слухового его восприятия). Но исследователь может выбрать несуществующий предмет (употребив, например, выражение «круглый квадрат») или предмет, непосредственно не воспринимаемый, благодаря природной способности создавать в своем отражательном аппарате некоторые состояния.

*D*1. Если исследователь выбирает два или более различных предмета, будем говорить, что он сопоставляет эти предметы (или осуществляет их сопоставление).

Сопоставление предметов, очевидно, есть совокупность из двух или более различных актов выбора. Последние могут быть осуществлены одновременно или в какой-то последовательности. Мы допускаем, что у исследователя имеется какая-то способность, которая позволяет объединять два и более различных акта выбора в один сложный акт сопоставления.

*D*2. Пусть каждый раз, когда исследователь выбирает $П^1$, он вслед за этим выбирает $П^2$, будучи поставлен перед необходимостью выбрать какой-то предмет из некоторой совокупности предметов, среди которых имеется $П^2$ (или будучи поставлен перед альтернативой выбирать или не выбирать $П^2$). Будем в таком случае говорить, что исследователь установил соответствие предмета $П^2$ предмету $П^1$ (или что предмет $П^2$ соответствует предмету $П^1$ с точки зрения данного исследователя; или что предмету $П^1$ поставлен в соответствие предмет $П^2$ некоторым исследователем).

Примеры соответствия. Ребенок установил соответствие отца звуку «папа», если каждый раз, когда его просят показать папу, он, услышав звук «папа» (выбрав этот звук как особый предмет) и получив приказание выбрать какой-то предмет из числа окружающих его предметов («покажи!»), выбирает именно отца (т. е. другой предмет, физически отличный от звука «папа»). Гардеробщик установил соответствие определенного крючка на вешалке определенному номерку, если умеет каждый раз по данному номерку найти этот крючок на вешалке (когда требуется, например, выдать пальто). Переводчик с русского на английский выбирает слово «hat» вслед за выбором слова «шляпа» каждый раз, когда нужно русскую фразу со словом «шляпа» перевести на английский язык.

Соответствие устанавливается как решение исследователя считать, что один предмет соответствует другому (и совершать определенные поступки в подходящих условиях вследствие этого своего решения) как стихийно сложившаяся привычка, как навязанная другими исследователями необходимость. Но во всех случаях это есть образование у исследователя способности осуществлять определенные действия, и не более того.

Мы рассмотрели простейший случай соответствия. Через него определяются другие его формы.

*D*3. Предметы $П^1$ и $П^2$ взаимно соответствуют друг другу (имеет место их взаимное соответствие), если и только если каждый из них соответствует другому.

*D*4. Предмет $П^2$ однозначно соответствует предмету $П^1$, если и только если $П^2$ соответствует предмету $П^1$ и никакой другой $П^3$ не соответствует предмету $П^1$.

*D*5. Предметы $П^1$ и $П^2$ взаимнооднозначно соответствуют друг другу, если и только если первый однозначно соответствует второму, а второй — первому.

*D*6. Пусть исследователь специально создает, отбирает, воспроизводит и т. п. предмет $П^1$ для того, чтобы он находился во взаимном соответствии с $П^2$ и только. Другими словами, исследователь навязывает предмету $П^1$ одну-единственную роль — роль предмета, находящегося во взаимном соответствии с $П^2$. Будем в таком случае говорить, что $П^1$ является знаком для $П^2$, а $П^2$ является обозначаемым для $П^1$ (с точки зрения исследователя, конечно). Выражения «предмет $П^1$ обозначает предмет $П^2$» и «предмет $П^2$ обозначается предметом $П^1$» суть лишь литературные вариации сказанного выше. Примеры знаков общеизвестны. Наиболее употребимые знаки — слова языка, жесты, знаки, регулирующие движение транспорта.

Знаки различаются или не различаются физически, т. е. по их видимому, слышимому (воспринимаемому) виду. Если знаки считаются физически тождественными, они суть экземпляры (повторения, воспроизведения) одного и того же знака. Например, слово «стол» и слово «стол» суть экземпляры одного и того же знака, если мы не обращаем внимания на их различия.

Из определения знака следует, что если некоторый предмет считается знаком (называют знаком), то должна иметься возможность выбрать другой предмет, обозначаемый им. Без обозначаемого нет знака, как нет обозначаемого без знака, подобно тому как один человек может считаться начальником лишь при том условии, что другой может быть назван его подчиненным. Речь здесь идет лишь о том, что неко-

торый предмет есть знак лишь для какого-то другого предмета. И если отвлекаются от предметов, обозначаемых данными знаками, последние при этом рассматриваются уже не как знаки, а просто как особого рода предметы (с другой точки зрения).

Кроме того, что знаки находятся в соответствии с обозначаемыми предметами, они имеют и другие свойства. Но в качестве знаков они берутся исключительно с точки зрения их места в соответствии. На роль знаков отбираются удобные для этой цели предметы, а не любые (в частности, легко воспроизводимые, дешевые). Каждый знает, например, что воспроизводить слово — дело сравнительно простое, а дешевизна слов превосходит дешевизну даже картошки. Со временем лишь определенного вида предметы становятся знаками профессионалами (подобно тому, как определенного вида вещи становятся деньгами). И привычка связывать слово «знак» не только с функцией предметов, но и с их воспринимаемым видом приводит к тому, что знаками начинают называть и знакоподобные предметы (какие-то линии на бумаге, звуки).

Обозначаемые предметы могут не существовать и быть недоступными непосредственному восприятию. Но знаки должны быть предметами, которые могут непосредственно восприниматься теми, для кого они предназначены, т. е. должны существовать эмпирически и быть доступными слуху, зрению, осязанию. Знаки, которые невозможно увидеть, услышать — нонсенс. Знак всегда есть нечто ощутимое, а не идеальное.

Образование знаков всецело зависит от исследователя, от его волевого решения. Предметы становятся знаками не в силу каких-то обстоятельств, заложенных в них самих, а по воле и желанию исследователя. Если имеется в виду два или более различных исследователя, то помимо решения одного из них считать некоторые предметы знаками требуется на это согласие других, т. е. аналогичное решение других. Тот факт, что одни люди и одни поколения людей навязывают другим людям и поколениям определенный способ обращения с какими-то предметами как со знаками, сути дела не меняет.

Знаки отличаются от чувственных образов предметов: последние суть состояния исследователя, суть состояния его природного отражательного аппарата, тогда как первые суть предметы, находящиеся вне исследователя, существующие наряду с ним, отделимые от него. Они играют определенную роль в жизни и деятельности исследователя, создаются и используются им, но не являются его собственными состояниями. Совокупность знаков и правил оперирования ими образует знаковый (или искусственный) аппарат отражения. Очевидно, он невозможен без природного (естественного, чувственного) аппарата отражения.

D7. Пусть *З* есть знак для *П*. Предметное значение *З* состоит в том, что он обозначает именно *П*. Другими словами, на вопрос

о том, каково предметное значение знака $З$, исследователь должен каким-то способом нам указать, что именно (какой предмет) этот знак обозначает. Вместо выражения «предметное значение» в дальнейшем для краткости будем употреблять слово «значение».

Значением знака $З$ является не предмет $П$, не «мысли», которые могут появиться в голове исследователя при оперировании $З$, а лишь то, что он обозначает $П$, и исследователю это известно.

Простые знаки соединяются в сложные по каким-то правилам, и в сложном знаке имеется нечто такое, что указывает на них: это — близость и порядок знаков в пространстве и времени, а также какие-то дополнительные предметы, образующие с соединяемыми знаками некоторое физическое целое. Будем эти дополнительные предметы называть знакообразующими операторами. Например, из знаков «число» и «делится на два» посредством знакообразующего оператора «которое» получается новый знак «число, которое делится на два».

Различают смысл и значение знака. Раз простые знаки суть для нас своего рода неделимые, элементарные частицы, то это различие уместно лишь в отношении сложных знаков.

*D*8. Будем говорить, что исследователю известно смысловое значение (или, для краткости, просто смысл) простого знака, если и только если ему известно его значение, и смысловое значение (смысл) сложного знака, если и только если ему известно значение всех знаков, из которых построен этот сложный знак, и известны свойства всех входящих в него знакообразующих операторов. Если исследователю, например, известно значение знаков «число» и «делится на два» и известны правила оперирования оператором «которое», то ему известен смысл знака «число, которое делится на два».

Всегда важно знать, как берется тот или иной знак — как простой или как сложный. Для иллюстрации сложности проблем, связанных со смыслом и значением знаков, обычно привлекают «парадоксы», получающиеся с выражениями «вечерняя звезда» и «утренняя звезда». Если рассматривать эти знаки как сложные знаки, построенные из знаков «вечерняя», «утренняя» и «звезда», то они различны по смыслу (если, конечно, различны по значению знаки «вечерняя» и «утренняя»). При этом вопрос об отношении их значений пока остается открытым. Если они тождественны по значению (обозначают один и тот же предмет), то мы имеем пример знаков, тождественных по значению, но различных по смыслу. Но если эти два знака заведомо берутся просто как различные названия одного и того же предмета, то они берутся как простые знаки, тождественные по значению. Но в качестве простых знаков они тождественны и по смыслу.

Знаки можно рассматривать с точки зрения существования и возможности обозначаемых ими предметов.

D9. Пусть *П* есть обозначаемый для *З*. Если *П* существует (не существует), то *З* называется экзистенциально непустым (пустым) знаком. Если *П* возможен (невозможен), то *З* называется потенциально непустым (пустым) знаком.

Пустой знак имеет смысл и значение. Например, знак «Человек, который весит тонну» экзистенциально пуст, а знак «Круглый квадрат» потенциально пуст. Но эти знаки имеют смысл и значение.

Общая теория знаков интересует нас лишь постольку, поскольку все сказанное выше распространяется на знаки языка как на частный случай. Но теория знаков может быть развита достаточно детально (и строго) как самостоятельная дисциплина.

§ 2. Термины

Терминами могут быть отдельные слова, группы слов, буквы, символы и их комбинации. Какие фрагменты в том или ином языке считаются терминами, вопрос внелогический. Чтобы применять правила логики надо иметь некоторый практический навык расчленения речевого потока на те элементы, для которых эти правила формулируются. Например, чтобы к выражению «все металлы электропроводны» применить правила логической теории кванторов и предикации, надо уметь в этом выражении выделить логический оператор (квантор) «все», термин-субъект «металл», термин-предикат «электропроводен» и оператор предикативности, соединяющий эти термины в целое высказывание, который здесь выражен путем написания терминов рядом в последовательности.

Каждый термин обозначает или называет какие-то предметы (предметом здесь называется все что угодно) — имеет значение. Так, термин «стол» обозначает столы; значение этого термина состоит в том, что он обозначает именно столы, а не предметы другого рода; какие именно предметы обозначаются термином «стол», можно установить путем указания на отдельные видимые столы, путем показывания рисунков и фотографий столов, путем описания столов совокупностью слов и фраз; термином «элементарная частица» в физике обозначают физические предметы, описания и перечисления которых можно найти в соответствующих работах по физике.

Будем говорить, что термин *b* включается по значению в термин *a* (или что предмет *a* есть предмет *b*; или, короче, что *a* есть *b*), если и только если выполняется следующее: любой предмет, обозначаемый

термином a, может быть обозначен также термином b. Например, термин «число» включается по значению в термин «четное число» (или четное число есть число); термин «элементарная частица» включается по значению в термин «электрон» (или электрон есть элементарная частица).

Если a есть b (или термин b включается по значению в термин a), будем это записывать символом

$$a \rightharpoonup b.$$

Если a не есть b (т. е. не всякий предмет, обозначаемый термином a, может быть обозначен также термином b), будем это записывать символом

$$\sim (a \rightharpoonup b).$$

Если $a \rightharpoonup b$ и $b \rightharpoonup a$, то будем говорить, что термины a и b тождественны по значению, и записывать это символом

$$a \rightleftharpoons b.$$

Примеры терминов, тождественных по значению: «ромб» и «равносторонний четырехугольник»; «стол», «der Tisch» и «a table».

Через отношение включения терминов по значению определяются другие отношения терминов, в частности, такое: термин a называется общим (родовым) по отношению к термину b, а термин b при этом называется частным (видовым) по отношению к a, если и только если $b \rightharpoonup a$ и $\sim (a \rightharpoonup b)$. Например, термин «ромб» является видовым по отношению к термину «четырехугольник», а второй является родовым по отношению к первому.

§ 3. Два вида терминов

Возьмем высказывание «Электрон заряжен отрицательно». Оно состоит из терминов «электрон» и «заряжен отрицательно». Но эти термины играют в высказывании различную роль: первый обозначает предмет, о котором говорится; второй же обозначает то, что мы хотим сказать об этом предмете. Термины второго типа называют предикатами, а то, что обозначается ими, — признаками предметов. Термины первого вида называют субъектами.

Предикаты разделяются на одно-, двух-, трех- и т. д. местные в зависимости от того, сколько требуется терминов-субъектов, чтобы образовать высказывание. Так, предикат «заряжен отрицательно» — одноместный, а предикаты в высказываниях «a больше b» и «a находится между b и c» — соответственно являются двухместными и трехместными. Способность различать предикаты таким образом мы предполагаем

данной. Точно также данной предполагается способность различать предикаты и субъекты. В одних случаях это различие очевидно, как в приведенном в начале параграфа примере, в других — требуется некоторое усилие, чтобы предикат обнаружить и выделить. Так, предикатом в высказывании «a больше b» является выражение «первый предмет больше второго предмета», что непосредственно усмотреть в нем нельзя.

Ни один предикат не есть субъект и ни один субъект не есть предикат. Для любых a и b, если один из них есть субъект, а другой предикат, будет иметь силу $\sim(a \multimap b)$ и $\sim(b \multimap a)$. Чтобы «превратить» субъект a в предикат b, или наоборот, надо из a (или из b) и других дополнительных языковых средств построить термин b (соответственно a) по особым правилам.

§ 4. Простые и сложные термины

Из данных терминов и высказываний образуются новые термины с помощью особого рода средств, которые мы будем называть терминообразующими операторами или, короче, Т-операторами. Например, из терминов «элементарная частица» и «заряжена отрицательно» образуется сложный термин «элементарная частица, которая заряжена отрицательно», где слово «которая» играет роль Т-оператора. Из высказывания «Электрон заряжен отрицательно» образуется термин «Тот факт, что электрон заряжен отрицательно» с помощью Т-оператора «тот факт, что».

Термины, которые не расчленяются на другие термины или высказывания и Т-операторы, будем называть логически простыми. Термины же, которые содержат другие термины или высказывания и Т-операторы, будем называть логически сложными.

Какие комбинации слов и букв считаются простыми терминами и какие сложными, логика судить некомпетентна. Так, вопрос о том, является термин «элементарная частица» простым или сложным, есть вопрос внелогический. Этот термин можно, очевидно, рассматривать и как сложный, если его воспринимать как термин вида «частица, которая является элементарной». Но его можно рассматривать и как простой, если считать его вводимым в употребление иным путем как целое.

§ 5. Сложные термины

Один из способов образования сложных терминов — образование пар, троек и т. д., вообще — энок терминов. Будем записывать их символами вида (a, b), $(a, b, c), \ldots, (a^1, \ldots, a^n)$, где $n \geqslant 2$. В высказываниях эти термины обычно не локализованы так, как в этой

форме записи. Например, в высказывании «a больше b» термин, представляющий собой пару терминов (a, b), рассредоточен по различным частям высказывания. Предлагая записывать их в виде $(a^1, \ldots, a^n)$, мы осуществляем абстракцию или схематизируем реальное положение дел. Но эта абстракция правомерна хотя бы уже потому, что любому высказыванию x, в которое входят термины-субъекты $a^1, \ldots, a^n$, можно придать вид высказывания с термином $(a^1, \ldots, a^n)$ без потери информации (как это принято говорить теперь). Например, высказыванию «a находится между b и c» можно придать вид «(a, b, c) таковы, что первый находится между вторым и третьим». Предметы, обозначаемые терминами такого типа, будем называть парами, тройками и т. д., вообще — энками предметов. Читать $(a^1, \ldots, a^n)$ можно будет также как «Энка предметов $a^1, \ldots, a^n$».

Пусть a есть субъект, P есть предикат, x есть высказывание. Из них можно образовать сложные термины «a, который имеет признак P», «a такой, что P», «a такой, что верно x», «a такой, что x», «a, в отношении которого имеет силу x» и т. п. Здесь используется Т-оператор, который мы будем называть оператором ограничения (или оператором «который», «такой, что») и будем изображать его символом $\downarrow$. Термины с этим оператором будем записывать символами вида $a \downarrow P$, $a \downarrow x$, $(a^1, \ldots, a^n) \downarrow x$ и т. п. Примеры таких терминов: «Частица, которая заряжена отрицательно», «Пара чисел такая, что одно число больше другого», «Число a такое, что число a есть простое число». С оператором ограничения образуются также термины с отрицаниями. Например, «Частица, которая не заряжена отрицательно».

§ 6. Вхождение терминов и высказываний в другие термины и высказывания

Термины и высказывания могут быть частями других терминов и высказываний в роли терминов и высказываний и в роли физических тел (звуков, линий на бумаге) определенного вида. В первом случае будем говорить о вхождении в качестве термина или высказывания, во втором — о физическом вхождении. Например, в выражение «высказывание x истинно» высказывание x входит физически, а в выражение «если x, то y» — в качестве высказывания. В выражение «термин “стол” есть субъект» слово «стол» входит физически, а в выражение «стол деревянный» — как термин. Точное разграничение этих случаев производится в логике путем перечисления структур языковых выражений, в которые термины и высказывания входят именно в качестве таковых. Общий же принцип таков: если согласно принятым правилам образования терминов из предположения, что $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть

термины (или высказывания), а $b^1, \ldots, b^m$ $(m \geqslant 1)$ суть логические операторы, следует, что выражение A, образованное из $a^1, \ldots, a^n$, $b^1, \ldots, b^m$ по этим правилам, есть термин (или высказывание), то термины (высказывания) $a^1, \ldots, a^n$ и само A входит в A в качестве терминов (или высказываний).

Учитывая сказанное выше, можно принять такое правило: если $a \rightleftharpoons b$, и термин d образуется из термина c путем замены одного или более вхождений a в c в качестве термина на b, то $c \rightharpoonup d$. Из этого правила (при тех же ограничениях на вхождение) следует: если $a \rightleftharpoons b$, то $c \rightleftharpoons d$.

§ 7. Метатермины и метавысказывания

Термины, обозначающие термины и высказывания, суть метатермины. Высказывания, содержащие метатермины, суть метавысказывания. Например, выражение «термин “стол”» есть метатермин по отношению к термину «стол», а высказывание «Термин “стол” является простым» — метавысказыванием.

Всякий метатермин есть субъект. Никаких метапредикатов не существует. Если a есть предикат, а b есть обозначающий его термин, b все равно есть субъект.

Особое значение имеют метатермины, в образовании которых участвуют сами обозначаемые термины и высказывания, в том числе — термины типа «термин a», «субъект a», «предикат a», «высказывание a». Будем их обобщенно и схематично записывать символами типа ma, где a есть обозначаемый термин или высказывание. Для таких терминов имеют силу следующие негативные правила:

1) $\sim(a \rightharpoonup ma)$;
2) $\sim(ma \rightharpoonup a)$;
3) если $a \rightharpoonup b$, то из этого не следует, что $ma \rightharpoonup mb$;
4) если $a \rightleftharpoons b$, то из этого не следует, что $ma \rightleftharpoons mb$.

Создается иллюзия, будто a входит в ma в качестве термина или высказывания. Но это не так. На самом деле a входит в ma как совокупность физических предметов (звуков, линий и т. п.), образующих материю языка. Выражение ma следует для большей ясности читать как «термин (субъект, предикат, высказывание), который пишется, произносится и т. п. так: a». Особенность ma состоит в том, что в нем вещественно содержится обозначаемый термин или высказывание a, который в составе ma уже не является термином или высказыванием. Термин или высказывание a не входит в ma в качестве термина или, соответственно, высказывания.

Если допустить, что a входит в ma в качестве термина, получим следующее. Если $a \rightleftharpoons b$, то по правилу подстановки из § 6 получим, что $ma \rightleftharpoons mb$. Но если a и b по воспринимаемому виду (физически) различны, то ma и mb будут обозначать различные предметы, причем ma не будет обозначать b, а mb не будет обозначать a. Значит, будет неверно $ma \rightleftharpoons mb$. Чтобы избежать таких парадоксов, надо точно фиксировать случаи, когда термины и высказывания входят в языковые выражения в качестве терминов и высказываний, и случаи, когда они входят как физические вещи (как это, в частности, сделано выше).

Возьмем предложение «N утверждает, что писатель Лев Толстой есть автор романа "Анна Каренина"». Из него логически нельзя получить предложение «N утверждает, что писатель Лев Толстой есть писатель Лев Толстой», хотя термин «писатель Лев Толстой» тождественен (по допущению) термину «автор романа "Анна Каренина"». Дело в том, что исходное предложение имеет такое логическое строение. Субъекты его суть термины «N» и высказывание «Лев Толстой есть автор романа "Анна Каренина"». Второй термин, как видим, есть термин типа ma. Предикат его есть выражение «первый утверждает второе». Так что высказывание «Писатель Лев Толстой есть автор романа "Анна Каренина"» не входит в рассматриваемое предложение в качестве высказывания, а термины высказывания «Писатель Лев Толстой есть автор романа "Анна Каренина"» и высказывание «Писатель Лев Толстой есть писатель Лев Толстой» не тождественны по значению.

Заметим кстати, что употреблявшиеся выше выражения $a \rightharpoonup b$ и $a \rightleftharpoons b$ нельзя рассматривать как состоящие из терминов-субъектов a и b и предикатов $\rightharpoonup$ и $\rightleftharpoons$. Они суть выражения, состоящие из терминов-субъектов ma и mb и предикатов $\rightharpoonup$ и $\rightleftharpoons$.

Законы логики вообще суть метавысказывания, субъекты которого суть метатермины ma, где a есть термин или высказывание, а предикаты суть $\vdash$, $\rightharpoonup$, «истинно», «ложно», «доказуемо» и т. п. Логика есть метанаука по отношению ко всем прочим наукам и, кстати сказать, — единственная метанаука вообще, если считать необходимым признаком науки обобщенное изучение той или иной области предметов. Так что законами логики являются не утверждения вида $x \vee \sim x$, $x \wedge y \supset x$ и т. п., как принято думать, но либо метаутверждения вида $\vdash (x \vee \sim x)$, $x \wedge y \vdash x$ и т. п., либо метаутверждения вида «$m(x \vee \sim x)$ есть тавтология, если приняты какие-то таблицы истинности для $\vee$, $\sim$ и такое-то определение тавтологии», «из $m(x \wedge y)$ следует mx».

Еще одно замечание, к которому читатель может вернуться после прочтения § 12 и § 15. Для любого предиката P смысл $P(a)$ и $P(ma)$ устанавливается независимо друг от друга. Значения истинности $P(a)$ и $P(ma)$ также не имеют логической связи. Например, высказывание «Флогистон существует» неистинно, а высказывание «Термин "фло-

гистон" существует» истинно. Однако здесь имеет место такая зависимость: смысл *та* известен, если и только если известен смысл *а*; и если *а* не есть термин, то *та* не есть термин.

§ 8. Смысл терминов

Будем говорить, что исследователю (т. е. тому, кто имеет дело с терминами) известен смысл термина, если и только если ему известно значение всех терминов, входящих в данный термин, и известны свойства всех логических операторов, входящих в этот термин.

Например, смысл термина «число, которое делится на два без остатка» нам известен, если и только если нам известно значение терминов «число» и «делится на два без остатка» и известны свойства оператора «который». Свойства этого оператора определяются в логике.

Примем утверждение: если исследователю известен смысл термина, то ему известно и значение этого термина.

Принятое утверждение дает нам средство устанавливать значение терминов путем установления их смысла. Например, значение термина «круглый квадрат» можно установить (узнать) одним единственным путем, а именно — установив значение терминов «квадрат» и «круглый» и свойства оператора «который» (он здесь не выражен явно; в более явном виде этот термин имеет такое строение: «Квадрат, который является круглым»). Значительная часть терминов современной науки такова. Подчеркиваем то обстоятельство, что если мы указываем значение термина путем установления его смысла, ничего иного более не требуется. Если мы, например, на вопрос о том, каково значение термина «круглый квадрат», помимо разъяснения значения терминов «круглый» и «квадрат» и свойство оператора «который» будем еще примысливать что-то дополнительное, мы совершим логическую ошибку. В таких случаях надо вовремя остановиться. Чрезмерные поиски значения термина ничуть не лучше, чем недостаточные.

§ 9. Термины из высказываний

Из высказываний образуются термины-субъекты по следующей схеме: если x есть высказывание, то выражение «тот факт, что x» (или «то, что x») есть термин, причем — субъект. Здесь выражение «тот факт, что» (или «то, что») играет роль Т-оператора. Будем термины такого вида записывать символами вида $\downarrow x$, где x есть высказывание, а $\downarrow$ есть Т-оператор «тот факт, что».

Из высказываний также образуются термины предикаты по такой схеме: если x есть высказывание, то выражение «такой, что x» («таков,

что x», «характеризуется тем, что x») есть термин, причем — предикат. Будем такие термины записывать символами вида $x\downarrow$, где $\downarrow$ есть Т-оператор «такой, что».

§ 10. Определения

Определения терминов суть один из способов введения терминов в язык. Но это — наиболее важный способ.

Возьмем такое простое определение: «Ромб есть равносторонний четырехугольник». Его можно записать также в другой форме: «Ромбом называется равносторонний четырехугольник» или «Будем ромбом называть равносторонний четырехугольник». Но при всех вариациях остается незыблемым следующее:

1) благодаря определению вводится новый термин «ромб»;
2) принимается решение считать слово «ромб» термином, равнозначным термину «равносторонний четырехугольник».

Так что если выявить полностью логическое строение этого определения, оно примет такой вид: предмет вида «ромб» (слово «ромб») будем считать термином таким, что «ромб» $\rightleftharpoons$ «равносторонний четырехугольник». Термин «ромб» здесь называется определяемым, а термин «равносторонний четырехугольник» — определяющим. Второй является сложным термином типа $a\downarrow P$ («четырехугольник, который является равносторонним», или «четырехугольник, все стороны которого равны между собою»). Его значение считается известным. Значение первого (определяемого) известно лишь благодаря тому, что он считается равнозначным второму (определяющему).

Выше мы рассмотрели пример определений, которые строятся по такой общей схеме: «Будем считать предмет a термином таким, что $a \rightleftharpoons b$, где b есть термин». Сокращенно это записывается в виде

$$a = Df \cdot b.$$

В другой форме это определение читается так: a согласно нашему решению (по определению) есть термин, тождественный по значению термину b. Такие определения практически целесообразны лишь тогда, когда b есть сложный термин, а a есть либо простой термин, либо содержит вновь вводимый простой термин.

Рассматриваемые определения бывают двух видов: 1) а есть простой термин; 2) а есть сложный термин, содержащий простой. Например, выражение «доказуемая формула» содержит термин «формула», значения которого известно, и вновь вводимый термин «доказуемая», который определяется применительно к формулам.

Формы определений разнообразны. Часто встречающееся определение путем указания рода и видового отличия имеет строение

$$a = Df \cdot b \downarrow P,$$
$$a = Df \cdot b \downarrow x,$$

где P есть видовой признак некоторых из предметов b, а x — высказывание, в котором говорится о видовом признаке. Определение a через $b \downarrow x$ не обязательно родо-видовое. Возьмем такое определение: термином a будем называть предметы b такие, которые не являются предметами c и d. Здесь не указано никакого видового признака P. Здесь просто произведено исключение: a суть все b, кроме c и d.

Определение через перечисление видов a строится по такой схеме: пусть a будет термином таким, что b^1 есть $a, \ldots, b^n$ есть a, и никакой другой предмет не есть a (или $b^1, \ldots, b^n$ и только эти предметы суть a).

Если принято определение $a = Df \cdot b$, то принимается утверждение $a \rightleftharpoons b$. Если принято определение через перечисления видов a, то принимается множество утверждений:

1) $b^1 \rightarrow a, \ldots, b^n \rightarrow a$;

2) если $\sim(c \rightarrow b^1), \ldots, \sim(c \rightarrow b^n)$, то $\sim(c \rightarrow a)$, где c не содержит a и не определяется через a.

Более сложной формой определения через перечисление являются рекурсивные определения. Простейшие из них строятся по такой схеме. Пусть a будет термином таким, что

1) $b^1 \rightarrow a, \ldots, b^n \rightarrow a$ (где $n \geqslant 1$);

2) если $c^1 \rightarrow a, \ldots, c^m \rightarrow a$ (где $m \geqslant 1$), то $d^1 \rightarrow a, \ldots, d^k \rightarrow a$ (где $k \geqslant 1$);

3) ничто другое, кроме указанного в пунктах 1 и 2, не есть a.

Более сложными по другой линии являются определения, когда одновременно определяются два и более термина, — комплексы терминов. При этом между терминами могут иметь место различные типы логической зависимости. Примером такого рода определений в рамках самой логики являются определения комплексов логических операторов совместно с предикатом логического следования, как увидим далее. В формальной арифметике совместно определяются знаки «один», «ноль» и «плюс». Общая схема таких определений имеет вид:

1) требуется определить $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$;

2) чтобы определить отдельный из a^i, необходимо использовать какой-то другой из них, который сам нуждается в первом;

3) строится более или менее сложный текст из некоторого множества высказываний, в котором фигурируют $a^1, \ldots, a^n$ и который устанавливает правила оперирования ими в других контекстах.

В дальнейшем мы несколько подробнее рассмотрим другие виды определений, играющие в нашем изложении первостепенную роль. Определения языковых выражений в данной работе есть вообще главная задача. Но чтобы на эту тему говорить более строго и более детально, надо на время обратиться к высказываниям.

§ 11. Высказывания

Высказывания суть особого рода языковые конструкции, образованные из терминов, высказываний и высказываниеобразующих операторов (В-операторов).

Простейшие высказывания состоят из субъекта, предиката и оператора предикативности, соединяющего субъект и предикат в целое. Примеры таких высказываний: «Электрон заряжен отрицательно», «7 больше 5», «Число 5 простое» и т. п. Будем их изображать символами типа $P(a)$ и $P(a^1, \ldots, a^n)$, где $n \geqslant 2$, и прочитывать в этих схемах как «Предмет a имеет признак P» и «Предметы $a^1, \ldots, a^n$ таковы, что P» (или «Энка предметов $a^1, \ldots, a^n$ имеет признак P»). Разумеется, это — схематизация. Навык приведения высказываний конкретных языков к такому виду предполагается данным.

Приведем В-операторы, с помощью которых из данных высказываний (в конечном счете — из простых) образуются новые высказывания:

1) $\wedge$ — конъюнкция («и»; «каждый из»);

2) $\vee$ — ослабленная дизъюнкция («или»; «по крайней мере один из»);

3) : — сильная дизъюнкция («либо, либо»; «один и только один из»);

4) $\sim$ — внешнее отрицание («не»; «не так»);

5) $\rightarrow$ — оператор условности («если, то»);

6) $\leftrightarrow$ — оператор обратимой условности («если и только если»);

7) $\forall$ — квантор общности («все»);

8) $\exists$ — квантор существования («некоторые»);

9) $\neg$ — внутреннее отрицание (читается так же, как внешнее, только располагается в высказываниях иначе);

10) ? — оператор неопределенности (поясним его ниже).

Отношение этих операторов к соответствующим средствам языка поясним на примере конъюнкции. Во-первых, в логике в качестве конъюнкции используются различные символы помимо $\wedge$, в частности — $\&$, K и т. п. Во-вторых, в различных языках и в различных ситуациях в одном и том же языке роль $\wedge$ (конъюнкции) может выполнять не только слово «и», но и другие средства, в частности — «но», запятая, точка с запятой, «а также», «кроме того» и т. п. И, в-третьих,

упомянутые языковые средства, помимо того, что они играют иногда роль конъюнкции, выполняют и другие функции. Так что логика, вводя оператор конъюнкции, абстрагирует лишь некоторое свойство различных языковых средств и рассматривает его как таковое, — метод, общий логике с другими науками.

Высказывания с операторами (1–10) имеют такое логическое строение:

1) $x \wedge y$ — «x и y»,
$(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n)$ — «x^1 и x^2 и ... и x^n» («Каждое из $x^1, x^2, \ldots, x^n$»);

2) $x \vee y$ — «x или y»,
$(x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n)$ — «x^1 или x^2 или ... или x^n» («По крайней мере одно из $x^1, x^2, \ldots, x^n$»);

3) $x : y$ — «Либо x, либо y»,
$(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$ — «Одно и только одно из $x^1, x^2, \ldots, x^n$»;

4) $\sim x$ — «Не x» («Не так, как говорится в x»);

5) $x \rightarrow y$ — «Если x, то y»;

6) $x \leftrightarrow y$ — «x, если и только если y» (или «Если x, то y; если y, то x»);

7) $(\forall a)x$ — «Все a таковы, что x» («Все ax»; «Для всех ax»);

8) $(\exists a)x$ — «Некоторые a таковы, что x»;

9) $\neg P(a)$ — «Предмет a не имеет признака P» («a не имеет P»);
$(\neg \forall a)x$ — «Не все a таковы, что x»;
$(\neg \exists a)x$ — «Нет таких a, что x»;

10) $?\, P(a)$ — «Нельзя сказать, что $P(a)$ и $\neg P(a)$» («Не-$P(a)$ и не-$\neg P(a)$»; «Не известно, $P(a)$ или $\neg P(a)$»);
$(?\forall a)x$ — «Не-$(\forall a)x$ и не-$(\neg \forall a)x$» («Нельзя установить, $(\forall a)x$ или $(\neg \forall a)x$»);
$(?\exists a)x$ — «Не-$(\exists a)x$ и не-$(\neg a)x$» («Нельзя установить, $(\exists a)x$ или $(\neg a)x$»).

Приведенные выше структуры высказываний не исчерпывают всех возможных видов высказываний. Другие виды высказываний образуются за счет введения производных В-операторов, за счет усложнения строения терминов и перераспределения их частей в языковых конструкциях. Например, высказывание $P(a)$, в котором a есть термин «b при условии c», может быть преобразовано в высказывание «$P(b)$ при условии c», в котором ссылка на условия вынесена из субъекта как особая часть высказывания.

§ 12. Смысл высказываний

Будем говорить, что известен смысл высказывания, если и только если известен смысл всех входящих в него терминов и известны свойства всех входящих в него логических операторов.

Два высказывания x и y будем считать тождественными по смыслу, если и только если $sx \rightleftharpoons sy$. Будем тождество высказываний по смыслу изображать символами вида $x \equiv y$.

Очевидно, если $x \equiv y$ и $y \equiv z$, то $x \equiv z$. Согласно правилу замены, приведенному в § 7, имеем также следующее следствие: если $x \equiv y$, и при этом v образуется из z путем замены одного или более вхождений x в z в качестве высказывания на y, то $z \equiv v$.

§ 13. Определения с высказываниями

Термины могут вводиться в употребление так, что при этом определяются сразу целые высказывания, т. е. как части высказываний. Определения эти строятся по такой схеме: «Будем считать x высказыванием таким, что $x \equiv y$», где y есть данное высказывание или совокупность высказываний. Сокращенно будем это определение записывать символами вида

$$x \equiv Df \cdot y,$$

где x есть определяемое высказывание, содержащее определяемый термин, а y — данное высказывание, через которое определяется x (т. е. определяющее высказывание).

Если принимается определение $x \equiv Df \cdot y$, то тем самым принимается утверждение $x \equiv y$.

Чаще (и это удобнее) определения такого рода записываются в такой форме: «Будем говорить, что x, если и только если y». Например, «Будем говорить, что формула доказуема в S, если и только если она есть аксиома S или получается из аксиом по правилам вывода S». В такой форме просто элиминирована часть средств определения (например, ссылка на смысл высказываний), что облегчает вывод следствий из определения. Но при этом природа определения не выражается явно, что имеет свои недостатки.

С помощью определений рассматриваемого вида определяются предикаты и логические операторы. Например, операторы сильной дизъюнкции, обратимой условности и неопределенности можно опре-

делить через другие следующим образом:

$$(x : y) \equiv Df \cdot (x \vee y) \wedge (\sim x \vee \sim y),$$
$$(x \leftrightarrow y) \equiv Df \cdot (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x),$$
$$?P(a) \equiv Df \cdot \sim P(a) \wedge \sim \neg P(a),$$
$$(?\forall a)x \equiv Df \cdot \sim (\forall a)x \wedge \sim (\neg \forall a)x,$$
$$(?\exists a)x \equiv Df \cdot \sim (\exists a)x \wedge \sim (\neg \exists a)x.$$

Примеры определения предикатов ниже будут приводиться в большом числе. Здесь ограничимся абстрактными, зато более наглядным примером:

$$P(a) \equiv Df \cdot Q^1(a) \wedge Q^2(a) \wedge \neg kQ^3(a),$$

где Q^1, Q^2, Q^3 суть какие-то признаки, а предикат P вводится в интересах сокращения.

Определения вида $a \equiv Df \cdot b$ дают право повсюду заменять вхождение b в качестве термина на a, и наоборот. Определения же вида $x \equiv Df \cdot y$ дают право заменять вхождение x в качестве высказывания на y, и наоборот. Если при этом происходит замена терминов, то лишь как следствие замены высказываний.

Определения обоих указанных видов дают возможность заменять некоторые языковые комплексы на более удобные с какой-то точки зрения (например, на более компактные, на интуитивно ясные и т. п.). Например, слово «ромб» короче и удобнее в обращении, чем группа слов «равносторонний четырехугольник»; выражение $x : y$ короче, чем $(x \vee y) \wedge (\sim x \vee \sim y)$. Без такого рода сокращений и замен, начиная с некоторого момента, становится практически невозможным фиксирование знаний и оперирование ими. Отыскание наиболее удобных форм сокращения есть одна из важнейших задач построения языка науки вообще.

§ 14. Определение предикатов

Об определении предикатов следует сказать особо. Предикаты определяются как части сложных терминов или как части высказываний. Это связано со следующей их особенностью. Чтобы как-то указать, какой признак обозначает данный предикат P, надо указать какие-то предметы, обладающие этим признаком. Признаки предметов всегда суть признаки каких-то предметов и не могут существовать отдельно и независимо от них. Так что если предикат P вводится в употребление посредством определения, то определяется не P само по себе, а термин типа $a \downarrow P$, $sP(a)$ и т. п. или высказывание x, содержащее P.

С этой особенностью предикатов связана другая. Предикаты определяются для более или менее широкого круга заданных субъектов (предметов) и не всегда для любых субъектов. Если мы, например, определили P, определив для этого $a \downarrow P$ или $sP(a)$, то сфера приложимости P зависит целиком и полностью от степени общности a. Если $b \rightharpoonup a$, то P применим к b, выражение $b \downarrow P$ есть термин, а $P(b)$ — высказывание. Если же $\sim(b \rightharpoonup a)$, и нет такого термина c, для которого построено определение термина $c \downarrow P$ или высказывания $P(c)$ и для которого $b \rightharpoonup c$, то $b \downarrow P$ не есть термин, а $P(b)$ не есть высказывание. Это суть бессмысленные языковые выражения, лишь похожие на термины и высказывания. И любое выражение, содержащее их с претензией на вхождение термина и высказывания, не есть термин и высказывание.

Например, предикат «четный» определен лишь для терминов целых чисел и не определен, допустим, для терминов металлов. Выражение «четная медь» вообще не есть термин. Аналогично не есть термин выражение «желтый интеграл», а выражения «интеграл является желтым» и «интеграл не является желтым» не являются высказываниями. И нельзя сказать, что они неистинны, так как предикат «неистинно» определяется только для выражений, которые суть высказывания.

Лишь в случае, если a есть термин «предмет», определение термина $a \downarrow P$ или высказывания $P(a)$ есть определение P для любых предметов, поскольку для такого a имеет силу следующее: для любого термина b, если b есть субъект, то $b \rightharpoonup a$.

§ 15. Значения истинности высказываний

Общеизвестна оценка высказываний как истинных и ложных. К ним теперь присоединяют еще неопределенность, непроверяемость, неразрешимость и т. п. Выражения «истинно», «ложно», «неопределенно» и т. д. считаются терминами (или знаками) значений истинности высказываний или истинности значений. Ниже мы сформулируем основные принципы, относящиеся к значениям истинности высказываний.

Во-первых, термин «истинно» должен быть определен как предикат высказываний вида «Выражение x истинно».

Во-вторых, в зависимости от различий в структуре высказываний x определение термина «истинно» должно быть различным. Например, термин «истинно» для высказываний $x \wedge y$ с оператором $\wedge$ и высказываний $x \vee y$ с оператором $\vee$ определяется различно (иначе эти операторы не будут различаться). Независимо от строения x уместно лишь такое определение: «x истинно» $\equiv Df \cdot x$ («x истинно, если и только если x»).

Это определение дает правило введения предиката «истинно» в язык и элиминации из него как излишнего.

В-третьих, для простых высказываний термин «истинно» принимается без определения. Здесь достаточно ограничиться пояснением и правилом, о котором говорилось во втором пункте. Приняв термин «истинно» для простых высказываний, можно затем определить его для сложных высказываний через эти случаи. При этом определения должны быть построены так, чтобы всегда выполнялось правило, указанное во втором пункте.

В-четвертых, все остальные значения истинности определяются через значение «истинно». Например, значение «неистинно» определяется так: «x неистинно» $\equiv Df\cdot$ «x не является истинным» или «x неистинно» $\equiv Df\cdot$ «$\sim x$ истинно». Другой пример — определения значений «неопределенно» и «ложно» для высказываний типа: $P(a)$: 1) «$P(a)$ ложно» $\equiv Df\cdot$ «$\neg P(a)$ истинно»; 2) «$P(a)$ неопределенно» $\equiv Df\cdot$ «$\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$ истинно».

Таким образом, все термины значений истинности в конце концов могут быть элиминированы из языка, и соответствующие выражения с ними заменены на выражения с термином «истинно», а последний вообще может быть устранен из языка по правилу замены выражений «x истинно» на x. Но это никак не означает того, что эти термины вообще излишни. Они удобны для установления целого ряда логических операций, а начиная с некоторого момента, они практически необходимы как сильное средство сокращения сложных языковых конструкций в компактные и обозримые.

Значение «истинно» может быть элиминировано из языка, но его нельзя устранить из ситуации, в которой употребляются высказывания. Оно выражает отнесение высказываний к состояниям, выражает акт принятия высказываний или согласия с тем, о чем в них говорится. Так что замена «x истинно» на x означает, что признание x выражается не языковыми средствами (не предикатом «истинно»), а как-то иначе (самим фактом произнесения или написания x, как это чаще всего и делается).

Сводимость всех значений истинности к значению «истинно» означает следующее. Утверждая, что x имеет некоторое значение истинности a, мы тем самым признаем, что имеет место некоторое состояние, описываемое высказыванием y, причем определение a должно быть построено так, чтобы из него можно было вывести утверждение «x имеет значение истинности a, если и только если y».

Наконец, для каждого значения истинности имеет силу утверждение: любое высказывание либо имеет это значение истинности, либо не имеет его. В частности, каждое высказывание либо истинно, либо не является истинным; либо ложно, либо не является ложным и т. п.

Встречающееся в языке слово «истина» есть лишь сокращение для выражения «высказывание, которое истинно»; аналогично для прочих значений истинности.

§ 16. Число значений истинности

Возьмем простейшее высказывание $P(a)$, например — «Частица a находится в области пространства b». Возможны такие случаи:

1) частицу a невозможно наблюдать;
2) частицу a возможно наблюдать.

Во втором случае мыслимы такие подслучаи:

а) частица a действительно находится в области пространства b;
б) частица a не находится в области пространства b;
в) частица a движется так, что нельзя сказать, что она находится в b, и нельзя сказать, что она не находится в b.

Таким образом, для $P(a)$ возможно ввести в употребление четыре термина значений истинности, соответствующие приведенным выше четырем возможностям. Они и вводятся только для того (если на самом деле вводятся), чтобы обозначить, какая именно из этих возможностей признается. Пусть, например, приняты определения:

1) $P(a)$ непроверяемо, если и только если a невозможно наблюдать;
2) $P(a)$ истинно, если и только если a можно наблюдать и на самом деле a имеет признак P;
3) $P(a)$ неопределенно, если и только если a можно наблюдать, но невозможно установить, имеет a признак P или нет;
4) $P(a)$ ложно, если и только если a можно наблюдать и при этом a не имеет признак P.

И если мы теперь будем утверждать, что, например, высказывание $P(a)$ ложно, то это будет означать лишь то, что мы принимаем (признаем) следующее: a можно наблюдать, a не имеет P.

Еще большие возможности открываются для высказываний с более сложными структурами. Так что в принципе число значений истинности не ограничено. Сколько их на самом деле фигурирует в языке, зависит от практической целесообразности. До последнего времени обходились двумя значениями «истинно» и «ложно», причем ложность понималась как отрицание истинности (как «неистинно»). В последние десятилетия все чаще стали употреблять третье значение — «неопределенно». В связи с этим термин «ложно» оказался двусмысленным: он стал обозначать одно из значений истинности наряду с «истинно» и «неопределенно»,

а с другой стороны он сохранил смысл отрицания истинности. Это ведет к различного рода недоразумениям.

Мы будем употреблять в качестве отрицания истинности термин «неистинно», приняв такое определение: высказывание неистинно (или является неистинным), если и только если оно не является истинным. Термин же «ложно» мы будем употреблять как обозначение одного из значений истинности, которое лишь иногда полностью совпадает со значением «неистинно», а именно — когда высказывание может принять только одно из двух значений «истинно» и «ложно». Так что если высказывание ложно, то оно неистинно; но если высказывание неистинно, из этого не следует, что оно ложно: оно может быть непроверяемо, неопределенно и т. п.

Очевидно, всякое высказывание либо истинно, либо неистинно. Но не всегда (при условии принятого соглашения) верно, что высказывание либо истинно, либо ложно: высказывание может быть неопределенным, т. е. не быть истинным и не быть ложным.

§ 17. Координаты высказываний

Значения истинности некоторых высказываний зависят от места и времени их использования. Например, высказывание «Окно открыто» может быть истинно в отношении одного окна и неистинно в отношении другого (которое закрыто), может быть истинно в отношении некоторого окна в одно время и неистинно в отношении этого же окна в другое время. Будем называть такие высказывания локальными. К числу локальных высказываний относятся высказывания, значения истинности которых могут меняться в зависимости от индивидов, с которыми их соотносят. Но поскольку различные индивиды так или иначе различаются по положению в пространстве и времени, то смена индивида, с которым сопоставляют высказывание, есть изменение области пространства или времени использования высказывания. Аналогично — зависимость значений истинности высказываний от условий сводится к зависимости от места и времени (изменение условий предполагает смену места или другое время).

Будем называть координатами высказывания x место, время, условия и т. п., в которых используется x и устанавливается его значение истинности. Координаты высказываний обычно предполагаются неявно, иногда не играют роли, иногда фиксируются особыми знаками. При формулировке правил логики и применении их, однако, важно всегда предполагать, что они так или иначе могут быть учтены. Возьмем, например, высказывание «Если $P(a)$, то $Q(a)$». Чтобы оперировать им правильно, в случае локальности входящих в него высказываний необходимо соблюдать тождество координат для $P(a)$ и $Q(a)$, в частности,

если выбран индивид b такой, что b есть a в первом из них, то тот же индивид должен быть выбран и во втором. Если дано, что x истинно и y истинно, то мы имеем право признать истинным $x \wedge y$ лишь при условии тождества координат для x, y и $x \wedge y$ (в случае, конечно, если высказывания x и y локальны).

Между координатами a и высказыванием x никакой логической связи не предполагается. Координаты суть обособившаяся часть высказывания, и при логических операциях с x во избежание ошибок эту часть a надо как-то ассоциировать с x, т. е. оперировать высказыванием «x при a».

Высказывания, значения истинности которых не меняются с изменением координат (которые имеют одно и то же значение истинности в любых координатах), будем называть универсальными. Примеры универсальных высказываний: «Все четные числа делятся на два без остатка», «Электрон заряжен отрицательно», «5 > 3», «Человек смертен» и т. п.

С учетом корректив относительно координат высказываний правила логики в одинаковой мере относятся как к универсальным высказываниям, так и к локальным. Первые характерны для точных наук, и поскольку для них предполагаются любые координаты (т. е. координаты безразличны), ссылки на последние вообще опускаются. Вторые характерны для опытных наук, и в ряде случаев выявление координат для них играет существенную роль.

§ 18. Значение истинности высказываний с операторами конъюнкции, дизъюнкции и отрицания

Предикаты «истинно» и «неистинно» для высказываний с операторами $\sim, \vee, \wedge$ определяются так:

1^1. $(x \wedge y)$ истинно, если и только если x истинно и y истинно;

1^2. $(x \wedge y)$ неистинно, если и только если по крайней мере одно из x и y неистинно;

2^1. $(x \vee y)$ истинно, если и только если по крайней мере одно из x и y истинно;

2^2. $(x \vee y)$ неистинно, если x неистинно и y неистинно;

3^1. $\sim x$ истинно, если и только если x неистинно;

3^2. $\sim x$ неистинно, если и только если x истинно.

Явные определения отличаются от приведенных лишь тем, что «если и только если» заменяется на $\equiv Df \cdot$. Неявным определениям для краткости и наглядности придают форму таблиц.

Из сказанного очевидно, что термин «истинно» имеет различный смысл в зависимости от того, к каким видам высказываний $x \wedge y$, $x \vee y$, $\sim x$ и т. д. он относится. И никакого единого и общего смысла, независимого от структуры высказываний, он не имеет. Он вообще не имеет никакого смысла сам по себе, безотносительно к высказываниям, предикатами которых он является. Аналогично для термина «неистинно».

Более того, термины значений истинности могут иметь различный смысл даже для высказываний с одной и той же структурой в зависимости от числа употребляемых значений истинности. Пусть, например, введены в употребление три значения истинности — «истинно», «неопределенно» и «ложно». Для высказывания вида $\sim x$ возможны такие определения термина «истинно»:

1) $\sim x$ истинно, если и только если x ложно;

2) $\sim x$ истинно, если и только если x неопределенно или x ложно.

Для высказывания $x \wedge y$ возможны такие определения термина «ложно»:

1) $x \wedge y$ ложно, если и только если по крайней мере одно из x и y ложно;

2) $x \wedge y$ ложно, если и только если одно из x и y ложно или неопределенно, а другое из них ложно или истинно.

Возможности для таких вариаций возрастают с ростом числа значений истинности.

Если термины значений истинности считаются данными (например, первично ясными), то рассмотренные выше определения (и вообще определения такого рода) могут рассматриваться как определения логических операторов $\sim$, $\vee$, $\wedge$. Принципиальная схема определений при этом имеет следующий вид: оператор $\sim$ по определению обладает такими свойствами, что если x истинно (неистинно), то $\sim x$ неистинно (истинно); оператор $\wedge$ обладает такими свойствами, что $x \wedge y$ истинно, если и только если x истинно и y истинно; и т. д. для прочих случаев и для $\vee$.

В зависимости от числа значений истинности здесь возможны различные вариации операторов. Пусть, например, значения истинности суть «истинно», «неопределенно» и «ложно». Введем операторы $\wedge^1$, $\wedge^2$ и $\wedge^3$ такие, что:

1) если x истинно и y неопределенно, то $x \wedge^1 y$ неопределенно, $x \wedge^2 y$ неопределенно и $x \wedge^3 y$ ложно;

2) если x ложно и y неопределенно или x неопределенно и y ложно, то $x \wedge^1 y$ ложно, $x \wedge^2 y$ ложно, $x \wedge^3 y$ ложно;

3) если повсюду заменить в определениях $\wedge^1, \wedge^2, \wedge^3$ значения «неопределенно» и «ложно» на «неистинно», то все эти определения совпадут с приведенным выше определением $\wedge$.

Это явление иногда истолковывают так, будто во всех этих случаях приходится иметь дело с одним и тем же логическим оператором конъюнкции, только свойства этого оператора меняются в зависимости от числа значений истинности. На таких грубейших ошибках строятся претенциозные концепции (в частности, концепция особой логики микрофизики). На самом же деле во всех четырех случаях даны определения различных операторов. Их можно лишь сравнивать по определенным критериям. В частности, операторы $\wedge^1, \wedge^2$, и $\wedge^3$ можно рассматривать как аналоги двузначной конъюнкции $\wedge$.

§ 19. Значения истинности других форм высказываний

Для высказываний $P(a)$ и $\neg P(a)$ термин «истинно» мы принимаем без определения. Но зато термин «неистинно» здесь нуждается в пояснении, поскольку отрицание $P(a)$ необязательно есть $\neg P(a)$, а отрицание $\neg P(a)$ необязательно есть $P(a)$. Различая отрицания $\neg$ и $\sim$, мы допускает не две, а три возможности:

1) можно установить, что a имеет признак P;
2) можно установить, что a не имеет признака P;
3) невозможно установить (принять) ни то, ни другое.

Третья возможность есть эмпирически данный факт (например, в случае переходных состояний предметов и неразрешимых проблем). Поэтому термин «неистинно» следует определить для рассматриваемых высказываний так: 1) $P(a)$ неистинно, если и только если $\neg P(a)$ истинно или $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$ истинно; 2) $\neg P(a)$ неистинно, если и только если $P(a)$ истинно или $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$ истинно.

Для $?P(a)$ термины «истинно» и «неистинно» определяются так:

1) $?P(a)$ истинно, если и только если $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$ истинно (т. е. $P(a)$ неистинно и $\neg P(a)$ неистинно);

2) $?P(a)$ неистинно, если и только если $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$ неистинно (т. е. $P(a)$ истинно или $\neg P(a)$ истинно).

Пусть A, B и C суть $P(a), \neg P(a)$ и $?P(a)$, взятые в любом порядке. Соотношение значений истинности их кратко можно записать так:

1) если A истинно, то B и C неистинны;
2) если A и B неистинны, то C истинно.

Таким образом, два из них не могут быть вместе истинными, но могут быть вместе неистинными.

Для высказываний с кванторами определения имеют такой вид:

1) $(\forall a)x$ истинно, если и только если для любого индивида b такого, что b есть a (т. е. $b \rightharpoonup a$), истинно высказывание $x(a/b)$, где $x(a/b)$ есть результат замены a на b везде, где a входит в x;

2) $(\neg \forall a)x$ истинно, если и только если по крайней мере для одного индивида b такого, что b есть a, высказывание $x(a/b)$ неистинно;

3) $(?\forall a)x$ истинно, если и только если $\sim(\forall a)x \wedge \sim(\neg\forall a)x$ истинно;

4) $(\forall a)x$ неистинно, если и только если $(\neg \forall a)x \vee (?\forall a)x$ истинно;

5) $(\neg \forall a)x$ неистинно, если и только если $(\forall a)x \vee (?\forall a)x$ истинно;

6) $(?\forall a)x$ неистинно, если и только если $(\forall a)x \vee (\neg \forall a)x$ истинно.

Определения (7–12) для квантора $\exists$ получаются так: в (1–6) повсюду $\forall$ заменяется на $\exists$; в пункте (1) вместо слов «для любого» пишутся слова «по крайней мере для одного»; в пункте (2) вместо слов «по крайней мере для одного» пишутся слова «для любого».

Соотношение значений истинности $(\forall a)x$, $(\neg \forall a)x$ и $(? \forall a)x$ аналогично соотношению их для приведенных выше A, B и C. Аналогично — для $(\exists a)x$, $(\neg \exists a)x$ и $(?\exists a)x$.

Для высказываний $x \rightarrow y$ имеют силу такие определения:

1) $x \rightarrow y$ истинно, если и только если, приписав x значение «истинно» (y значение «неистинно»), мы вынуждены приписать y значение «истинно» (x значение «неистинно»);

2) $x \rightarrow y$ неистинно, если и только если признание истинности x не вынуждает к признанию истинности y или признание неистинности y не вынуждает к признанию неистинности x.

Для рассматриваемых высказываний можно ввести три и более значения истинности, что влияет на форму логической теории, но не на ее суть. В частности, это можно сделать таким образом. Пусть термины значений истинности суть «истинно», «неопределенно» и «ложно». Пусть x есть высказывание «Предмет a возможно наблюдать». Определениям терминов значений истинности для высказываний $P(a)$ и $\neg P(a)$ можно придать такой вид:

1) $P(a)$ истинно, если и только если $x \wedge P(a)$,
$P(a)$ неопределенно, если и только если x,
$P(a)$ ложно, если и только если $x \wedge \neg P(a)$;

2) $\neg P(a)$ истинно, если и только если $x \wedge \neg P(a)$,
$\neg P(a)$ неопределенно, если и только если x,
$\neg P(a)$ ложно, если и только если $x \wedge P(a)$.

Эти определения введены с учетом того, что приходится иметь дело с тремя возможностями:

1) $\sim x$;
2) $x \wedge P(a)$;
3) $x \wedge \neg P(a)$.

Но возможен и другой вариант:

1) $P(a)$ истинно, если и только если $P(a)$,
$\neg P(a)$ истинно, если и только если $\neg P(a)$,
$?P(a)$ истинно, если и только если $?P(a)$;
2) $P(a)$ ложно, если и только если $\neg P(a)$,
$\neg P(a)$ ложно, если и только если $P(a)$,
$?P(a)$ ложно, если и только если $P(a) \vee \neg P(a)$;
3) $P(a)$ неопределенно, если и только если $?P(a)$,
$\neg P(a)$ неопределенно, если и только если $?P(a)$.

Как видим, здесь неопределенность поставлена в зависимость не от невозможности наблюдать a, как в первом варианте, а от невозможности обнаружить P при условии, что a можно наблюдать. В этом варианте точно так же приходится иметь дело с тремя возможностями, но это уже другие возможности:

1) $P(a)$;
2) $\neg P(a)$;
3) $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$.

А если принять во внимание как возможность и невозможность наблюдения a, так и возможность или невозможность обнаружения P, то получим четыре возможности. Очевидно, должны измениться и определения значений истинности, поскольку добавится еще одна возможность. Причем и здесь возможны вариации, например, такие: 1) ввести четвертое значение истинности; 2) считать $P(a)$ и $\neg P(a)$ неопределенными не только в случае $\sim x$, но и в случае $?P(a)$.

Таким образом, истинностные значения не написаны на самих высказываниях и состояниях, к которым они относятся. Они вводятся определениями с учетом строения высказываний и состояний, с которыми они сопоставляются.

На примере определений для условных высказываний можно показать, что определения значений истинности не всегда совпадают с правилами проверки высказываний. Так, чтобы проверить высказывание $x \to y$, надо прежде всего установить, как оно получено — путем опытного исследования или путем вывода y из x и других высказываний, считаемых истинными. В первом случае проверка будет состоять в выяснении того, соблюдены правила опытного исследования или нет, а во втором — правила дедукции.

§ 20. Тавтологии, противоречия, выполнимые высказывания

Имеются высказывания, которые истинны в силу самих определений термина «истинно» (или в силу правил приписывания значений истинности высказываниям такого типа). Это — логически истинные *высказывания, или* тавтологии. Таковы, например, высказывания вида $x \vee \sim x$, $\sim (x \wedge \sim x)$, $x \vee \sim x \vee y$ и т. п. Имеются также высказывания, которые неистинны в силу определений термина «неистинно». Это — невыполнимые высказывания, или противоречия. Таковы, например, высказывания вида $x \wedge \sim x$, $\sim (x \vee \sim x)$, $x \wedge \sim x \wedge y$ и т. п. Имеются, наконец, высказывания, в отношении которых логика не компетентна судить, истинны они или неистинны. Это — выполнимые высказывания. Подавляющее большинство высказываний науки относится к числу выполнимых.

Высказывания вида $x \vee \sim x$ истинно для любых высказываний x и независимо от каких бы то ни было эмпирических исследований, истинно исключительно по той причине, что оно построено из высказываний x и $\sim x$ посредством оператора $\vee$, и что имеются определенные правила приписывания значения истинности высказываниям такого рода. Высказывание же вида $x \wedge \sim x$ неистинно в силу правил приписывания значений истинности высказываниям с операторами $\sim$ и $\wedge$. Первое истинно, а второе неистинно в силу свойств языка, а не в силу свойств предметного мира, к которому относится x. Аналогично для прочих тавтологий и противоречий.

В приведенных выше примерах истинность или неистинность высказываний следует из принятых определений. Но имеются такие высказывания, истинность которых в качестве следствий из каких-либо определений установить нельзя, но которые принимаются в логике по иным соображениям, в частности, как очевидные. Таким является, например, утверждение $a \downarrow P \leftarrow P$, т. е. «Предмет, имеющий некоторый признак, имеет этот признак». Так что множество высказываний, которые считаются истинными в логике, не сводится к множеству тавтологий.

Логически истинные высказывания называют законами логики. Причем, когда речь заходит о законах логики, то в силу сложившейся традиции имеют в виду именно логически истинные высказывания (а порой к ним сводят вообще все законы логики). Так что *имеет* смысл некоторые вопросы, связанные с ними, разобрать подробнее.

Прежде всего следует иметь в виду, что ответ на вопрос о том, какие высказывания являются логически истинными (тавтологиями) и какие нет, зависит от принятых определений значений истинности для операторов, входящих в эти высказывания (или от определений

этих операторов). Так что правильно будет говорить не просто о том, что высказывание $x \vee \sim x$ есть тавтология, а высказывание $x \wedge \sim x$ есть противоречие, а о том, что они таковыми являются при условии таких-то определений. Этот тривиальный факт удивительным образом не замечают, когда утверждают, что некоторые законы двузначной логики не сохраняются в многозначной, в частности — в трехзначной. Стоит, например, принять определения, согласно которым если неопределенно x, то неопределенно $\sim x$, и если неопределенны оба x и y, то неопределенно $x \vee y$, как получим, что $x \vee \sim x$ будет неопределенно. Но делать из этого вывод, будто закон двузначной логики $x \vee \sim x$ *здесь потерял силу*, бессмысленно. Единственно правильный вывод здесь такой: если операторы $\sim$ и $\vee$ определены так, как указано выше, и если тавтология всегда имеет значение «истинно», то $x \vee \sim x$ не есть тавтология.

Когда утверждают, что законы двузначной логики не сохраняются в многозначной, то совершают логическую ошибку, смешивая различные определения терминов значений истинности или логических операторов.

§ 21. Дедукция

Большую часть знаний люди приобретают путем вывода (дедукции) из других уже имеющихся знаний. Исследование правил вывода составляет доминирующую задачу науки логики.

Логика исследует не любые выводы. Пусть, например, даны высказывания: (1) «Корабль *A* прошел расстояние 1000 км»; (2) «Время, которое корабль *A* затратил при этом, равно 20 часам». Из них выводится высказывание (3) «Корабль *A* плыл со средней скоростью 50 км/час». Здесь высказывание (3) выведено из высказываний (1) и (2). Но сделано это не по правилам логики, а по особому правилу вычисления скорости, установленному в физике: величина средней скорости тела равна частному от деления расстояния, пройденного телом, на время, затраченное на это. И когда в случаях такого рода говорят, что некоторое высказывание получено чисто логическим путем из других, то допускают неточность или, точнее, смешивают дедукцию в широком смысле с дедукцией логической.

Под выводом (дедукцией) в широком смысле слова имеют в виду получение высказываний из некоторых данных высказываний без обращения к опыту (к наблюдениям и экспериментам) по особого рода правилам, установленным для знаков языка, из которых построены исходные высказывания. К числу таких правил относятся не только правила логики, но и правила, введенные в других науках — в математике,

физике, химии и т. п. Под выводом в более узком смысле слова имеют в виду вывод одних высказываний из других исключительно по правилам, устанавливаемым в науке логике. Это — логический вывод, или вывод по правилам логического следования. Например, из высказываний «Все металлы электропроводны» и «Медь есть металл» выводится высказывание «Медь электропроводна», причем это сделано по правилу логики, устанавливаемому для квантора «все». Это — логический вывод.

В дальнейшем мы слово «логический» будем для краткости опускать, предполагая при этом, что имеется в виду исключительно логический вывод. Выражение «логическое следование», которое часто употребляется и которое мы точно так же употребляем, означает то же самое, что и выражение «логический вывод» и «логическая дедукция».

§ 22. Логический вывод

Установление правил вывода — довольно сложная комплексная задача, при решении которой приходится согласовывать самые различные стороны дела. Укажем некоторые общие черты правил вывода.

Правила вывода вырабатываются с таким расчетом, чтобы выполнялся следующий принцип дедукции: если высказывание y по этим правилам получается из высказываний $x^1, \ldots, x^n$, и последние считаются истинными, то и y должно признать истинным. Правила вывода изобретаются с расчетом на этот принцип. Так что таинственная принудительная сила законов логики есть лишь собственная сила самих людей в отношении одной из сфер их деятельности.

Правила логического вывода (следования) суть особого рода определения свойств логических операторов, входящих в высказывания, и следствия из таких определений. Так, имеются правила, согласно которым из высказывания $x \wedge y$ логически выводится каждое из x и y по отдельности из высказывания $x \wedge y$ выводится $y \wedge x$, из $x \wedge (y \wedge z)$ выводится $(x \wedge y) \wedge z$ и т. д. Эти правила — перечисление свойств оператора $\wedge$. Последний вводится в употребление именно таким, что эти правила имеют силу. При формулировке этих правил принимается во внимание приведенный выше принцип дедукции. В самом деле, если $x \wedge y$ истинно, то x истинно, и т. д.

Логические операторы вводятся в употребление не по одиночке, а совместно, поскольку они и в высказываниях встречаются совместно. Так, например, в высказывании $(\forall a)(x \vee (\exists b) \sim (y \wedge z))$ фигурируют операторы $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\sim$, $\wedge$. И, разумеется, правила вывода для таких высказываний должны учитывать всевозможные комбинации этих операторов. Так что, хотя каждый оператор по отдельности кажется тривиально простым, определение их свойств в разного вида комбинациях

и учет всех возможных комбинаций такого рода есть дело довольно трудное.

Ответом на вопрос о том, когда из одних высказываний логически следуют другие высказывания, являются не общие рассуждения, а перечисление конкретных случаев такого рода. Потому удобным методом здесь оказались логические исчисления, которые не только позволили дать строгую формулировку рассматриваемых правил, но и в целом ряде случаев позволили охватить эти правила исчерпывающим образом.

Тот факт, что из высказывания x дедуцируется (логически следует) высказывание y, будем изображать символом вида

$$x \vdash y.$$

Здесь знак $\vdash$ не есть логический оператор. Это — предикат высказывания «Из высказывания x логически следует высказывание y» (предикат следования). Субъекты этого высказывания суть термины «высказывание x» и «высказывание y». Высказывание x называется посылкой, высказывание y — заключением, или следствием.

Если не рассматривать строение посылок и заключений, то предикат следования обладает только такими свойствами:

1) если $x \vdash y$, и x принимается (признается, считается истинным), то y принимается (считается истинным, должно быть принято);

2) если $x \vdash y$, и y отвергается (считается неистинным), то x отвергается;

3) если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$.

Все прочие свойства предикат следования приобретает за счет свойств терминов, высказываний и операторов, входящих в посылки и заключения. Причем, это — не его свойства в собственном смысле этого слова, а свойства посылок и заключений. Предикат следования при этом используется лишь как средство установления этих свойств.

Если вывод совершается из нескольких высказываний $x^1, \ldots, x^n$, то можно принять такое соглашение: из $x^1, \ldots, x^n$ логически следует y, если и только если из $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$ логически следует y.

Символами вида

$$x \dashv\vdash y$$

будем для краткости записывать то, что имеет место как $x \vdash y$, так и $y \vdash x$. Будем в таком случае считать, что x и y дедуктивно эквивалентны.

Символами вида

$$\vdash x$$

будем записывать тот факт, что x принимается из чисто логических соображений (как логически истинное). Здесь $\vdash$ есть предикат высказывания «Высказывание x логически истинно». Мы употребляем тот же символ, что и для следования, поскольку из контекста каждый раз будет ясно, в каком смысле он употребляется. Очевидно, если $\vdash x$, то x истинно.

Если не рассматривать строение x, то предикат $\vdash$ в выражениях вида $\vdash x$ (будем его в этой роли называть предикатом логической истинности) вообще никакими иными свойствами, кроме указанного выше, не обладает. В сочетании с предикатом следования предикат логической истинности обладает такими свойствами:

1) если $x \vdash y$ и $\vdash x$, то $\vdash y$;

2) если $x \vdash y$ и y не является логически истинным, то x не является логически истинным.

Прочие свойства предикат логической истинности приобретает за счет того, что становится средством определения свойств логических операторов и содержащих их терминов и высказываний.

Предикат логической истинности можно рассматривать как предикат следования из пустой посылки, т. е. как предикат вырожденного следования.

§ 23. Общая теория дедукции

Алфавит общей теории дедукции (ОТД):

1) пропозициональные переменные или переменные для высказываний;

2) переменные для терминов-субъектов;

3) переменные для терминов-предикатов;

4) $\wedge, \vee, \sim, \neg, ?, \rightarrow, \leftrightarrow$ — операторы соответственно конъюнкции, дизъюнкции, внешнего и внутреннего отрицаний, неопределенности, условности и условной эквивалентности;

5) $\vdash$ — предикаты логического следования и логической истинности.

*D*1. Определение пропозициональной формулы (или высказывательной формы):

1) пропозициональные переменные суть пропозициональные формулы;

2) если x и y суть пропозициональные формулы, то $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$ и $(x \leftrightarrow y)$ суть пропозициональные формулы; если $x^1, \ldots, x^n$ $(n \geqslant 3)$ суть пропозициональные формулы, то $(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n)$ и $(x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n)$ суть пропозициональные формулы;

3) если a есть переменная для субъектов, а P — переменная для предикатов, то $P(a)$, $\neg P(a)$ и $?P(a)$ суть пропозициональные формулы;

4) если a есть переменная для терминов субъектов, а x — переменная для высказываний, то $(\forall a)x$, $(\neg \forall a)x$, $(?\forall a)x$, $(\exists a)x$, $(\neg \exists a)x$, $(?\exists a)x$ суть пропозициональные формулы;

5) если x есть пропозициональная формула, то $\sim x$ есть пропозициональная формула;

6) нечто есть пропозициональная формула ОТД лишь в силу (1–5).

*D*2. Определение формулы логического следования: $x \vdash y$ есть формула логического следования, если и только если x и y суть пропозициональные формулы.

*D*3. Определение формулы логической истинности (или вырожденного следования): $\vdash x$ есть формула логической истинности, если и только если x есть пропозициональная формула.

Будем употреблять выражения вида $x \dashv\vdash y$ как сокращение для двух формул $x \vdash y$ и $y \vdash x$. Скобки в ряду случаев будем опускать, полагая, что $\wedge$ связывает сильнее, чем $\vee$: оба они связывают сильнее, чем $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и $\vdash$; $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ связывают сильнее, чем $\vdash$ и $\dashv\vdash$.

Аксиомные схемы ОТД:

I. 1. $\sim\sim x \dashv\vdash x$;

2. $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash x^i$,
где x^i есть любое из $x^1, x^2, \ldots, x^n$, а $n \geqslant 2$;

3. $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n \dashv\vdash y$,
где y отличается от $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n$ только тем, что какая-то его часть вида $x^{i1} \wedge \ldots \wedge x^{ik}$ заключена в скобки;

4. $x \wedge y \vdash y \wedge x$;

5. $(x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n) \wedge y \dashv\vdash (x^1 \wedge y) \vee (x^2 \wedge y) \vee \ldots \vee (x^n \wedge y)$;

6. $\sim(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n) \dashv\vdash \sim x^1 \vee \sim x^2 \vee \ldots \vee \sim x^n$;

7. $(x \vee y) \wedge \sim x \vdash y$;

8. $\vdash (x \vee \sim x)$.

II. 1. $(x \rightarrow y) \wedge x \vdash y$;

2. $(x \rightarrow y) \vdash (\sim y \rightarrow \sim x)$;

3. $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \vdash (x \rightarrow z)$;

4. $(x \rightarrow y \wedge z) \dashv\vdash (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$;

5. $(x \rightarrow y) \vee (z \rightarrow v) \vdash (x \wedge z \rightarrow y \vee v)$;

6. $(x \leftrightarrow y) \dashv\vdash (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

III. 1. $P(a) \dashv\vdash \sim \neg P(a) \wedge \sim ?P(a)$;

2. $\neg P(a) \dashv\vdash \sim P(a) \wedge \sim ?P(a)$;

3. $?P(a) \dashv\vdash \sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$.

IV. 1. $(\forall a)x \vdash x$;
2. $x \vdash (\exists a)x$;
3. $(\forall a)x \dashv\vdash (\neg \exists a) \sim x$;
4. $(\neg \forall a)x \dashv\vdash (\exists a) \sim x$;
5. $(?\forall a)x \dashv\vdash (?\exists a) \sim x$;
6. $(\forall a)x \dashv\vdash \sim (\neg \forall a)x \wedge \sim (?\forall a)x$;
7. $(\neg \forall a)x \dashv\vdash \sim (\forall a)x \wedge \sim (?\forall a)x$;
8. $(?\forall a)x \dashv\vdash \sim (\forall a)x \wedge \sim (\neg \forall a)x$;
9. $(\forall a)(x \wedge y) \dashv\vdash (\forall a)x \wedge (\forall a)y$;
10. $(\exists a)(x \vee y) \dashv\vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y$;
11. $(\forall a)(x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\exists a)y$;
12. $(\exists a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\exists a)y$;
13. $(\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \vee y)$;
14. $(\forall a)x \wedge (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$.

Правила вывода ОТД:

1) если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$;
2) если $x \vdash y$ и $x \vdash z$, то $x \vdash y \wedge z$;
3) если $w \wedge x \vdash y$ и $w \wedge y \vdash x$ и v образуется из z путем замены одного или более вхождений x в z в качестве высказывания на y, то $w \wedge z \vdash v$;
4) если $x \vdash y$ и $\vdash x$, то $\vdash y$;
5) если $x \vdash y$ и $\vdash \sim y$, то $\vdash \sim x$
6) если $\vdash x$ и $\vdash y$, то $\vdash x \wedge y$;
7) если $x \vdash y$, то $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$;
8) если $x \vdash y$, то $(\exists a)x \vdash (\exists a)y$;
9) если $\vdash x$, то $\vdash (\forall a)x$;
10) если $x \vdash y$, то $\vdash (x \to y)$.

*D*4. Определение доказуемой формулы ОТД: формула логического следования или логической истинности является доказуемой в ОТД (является теоремой) тогда и только тогда, когда она есть аксиома (или получается из доказуемых формул из теорем) по правилам вывода ОТД.

В результате подстановки в пропозициональные формулы на место переменных соответственно высказываний и терминов получаются высказывания, а в результате таких подстановок в формулы логического следования и логической истинности получаются утверждения о том, что из одних высказываний логически следуют другие или что высказывания истинны логически.

§ 24. Классический и неклассический случаи в теории вывода

В приведенной выше теории вывода различаются два отрицания $\sim$ и $\neg$ и фигурирует оператор неопределенности. В ней доказуемы утверждения

1) $\sim P(a) \vdash \neg P(a), \sim (\forall a)x \vdash (\neg \forall a)x,$
$\sim (\exists a)x \vdash (\neg \exists a)x;$

2) $\vdash P(a) \vee \neg P(a), \vdash (\forall a)x \vee (\neg \forall a)x,$
$\vdash (\exists a)x \vee (\neg \exists a)x.$

Этот случай в теории вывода будем называть неклассическим или общим.

Но встречаются такие области, в которые различение отрицаний не производится, а оператор неопределенности является излишним. Для таких случаев теорию вывода можно расширить, приняв дополнительно правила (1). Благодаря этому будут доказуемы утверждения (2). Так что правила предикации и правила (5–10) для кванторов отпадут как излишние. Правила (3) и (4) для кванторов будут равносильны таким:

$(\forall a)x \dashv\vdash \sim (\exists a) \sim x.$

Будем такой случай в теории вывода называть классическим.

Обращаем внимание еще на одно важное отличие неклассического случая от классического. В классическом случае конъюнкция отрицаний обоих членов пар $P(a)$ и $\neg P(a)$, $(\forall a)x$ и $(\neg \forall a)x$, $(\exists a)x$ и $(\neg \exists a)x$ дает противоречие. Покажем это на примере первой пары: поскольку

$\neg P(a) \dashv\vdash \sim P(a), \quad \sim \neg P(a) \dashv\vdash \sim\sim P(a),$
$\sim\sim P(a) \dashv\vdash P(a),$

получим

$\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a) \vdash \sim P(a) \wedge \sim\sim P(a),$
$\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a) \vdash \sim P(a) \wedge P(a).$

В неклассическом же случае противоречие не получается, поскольку замена $\sim \neg P(a)$ на $\sim\sim P(a)$ и затем на $P(a)$ здесь недопустима. Аналогично для прочих пар.

Игнорирование этого различия ведет к недоразумениям. Это различие есть различие случаев, когда допускаются три возможности и две возможности. В неклассическом случае эти возможности суть $P(a)$, $\neg P(a)$ и $?P(a)$, в классическом — лишь $P(a)$ и $\neg P(a)$. Аналогично для кванторов. Причем неклассический случай является более общим, поскольку в качестве частного случая здесь можно допустить, что третья возможность с оператором неопределенности является пустой.

§ 25. Правила вывода и значения истинности высказываний

Правила вывода не зависят от того, сколько значений истинности решено приписывать высказываниям. При осуществлении выводов принимается во внимание лишь видимое строение высказываний, т. е. наличие в них определенных терминов, высказываний и логических операторов и взаимное расположение их. Значения же истинности принимаются во внимание лишь для реализации основного принципа дедукции: если принимаются (считаются истинными) посылки, то принимаются заключения; если отвергаются (считаются неистинными) заключения, то отвергаются посылки. При этом вполне достаточно одного предиката истинности и его отрицания.

§ 26. Тождество по смыслу и следование

Примем правило: если $x \equiv y$, то $x \vdash y$ и $y \vdash x$. Так что если принимается определение $x \equiv Df \cdot y$, то принимается тем самым $x \equiv y$, а значит — принимаются два утверждения $x \vdash y$ и $y \vdash x$. Это обстоятельство позволяет в целях экономии принимать в качестве определений сразу утверждения о следовании.

§ 27. Общая теория терминов

Общая теория терминов (ОТТ) определяет свойства предикатов $\rightharpoonup$, $\rightleftharpoons$, и $\equiv$, а также свойства T-оператора и содержащих их терминов, не принимая во внимание конкретного значения терминов. Ниже мы приведем систему ОТТ, которая надстраивается над ОТД (т. е. последняя предполагается).

Алфавит ОТТ:

1) предметные переменные;
2) переменные для терминов;
3) субъектные переменные;
4) предикатные переменные;
5) S — предикат обозначения;
6) $\rightharpoonup$ — предикат включения по значению;
7) $\rightleftharpoons$ — предикат тождества по значению;
8) $\downarrow$ — оператор «который», «такой, что», «тот факт, что»;
9) $(\ldots)$ — оператор энки терминов (пары, тройки, ...);
10) m — квазиоператор метатермина;
11) s — термин «предмет»;
12) p — термин «признак».

*D*1. Определение субъектной формы (СФ):

1) субъектные переменные суть СФ;

2) если $a^1, \ldots, a^n$ суть СФ, то $(a^1, \ldots, a^n)$ есть СФ;

3) если $a^1, \ldots, a^n$ суть СФ, то $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(a^1 \wedge \ldots \wedge a^n)$, $(\vee a^1 \ldots a^n)$ и $(\wedge a^1 \ldots a^n)$ суть СФ;

4) если a есть СФ, то $\sim a$ есть СФ;

5) если a есть СФ, а b есть предикатная форма, то $a \downarrow \alpha b$ и $a \downarrow \sim \alpha b$ суть СФ, где α означает наличие $\neg$, ? или пусто;

6) если b есть предикатная форма, то $\downarrow \alpha b$ и $\downarrow \sim \alpha b$ суть СФ;

7) если a есть СФ, а x есть пропозициональная формула, то $a \downarrow x$ есть СФ;

8) если x есть пропозициональная формула, то $\downarrow x$ есть СФ;

9) если a есть СФ, предикатная форма или пропозициональная формула, то ma есть СФ;

10) s есть СФ;

11) если a есть СФ, то ia есть СФ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$;

12) нечто есть СФ лишь в силу 1–11.

*D*2. Определение предикатной формы (ПФ):

1) предикатные переменные суть ПФ;

2) если $a^1, \ldots, a^n$ суть ПФ, то $(a^1, \ldots, a^n)$, $(a^1 \wedge \ldots \wedge a^n)$, $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(\wedge a^1 \ldots a^n)$, $(\vee a^1 \ldots a^n)$ суть ПФ;

3) если a есть ПФ, то $\tilde{a}$ есть ПФ;

4) если a есть СФ, а b есть ПФ, то $b \downarrow \alpha a$ и $b \downarrow \sim \alpha a$ суть ПФ;

5) если a есть СФ, то $\downarrow \alpha a$ и $\downarrow \sim \alpha a$ суть ПФ;

6) если a есть ПФ, а x есть пропозициональная формула, то $a \downarrow x$ есть ПФ;

7) если x есть пропозициональная формула, то $x \downarrow$ есть ПФ;

8) $S, \rightharpoonup, \rightleftharpoons$ суть ПФ;

9) p есть ПФ;

10) нечто есть ПФ лишь в силу 1–9.

*D*3. Определение предметной переменной: ia есть предметная переменная, если и только если a есть субъектная переменная $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

*D*4. СФ и ПФ, и только они, суть терминные формы (ТФ).

*D*5. Дополнение к определению пропозициональной формулы (ФП):

1) если a есть СФ, а P есть ПФ, то $\alpha \mathrm{P}(a)$ есть ФП (α означает наличие $\neg$, ? или пусто);

2) $S(a, mb)$ есть ФП, если и только если a и b обе суть СФ;

3) $\rightharpoonup (ma, mb)$ и $\rightleftharpoons (ma, mb)$ суть ФП, если и только если a и b обе суть СФ или обе суть ПФ.

С целью упрощения записи и для большей наглядности будем вместо символов $\rightharpoonup (ma, mb)$ и $\rightleftharpoons (ma, mb)$ употреблять соответственно $a \rightharpoonup b$ и $a \rightleftharpoons b$.

*D*6. ТФ или ФП a входит в ТФ или ФП b в качестве ТФ или ФП, если a есть часть b, за исключением таких случаев:

1) a не есть вхождение в ma в качестве ТФ или ФП;

2) если c есть часть a, то c не есть вхождение в ma в качестве ТФ или ФП.

Поясним символы, специально употребляемые в теории терминов:

1) $S(a, mb)$ — «a обозначается термином b»;

2) $\rightharpoonup (ma, mb)$ — «Термин a включается по значению в термин b» (или «Все, что обозначается термином a, обозначается и термином b»);

3) $\rightleftharpoons (ma, mb)$ — «Термины a и b тождественны по значению»;

4) $(a^1, \ldots, a^n)$ — «Пара (тройка, четверка и т. д.; вообще — энка) предметов»;

5) $(a \wedge b)$ — «предмет (признак), который обозначается термином a и термином b»;

6) $(a \vee b)$ — «предмет (признак), который обозначается по крайней мере одним из терминов a и b»;

7) $\sim a$ — «не-а» в смысле «предмет, который не обозначается термином a»;

8) $(\wedge ab)$ — «каждый из a и b»;

9) $(\vee ab)$ — «по крайней мере один из a и b»;

10) $(\widetilde{\wedge} ab)$ — «не каждый из a и b»;

11) $(\widetilde{\vee} ab)$ — «ни один из a и b»;

12) $\tilde{a}$ — «не-a» в смысле «не имеющий признака a»;

13) $a \downarrow x$ — «a такой, что x», «a, который x», «a, имеющий x» и т. п.;

14) $\downarrow x$ — «тот факт, что x», «имеющий x» и т. п.;

15) $x \downarrow$ — «такой, что x», «Характеризуется тем, что x» и т. п.

Предметные переменные суть переменные для терминов-субъектов, но обладающих такими свойствами: каждая из ia по отдельности читается как «любой a» («какой-то, но безразлично, какой именно, a» и т. п.); если ia и ka фигурируют совместно, то они читаются друг по отношению к другу как «любой другой a».

Аксиомные схемы ОТТ:

I. 1. $\vdash S(a, ma)$;
2. $\sim S(a, mb) \vdash \neg S(a, mb)$.

II. 1. $(a \rightharpoonup b) \dashv\vdash (S(s, ma) \to S(s, mb))$,
где a и b суть СФ;
2. $(a \rightharpoonup b) \dashv\vdash (s \downarrow a \rightharpoonup s \downarrow b)$,
где a и b суть ПФ;
3. $(a \rightleftharpoons b) \dashv\vdash (a \rightharpoonup b) \wedge (b \rightharpoonup a)$.

III. 1. $\vdash a \rightleftharpoons s \downarrow S(s, ma)$;
2. $S(s, m \sim a) \dashv\vdash \sim S(s, ma)$;
3. $S(s, m(a^1 \wedge \ldots \wedge a^n)) \dashv\vdash S(s, ma^1) \wedge \ldots \wedge S(s, ma^n)$;
4. $S(s, m(a^1 \vee \ldots \vee a^n) \dashv\vdash S(s, ma^1) \vee \ldots \vee S(s, ma^n)$.

IV. 1. $\alpha P(\wedge a^1 \ldots a^n) \dashv\vdash \alpha P(a^1) \wedge \ldots \wedge \alpha P(a^n)$;
2. $\alpha(\wedge P^1 \ldots P^n)(a) \dashv\vdash \alpha P^1(a) \wedge \ldots \wedge \alpha P^n(a)$;
3. $\alpha P(\vee a^1 \ldots a^n) \dashv\vdash \alpha P(a^1) \vee \ldots \vee \alpha P(a^n)$;
4. $\alpha(\vee P^1 \ldots P^n)(a) \dashv\vdash \alpha P^1(a) \vee \ldots \vee \alpha P^n(a)$;
5. $\alpha P(\widetilde{\wedge} a^1 \ldots a^n) \dashv\vdash \sim \alpha P(\wedge a^1 \ldots a^n)$;
6. $\alpha P(\widetilde{\vee} a^1 \ldots a^n) \dashv\vdash \sim \alpha P(\vee a^1 \ldots a^n)$;
7. $\alpha(\widetilde{\wedge} P^1 \ldots P^n)(a) \dashv\vdash \sim \alpha(\wedge P^1 \ldots P^n)(a)$;
8. $\alpha(\widetilde{\vee} P^1 \ldots P^n)(a) \dashv\vdash \sim \alpha(\vee P^1 \ldots P^n)(a)$;
9. $\widetilde{P}(a) \dashv\vdash \sim P(a)$.

V. 1. $(a^1, \ldots, a^n) \rightharpoonup (b^1, \ldots, b^n) \dashv\vdash (a^1 \rightharpoonup b^1) \wedge \ldots \wedge (a^n \rightharpoonup b^n)$;
2. $(\forall (a^1, \ldots, a^n))x \dashv\vdash (\forall a^1)x \wedge \ldots \wedge (\forall a^n)x$;
3. $(\exists (a^1, \ldots, a^n))x \dashv\vdash (\exists a^1)x \wedge \ldots \wedge (\exists a^n)x$.

VI. 1. $\vdash a \downarrow (x \wedge y) \rightleftharpoons (a \downarrow x) \wedge (a \downarrow y)$;
2. $\vdash a \downarrow (x \vee y) \rightleftharpoons (a \downarrow x) \vee (a \downarrow y)$;
3. $\vdash (s \downarrow \sim x) \rightleftharpoons \sim (s \downarrow x)$;
4. $(\downarrow x \rightleftharpoons \downarrow y) \dashv\vdash (x \downarrow \rightleftharpoons y \downarrow)$;
5. $\vdash (a \downarrow x) \downarrow y \rightleftharpoons ((a \downarrow y) \downarrow x)$;
6. $\vdash x \rightharpoonup (a \downarrow x \rightleftharpoons a)$;
7. $(\forall \downarrow x)(y \downarrow)(x \downarrow) \dashv\vdash (x \to y)$;
8. $(\neg \forall \downarrow x)(y \downarrow)(x \downarrow) \dashv\vdash (x \neg\to y)$.

VII. 1. $\vdash (x \downarrow)(a \downarrow x)$;
2. $\vdash \alpha P(a \downarrow \alpha P(a))$;
3. $\vdash \sim \alpha P(a \downarrow \sim \alpha P(a))$,
где α есть $\neg$, ? или пусто.

VII. 1. $(\exists\, a)x \wedge ((b \rightharpoonup a) \rightarrow (a \rightharpoonup b)) \vdash x$;

2. $x \wedge ((b \rightharpoonup a) \rightarrow a \rightharpoonup b)) \vdash (\forall\, a)x$;

3. $\sim (a \rightharpoonup b^1) \wedge \ldots \wedge \sim (a \rightharpoonup b^n) \wedge (\exists\, a)x \vdash (\forall\, a)x$,

где a не входит свободно в x в качестве СФ, а $b^1, \ldots, b^n$ суть все СФ, имеющие свободные вхождения в x в качестве СФ.

IX. 1. $(a \rightharpoonup b) \wedge (\forall\, b)x \vdash (\forall\, a)y$,

где y образуется из x путем замены всех свободных вхождений b в x в качестве СФ на a;

2. $(a \rightharpoonup b) \wedge (\exists\, a)x \vdash (\exists\, b)y$,

где y образуется из x путем замены всех свободных вхождений a в x в качестве СФ на b;

3. $(a \rightleftharpoons b) \wedge x \vdash y$,

где y образуется из x путем замены одного или более вхождений a в x в качестве ТФ на b.

X. 1. $(\forall\, a)x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\forall\, a)y$,

где y образуется из x путем замены b на a везде, где b входит в x в качестве СФ свободно; аналогично отношение y и x в последующих схемах 2–4;

2. $(\forall\, a)y \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\forall\, a)x$;

3. $(\exists\, a)x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\exists\, a)y$;

4. $(\exists\, a)y \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\exists\, a)x$.

XI. 1. $(\forall\, a)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\forall\, b)x$,

где a не входит свободно в x в качестве СФ; аналогично соотношение a и x в последующих схемах 2–4;

2. $(\forall\, b)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\forall\, a)x$;

3. $(\exists\, a)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\exists\, b)x$;

4. $(\exists\, b)x \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (\exists\, a)x$.

XII. 1. $(P \rightharpoonup Q) \wedge P(a) \vdash Q(a)$;

2. $(P \rightharpoonup Q) \wedge \neg\, Q(a) \vdash \neg\, P(a)$;

3. $(P \rightharpoonup Q) \wedge \sim Q(a) \vdash \sim P(a)$.

XIII. 1. $\alpha P(a) \dashv\vdash S(a, m(s \downarrow \alpha P))$;

2. $\sim \alpha P(a) \dashv\vdash S(a, m(s \downarrow \sim \alpha P))$;

3. $(\forall\, a)\alpha P(a) \dashv\vdash (a \rightharpoonup s \downarrow \alpha P)$;

4. $(\forall\, a) \sim \alpha P(a) \dashv\vdash (a \rightharpoonup s \downarrow \sim \alpha P)$;

5. $(\exists\, a)\alpha P(a) \dashv\vdash (\exists\, (s \downarrow \alpha P))(\forall\, P \downarrow a)(P \downarrow a)(s \downarrow \alpha P)$;

6. $(\exists\, a) \sim \alpha P(a) \dashv\vdash (\exists\, (s \downarrow \sim \alpha P))(\forall\, p \downarrow a)(p \downarrow a)(s \downarrow \sim \alpha P)$;

7. $(\forall\, a)\alpha P(a) \dashv\vdash (\forall\, (s \downarrow \sim \alpha P))(\exists\, p \downarrow a) \neg\, (p \downarrow a)(s \downarrow \sim \alpha P)$;

8. $(\forall\, a) \sim \alpha P(a) \dashv\vdash (\forall\, (s \downarrow \alpha P))(\exists\, p \downarrow a) \neg\, (p \downarrow a)(s \downarrow \alpha P)$.

XIV. 1. $\vdash (\downarrow x \rightleftharpoons s \downarrow x)$;
2. $\vdash (x \downarrow\rightleftharpoons p \downarrow x)$;
3. $\vdash (\tilde{x} \downarrow\rightleftharpoons (\sim x) \downarrow)$;
4. $\vdash a \downarrow \alpha P \rightleftharpoons a \downarrow \alpha P(a)$;
5. $\vdash a \downarrow\sim \alpha P \rightleftharpoons a \downarrow\sim \alpha P(a)$;
6. $\vdash P \downarrow \alpha a \rightleftharpoons P \downarrow \alpha P(a)$;
7. $\vdash P \downarrow\sim \alpha a \rightleftharpoons P \downarrow\sim \alpha P(a)$;
8. $\vdash\downarrow \alpha P \rightleftharpoons s \downarrow \alpha P$;
9. $\vdash\downarrow\sim \alpha P \rightleftharpoons s \downarrow\sim \alpha P$;
10. $\vdash\downarrow \alpha a \rightleftharpoons p \downarrow \alpha a$;
11. $\vdash\downarrow\sim \alpha a \rightleftharpoons p \downarrow\sim \alpha a$;
12. $(\forall a)\alpha P(a \downarrow x) \dashv\vdash (\forall a \downarrow x)\alpha P(a \downarrow x)$;
13. $(\exists a)\alpha P(a \downarrow x) \dashv\vdash (\exists a \downarrow x)\alpha P(a \downarrow x)$.

XV. 1. $\vdash S(a, ms)$,
где a есть СФ, и s не входит в a;
2. $\vdash S(s \downarrow a, m(s \downarrow p))$,
где m есть ПФ, и p не входит в a;
3. $\vdash ia \multimap a$;
4. $(ia \rightleftharpoons ib) \dashv\vdash (a \rightleftharpoons b)$.

Правила ОТТ:

1) Если $x \dashv\vdash y$, то $\vdash a \rightleftharpoons b$, где b образуется из a путем замены одного или более вхождений x в a в качестве ФП на y.

2) Если $\vdash (a \rightleftharpoons b)$, то $x \dashv\vdash y$, где y образуется из x путем замены одного или более вхождений a в x на b.

3) Если $\vdash\downarrow x \rightleftharpoons\downarrow y$, то $x \dashv\vdash y$.

4) Если $a \multimap b$ и $\vdash x$, то $\vdash (\exists ib)y$, где y образуется из x путем замены одного или более свободного вхождения a в x в качестве СФ на ib, причем ib не входит в x.

5) Если $a \multimap b$ и $\vdash x$, то $\vdash (\forall ib)y$, где y образуется из x путем замены всех свободных вхождений a в x в качестве СФ на ib, причем ib не входит в x.

Приведем некоторые теоремные схемы ОТТ:

1. $\vdash (a \multimap a)$;
2. $(a \multimap b) \wedge (b \multimap c) \vdash (a \multimap c)$;
3. $\vdash\sim a \rightleftharpoons s \downarrow\sim S(s, ma)$,
где a есть СФ;
4. $\vdash\sim a \rightleftharpoons p \downarrow\sim S((s \downarrow p), ma)$,
где a есть ПФ;
5. $\vdash (a \wedge b) \rightleftharpoons s \downarrow (S(s, ma) \wedge S(s, mb))$,
где a и b суть СФ;

6. $\vdash (a \wedge b) \rightleftharpoons p(S((s \downarrow p), m(s \downarrow a)) \wedge S((s \downarrow p), m(s \downarrow b))$,
где a и b суть ПФ;
7. $\vdash (a \vee b) \rightleftharpoons s \downarrow (S(s, ma) \vee S(s, mb))$,
где a и b суть СФ;
8. $\vdash (a \vee b) \rightleftharpoons s \downarrow (S((s \downarrow p), m(s \downarrow a)) \vee S((s \downarrow p), m(s \downarrow b)))$,
где a и b суть ПФ;
9. $(a \rightharpoonup b) \vdash (\forall a)(\forall b)(a \rightharpoonup b)$;
10. $\vdash \sim\sim a \rightleftharpoons a$;
11. $\vdash (a \wedge b) \rightharpoonup a$;
12. $\vdash (a \wedge b) \rightharpoonup (b \wedge a)$;
13. $\vdash (a \wedge b \wedge c) \rightleftharpoons ((a \wedge b) \wedge c)$;
14. $\vdash (a \vee b) \rightleftharpoons \sim(\sim a \wedge \sim b)$;
15. $\vdash \sim(a \wedge b) \rightleftharpoons (\sim a \vee \sim b)$;
16. $\vdash (a \vee a) \rightleftharpoons a$;
17. $\vdash (a \wedge a) \rightleftharpoons a$;
18. $\vdash a \rightharpoonup (a \vee b)$;
19. $(a \rightharpoonup b) \vdash (\sim b \rightharpoonup a)$;
20. $(a \rightharpoonup b) \wedge (a \rightharpoonup c) \vdash (a \rightharpoonup b \wedge c)$;
21. $(a \rightharpoonup b) \vee (a \rightharpoonup c) \vdash (a \rightharpoonup b \vee c)$;
22. $(\forall a)x \wedge (\forall a \downarrow x)(y \downarrow)(\downarrow x) \vdash (\forall a)y$;
23. $(\exists a)x \wedge (\forall a \downarrow x)(y \downarrow)(\downarrow x) \vdash (\exists a)y$;
24. $x \wedge (\forall a \downarrow x)(y \downarrow)(\downarrow x) \vdash y$;
25. $\vdash (a \downarrow \sim P) \rightleftharpoons (a \downarrow \neg P) \vee (a \downarrow\!? P)$;
26. $\vdash a \downarrow \sim\sim P \rightleftharpoons a \downarrow P$;
27. $\vdash P(a \downarrow P)$;
28. $\vdash (a \rightleftharpoons b) \rightharpoonup (c \rightleftharpoons d)$, где d образуется из c путем замены одного или более вхождений a в c на b.

Конечно, в последующем изложении приведенная система ОТТ нам не потребуется во всем объеме. Но мы сочли целесообразным привести ее здесь с целью показать общую ориентацию теории терминов.

§ 28. Координаты высказываний

Примем такие дополнения к общей теории вывода и терминов, благодаря которым они явным образом будут иметь силу для языковых опытных наук.

Если x есть высказывание (или термин), а α есть языковое выражение, обозначающее область пространства или интервал времени (или то и другое), то выражение вида «x в α» также будем считать высказыванием (соответственно термином). Будем называть α координатами x. Сокращенно высказывания и термины такого типа будем записывать символами $[x\alpha]$. Между x и α в $[x\alpha]$ никакой логической

связи не предполагается (хотя она и не исключена в качестве частного случая). Будем говорить, что в $[x\alpha]$ высказывание (или термин) x связано координатами α.

Если x есть высказывание или термин, а y есть высказывание, то «x при y» (или «x при том условии, что y») есть высказывание или, соответственно, термин. Будем называть y условием x. Будем также для краткости такие высказывания и термины записывать в виде $[xy]$. Будем говорить, что x в $[xy]$ связано условием y.

Между x и y в $[xy]$ никакой логической связи в общем случае не предполагается, т. е. из $[xy]$, где x есть высказывание, логически не следуют высказывания $x \to y$ и $y \to x$. Если же x есть термин, то отсутствие логической связи x и y очевидно (поскольку y есть высказывание).

Теория логических координат (ТЛК) строится как дополнение к ОТД и ОТТ.

Алфавит ТЛК:

1) переменные для терминов пространственных координат $s, s^1, s^2, \ldots$;

2) переменные для терминов временных координат $t, t^1, t^2, \ldots$;

3) переменные для терминов условных координат $u, u^1, u^2, \ldots$;

4) переменные для терминов любых координат и их комбинаций $v, v^1, v^2, \ldots$.

Дополнение к определению пропозициональной формулы: если x есть пропозициональная формула, а k есть переменная для координат, то $[xk]$ есть пропозициональная формула. Дополнение к определению терминной формы: если a есть терминная форма, а k есть переменная для координат, то $[ak]$ есть терминная форма.

Дополнительные аксиомные схемы:

I. 1. $\vdash (x \vdash y) \leftrightarrow ([xv] \vdash [yv])$;
2. $\vdash (x \vdash y) \leftrightarrow (\forall v)(x \vdash y)$;
3. $\vdash (\vdash x) \leftrightarrow (\forall v)(\vdash x)$.

II. 1. $[[xt^1]t^2] \dashv\vdash [xt^1]$;
2. $[[xs^1]s^2] \dashv\vdash [xs^1]$;
3. $[[xs]t] \dashv\vdash [[xt]s]$;
4. $[[xv^1]v^2] \dashv\vdash [xv^1v^2]$.

III. 1. $\vdash [[xt^1]t^2] \rightleftharpoons [xt^1]$;
2. $\vdash [[xs^1]s^2] \rightleftharpoons [xs^1]$;
3. $\vdash [[xs]t] \rightleftharpoons [[xt]s]$.

IV. 1. $(\exists a)x \vdash (\exists v)[xv]$;
2. $(\forall v)[xv] \vdash (\forall a)x$;
3. $(\exists v)[xv] \vdash (\exists v)x$;
4. $(\forall v)[xv] \vdash (\forall v)x$.

V. 1. $[(x \wedge y)v] \dashv\vdash [xv] \wedge [yv]$;
2. $[(x \vee y)v] \dashv\vdash [xv] \vee [yv]$;
3. $[(x \to y)v] \dashv\vdash [xv] \to [yv]$;
4. $[(\sim x)v] \dashv\vdash \sim [xv]$;
5. $[((\alpha Ж a)x)v] \dashv\vdash (\alpha Ж a)[xv]$;
6. $(\alpha Ж a)[xv] \dashv\vdash (\alpha Ж [av])x$;
7. $[\alpha P(b)v] \dashv\vdash \alpha[Pv](b)$;
8. $[\alpha P(b)v] \dashv\vdash \alpha P([bv])$,

где α означает наличие k или ? или отсутствие обоих, Ж есть любой из кванторов $\forall$ и $\exists$.

VI. 1. $(u \to x) \vdash [xu]$;
2. $(\exists \downarrow u)x \dashv\vdash (\exists s)(\exists t)x$;
3. $(\forall \downarrow u)x \dashv\vdash (\forall s)(\forall t)x$.

Утверждения

$$[Pv^1](a) \wedge \sim [Pv^2](a), \quad [xv^1] \wedge \sim [xv^2], \quad (\forall [av^1])x \wedge \sim (\forall [av^2]x),$$

и т. п. не являются противоречиями, а утверждения

$$[Pv^1](a) \vee \sim [Pv^2](a), \quad [xv^1] \vee \sim [xv^2], \quad (\forall [av^1]x \vee \sim (\forall [av^2])x),$$

и т. п. не являются тавтологиями.

Примем определение: высказывание x будем называть локальным, если и только если

$$(\exists v)x \wedge (\exists v) \sim x,$$

и универсальным, если и только если

$$(\forall v)x \vee (\forall v) \sim x.$$

Если высказывание не является локальным, из этого не следует, что оно универсально, поскольку

$$\sim ((\exists v)x \wedge (\exists v) \sim x) \dashv\vdash ((\forall v)x \vee (\forall v) \sim x) \vee ((?\forall v)x \vee (?\forall v) \sim x).$$

Точно также из отрицания универсальности высказывания не следует его локальность, поскольку

$$\sim ((\forall v)x \vee (\forall v) \sim x) \dashv\vdash ((\exists v)x \wedge (\exists v) \sim x) \vee ((?\exists v)x \wedge (?\exists v) \sim x).$$

Так что возможны случаи, когда о высказывании нельзя сказать, что оно локально, и нельзя сказать, что оно универсально. А именно это имеет место тогда, когда

$$(?\forall v)x \vee (?\forall v) \sim x) \wedge ((?\exists v)x \wedge (?\exists v) \sim x).$$

Так что для эмпирических наук в данном случае сохраняется неопределенность, исключаемая для наук дедуктивных.

Для условий имеют силу правила, аналогичные правилам для координат пространства и времени. Здесь кажется неправомерным правило

$$[xu^1u^2] \dashv\vdash [xu^1].$$

Но это правило имеет силу без исключения. Видимость его неправомерности создается вследствие его смешения с другим утверждением

$$[x(u^1 \wedge u^2)] \dashv\vdash [xu^1],$$

которое действительно неправомерно в общем случае (если u^2 есть u^1 или из u^1 следует u^2, то оно правильно).

Условия и координаты полезно различать с точки зрения возможности формулировать новые правила, отличные от правил 1–8. Например, возможно такое правило:

$$\vdash (\exists a)x \rightarrow (\exists \downarrow u)(\forall a)M(\downarrow [xu]),$$

где a есть переменная для эмпирических индивидов, свободно входящая в x, а M есть предикат «возможно». Используя это правило, можно получить вывод: «В некоторых условиях любой человек может стать императором России». Вывод кажется парадоксальным. Но если попытаться установить условия, при которые некоторые люди становились императорами России, то видимость парадоксальности отпадет. Тем более речь идет о возможности, которая далеко не всегда реализуется.

§ 29. Следствия из определений

Возьмем определение «Ромб есть равносторонний четырехугольник». Слово «есть» здесь играет роль знака $= Df \cdot$, определяющая часть есть литературный вариант термина «четырехугольник, у которого все стороны равны». Кажется очевидным, что будут верны утверждения «у ромба все стороны равны» и «ромб есть четырехугольник» (где слово «есть» играет уже другую роль, а именно — роль предиката $\rightarrow$). Эти утверждения суть следствия из определений.

Однако правила получения следствий из определений явным образом не сформулированы, а объяснить, почему принимаются приведенные выше утверждения без явной формулировки этих правил, невозможно. (Это, кстати сказать, хороший пример к тому, что говорилось выше о роли логики в обработке языка).

Дело в том, что как только операция, с помощью которой вводится новый термин b, закончена (записана, произнесена, прочитана, услышана и т. п.), b становится полноправным термином, и все то, что сказано о нем, становится полноправным утверждением. И это обстоятельство можно зафиксировать такими правилами:

1) Если принято $a = \boldsymbol{Df} \cdot b$, то считается истинным $a \rightleftharpoons b$.
2) Если принято $x \equiv \boldsymbol{Df} \cdot y$, то считается истинным $x \equiv y$.

Возьмем, например, определение

$$a = \boldsymbol{Df} \cdot b \downarrow P.$$

Если оно принято, то согласно правилу (1) принимается как истинное утверждение

(1) $a \rightleftharpoons b \downarrow P$.

Имеется логическое правило, согласно которому истинно

(2) $P(b \downarrow P)$,

и логическое правило, согласно которому

(3) $P(b \downarrow P) \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P) \to P(a)$.

Из (1) и (2) получаем

(4) $P(b \downarrow P) \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P)$,

и из (3) и (4) получаем

(5) $P(a)$.

Имеется логическая аксиома

3) $\vdash P(b \downarrow P)$

и логическая аксиома

4) $x \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P) \vdash x(a/b \downarrow P)$.

Из (3) по правилу для кванторов K^{24} получаем

5) $\vdash (\forall b \downarrow P)P(b \downarrow P)$,

а (4) принимает вид

6) $(\forall b \downarrow P)P(b \downarrow P) \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P) \vdash (\forall a)P(a)$,

если x есть (5).

Из (2) и (5) получаем по $Д^{16}$

7) $\vdash (\forall b \downarrow P)P(b \downarrow P) \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P)$.

Из (6) и (7) получаем по $Д^{14}$

8) $\vdash (\forall a)P(a)$.

И, наконец, по K^{1} имеем

9) $\vdash P(a)$.

Мы рассмотрели самый простой случай. В более сложных случаях вывод следствий из определений имеет еще более громоздкое логическое описание. Может быть отчасти и по этой причине обычно не стремятся к логической ясности или прибегают к другой форме определений, о которой будет рассказано в следующем параграфе.

§ 30. Имплицитные определения

Определения, в которых явно принимается решение употреблять некоторые выражения как термин или как высказывание, называются явными, или эксплицитными. Такие определения имеют достоинства, поскольку их логическое строение очевидно, и к вводимым с их помощью терминам не предъявляется никаких дополнительных претензий. Но они в ряде случаев получаются довольно громоздкими и даже практически бывают невыполнимыми. С некоторыми трудностями сопряжено также получение из них нужных следствий. Эти недостатки эксплицитных определений частично восполняют так называемые имплицитные определения.

Имплицитные определения обладают такими свойствами:

1) вновь вводимые (определяемые) термины принимаются как первично ясные;

2) формулируется в качестве аксиом некоторая совокупность утверждений, содержащих термины, указанные в пункте (1).

Эти аксиомы подбираются с таким расчетом (хотя это обычно не всегда осознается самими изобретателями определений): если бы определяемые термины были введены эксплицитными определениями, то эти аксиомы были бы следствиями их. Очевидное удобство таких определений — интересы дедукции. Имплицитные определения особенно удобны для введения логических операторов, а также в тех случаях, когда в употребление совместно вводятся сразу несколько терминов и операторов (или комбинация из тех или других). Имплицитные определения порой употребляются совместно с эксплицитными.

Приведем пример. Пусть требуется определить термины 1 («единица») и 0 («ноль») и терминообразующий оператор + («плюс») для таких терминов. Примем такое эксплицитное определение Н-числа:

1) 1 и 0 суть Н-числа;

2) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть Н-числа, то $(a^1 + \ldots + a^n)$ есть Н-число;

3) нечто есть Н-число только в силу пунктов (1–2).

Примем, далее, такую систему аксиом, которая есть имплицитное определение 1, 0 и +:

1. $\vdash (a + 1) > a$;

2. $\vdash (a > b) \to (a > b + 1) \vee (a = b + 1)$;
3. $\vdash (a^1 + a^2 + \ldots + a^n) = b$,

где b отличается от $(a^1 + a^2 + \ldots + a^n)$ лишь начилием скобок, удовлетворяющих определению Н-числа;

4. $\vdash (a + 0) = a$;
5. $\vdash (a + b) = (b + a)$.

Суть этого определения: термины 1 и 0 и оператор + вводятся именно такими, что будут верны утверждения (1–5). Из них по правилам логики можно выводить следствия для чисел с 1, 0 и +.

Иногда в простых случаях имплицитное определение легко превращается в эксплицитное, и наоборот. Например, оператор $\supset$ можно эксплицитно определить так:

$$(x \supset y) \equiv Df \cdot (\sim x \vee y),$$

или, в иной форме, так: «$x \supset y$ есть сокращение для $\sim x \vee y$». В имплицитное форме этот оператор включается в алфавит системы, а к числу аксиом этой системы добавляются аксиомы для $\supset$, в частности, такие

$$(x \supset y) \dashv\vdash (\sim x \vee y).$$

Но такие преобразование не всегда практически возможны и целесообразны.

Имплицитные определения имеют свои недостатки. В них явным образом не выражено то, что они суть именно определения, вводящие в употребление новые термины или операторы. Поэтому и бывает так, что начинают искать еще какой-то их смысл сверх того, что выражено в содержащих их аксиомах, и смешивают определяющие утверждения с утверждениями, которые также содержат определяемые термины, но принимаются из иных соображений.

Хотя в случае имплицитных определений последние принимают вид аксиом, т. е. утверждений, это не означает, что исчезает разница между определениями и аксиомами-высказываниями. Высказывания строятся из терминов, значение которых известно до построения их и независимо от них. Определения даже в случае, когда им придают вид аксиом, содержат термины, значение которых без этих аксиом неизвестно.

§ 31. Неполные определения

Встречаются имплицитные определения, которые можно назвать неполными, или смешанными. Они строятся так. Каким-то образом устанавливаются ситуации, в которых уместно употребление высказываний с термином a. Признаки этих ситуаций строго не определяются

(поскольку в этом нет нужды, это практически невозможно, никто не пытался это сделать и т. п.). Но формулируются (принимаются) утверждения типа $x \vdash y$ или $\vdash (x \to y)$, в которых в x входит определяемый термин a, а в y нет. Поскольку при этом нет обратных утверждений $y \vdash x$ и $\vdash (y \to x)$, то элиминировать из языка высказывания с термином a нельзя.

Приведем пример. Из языковой практики известно, в каких ситуациях уместно употреблять выражения вида «a порождает b». Можно указать некоторые признаки таких ситуаций, в частности — пространственная близость a и b. Но для некоторых целей бывает достаточно этого привычного употребления и таких дополнительных пунктов определения:

1) из «a порождает b» следует «a возникает раньше b»;

2) из «a порождает b» следует «если не возникает a, то не возникает и b».

И лишь эти пункты могут затем фигурировать в рассуждениях, претендующих на логическую строгость.

§ 32. Псевдоопределения

Встречаются случаи введения языковых выражений, которые мы называем псевдоопределениями. Они строятся так. Имеется совокупность высказываний x, в связи с которой вводится выражение a. Практически a рождается как сокращение для x (что обычно не осознается), но затем, отделившись от породившей его основы, a начинает жить как выражение с самостоятельным смыслом, независимым от смысла x. Особенность здесь состоит в том, что выражению a придают вид высказывания $P(b)$. Но делается это не в силу намерения ввести в употребление предикат P или субъект b, а в силу языковой практики строить предложения, расчленяя их на субъекты и предикаты, и в силу ничем не ограниченной возможности конструировать a из имеющихся элементов языка. Что это будут за элементы, зависит в таких случаях не *от* интересов соблюдения правил логики при введении терминологии (о них, повторяем, обычно вообще не подозревают), а от самых различных причин — от языковой традиции, от стремления к литературной выразительности или к сенсации и т. п. А если еще к сказанному добавить то, что выражение a вводится по схеме имплицитного определения («a, если и только если x»), то $P(b)$ вообще воспринимается не как результат языкового творчества определенного сорта, а как вывод из ситуации, описываемой совокупностью высказываний x. Короче говоря, дело на поверхности выглядит так, будто высказывание $P(b)$ следует из x.

Приведем для ясности сначала обиходный пример. Пусть некто N, делая карьеру, допустил серьезные промахи в организации работы своего ведомства и во взаимоотношениях с начальством и коллегами. Пусть за это его сняли с работы без перспективы подняться вновь. Всем известно, что в таких ситуациях часто употребляются выражения «N сломал шею», «N прогорел» и т. п. Эти выражения суть краткие обозначения ситуации, имеющей место для N, причем — выражения, понятные и употребляемые в определенных условиях и для определенного круга лиц. И никому в голову при этом не приходит рассматривать введение этих выражений как определения предикатов «сломал шею», «прогорел» и т. п. или понимать их как высказывания, в которых эти предикаты употребляются буквально.

Такого рода примеры встречаются и в науке, с той лишь разницей, что здесь все понимают буквально и воспринимают как результат высочайшего развития науки, а не как результат языковых мистификаций. Так, совокупность высказываний x о поведении светового луча в районе тела A неявно сокращают выражением «пространство в районе A искривлено». Последнее воспринимается как высказывание с предикатом «искривлено», смысл которого отрывается от x и от выражения, в котором он здесь фигурирует (что значит искривленный предмет, всем известно!). Аналогично совокупность высказываний x о некоторых частицах A в некоторых условиях B неявно сокращают выражением «время для A в условиях B ускоряется (замедляется)», а слова «ускоряется» и «замедляется» воспринимаются как самостоятельные предикаты с общеизвестным смыслом, но в данном случае применимые для времени.

Здесь имеет место своего рода языковая мимикрия, которую замечают в природе и во многих случаях языковой практики в обычном общении, но которую в массовых масштабах культивируют в ряде областей науки как показатель прогресса научного мышления.

§ 33. Операционные определения

Частный случай имплицитных определений суть определения, содержащие выражения вида $x \to (y \to z)$ и $(y \to z) \to x$, в которых x есть высказывание с определяемым термином, y есть описание некоторых действий, z есть описание результата этих действий. Например, выражение «A весит B кг» можно рассматривать как замену выражения «если A поместить на весы C, то стрелка C покажет деление D».

Для одного и того же определяемого высказывания x здесь возможны различные определяющие части $y \to z$. Возможны также случаи,

когда число различных $y \to z$ не указано, не ограничено или вообще не устанавливается общепринятым соглашением. Так что здесь возможны различные варианты, в частности, такие:

1) $x \leftrightarrow (y \to z)$;
2) $x \leftrightarrow ((y^1 \to z^1) \vee \ldots \vee (y^n \to z^n))$;
3) $((y^i \to z^i) \to x) \wedge (x \to (a \to b)$,

где sy^i и sz^i суть любые элементы некоторых заданных классов, а a и b суть переменные для элементов этих классов.

§ 34. Интуитивно очевидные утверждения

Встречаются случаи, когда те или иные утверждения принимаются как интуитивно ясные или очевидные. Например, таковы утверждения «предмет, имеющий некоторое свойство, имеет это свойство», «прямая есть кратчайшая линия между двумя точками». Такого рода утверждения суть имплицитные определения входящих в них выражений (операторов, терминов, частей терминов) или следствия таких определений. Так, первое из приведенных выше утверждений есть часть имплицитного определения оператора ограничения («который»), а второе — термина «прямая». Эти утверждения кажутся несомненными не благодаря каким-то доказательствам, наблюдениям и т. п., а лишь благодаря тому, что мы сами неявным образом принимаем их как определения свойств соответствующих языковых выражений. Когда отвергают второе из приведенных утверждений, то фактически употребляют термин «прямая» уже в другом смысле и не более того (а отнюдь не открывают какие-то новые опытные факты, противоречащие ранее принятым допущениям).

Интуиция в рассматриваемом случае есть лишь употребление выражений языка на уровне стихийно сложившихся навыков их введения. Поскольку эти навыки аморфны и их логическая природа остается неизвестной, рассматриваемые утверждения мистифицируются. Возникает проблема интуиции, которая кажется тонкой и сложной, но которая при условии достаточно тщательного анализа логических правил введения терминологии оказывается фиктивной. Выявление (экспликация) интуиции есть лишь установление смысла некоторых языковых выражений, входящих в рассматриваемые утверждения, профессионально разработанными средствами логики.

§ 35. Переменные

Чтобы придать утверждениям логики желаемую общность, очертить границы их применимости, придать им компактный и обозримый

вид, используют особого рода символы, называемые переменными. Переменные используются и в других науках. В логике они вводятся для терминов, высказываний и логических операторов.

Переменные суть особого рода предметы, по своим физическим свойствам, по способу их продуцирования и способу манипулирования или аналогичные терминам. Обычно это буквы или буквообразующие конструкции. Если они рассматриваются как пустые места, то последние так или иначе различаются и нумеруются. Так что фактически роль переменных в таких случаях играют символы, различающие и нумерующие эти пустые места.

Предметы подходящего физического (воспринимаемого) вида вводятся в употребление в качестве переменных двумя способами:

1) явно или безусловно;
2) неявно или условно.

В первом случае просто перечисляются предметы, которые будут переменными того или иного рода. Например, принимается решение считать буквы a с индексами $1, 2, 3, \ldots$ переменными для высказываний. Во втором случае переменные не перечисляются. Их роль выполняют любые произвольные предметы подходящего вида, относительно которых из контекста бывает ясно, какого рода переменными они здесь являются. Например, в выражении «если a и b суть высказывания, то $a \wedge b$ есть высказывание» буквы a и b играют роль переменных для высказываний, что видно из самого этого выражения. Во многих случаях в науке (и не только в логике и математике) переменные вводятся в употребление неявным образом. Первый способ удобен тем, что переменные четко фиксированы. Второй способ удобен тем, что одни и те же предметы могут служить переменными разных родов (иногда бывает так, что переменные изобретать не так-то просто).

На место переменных подставляются или могут подставляться какие-то предметы, образующие область значения переменных. Существенно здесь то, что эти предметы сами являются элементами языка — терминами, высказываниями, частями терминов, операторами и т. д. Это суть предметы, которые на самом деле можно подставлять на место переменных. Когда в качестве области значения переменных называют какие-то предметы неязыковой природы, то это делают либо в силу привычки (не надо думать о логической сути переменных), либо в силу удобств языка (подразумевая, например, что на место переменных для контактов подставляются не сами контакты электрической сети, а их обозначения), либо в интересах каких-то концепций и т. д.

Предметы, подставляемые на место переменных, можно разделить на две группы. Это разделение не означает, что в всех случаях употребления переменных оно имеет место для одних и тех же пере-

менных. К первой группе относятся предметы, которые входят в язык данного построения (теории, исчисления), или могут быть образованы из элементов языка этого построения. Например, такова подстановка пропозициональных формул (в том числе — пропозициональных переменных) на место пропозициональных переменных. Такие подстановки суть технические средства получения теорем в рамках данных построений. Назовем их формальными или синтаксическими. Будем в таких случаях говорить о синтаксической области значения переменных.

Ко второй группе относятся предметы, которые не фигурируют в языке построения (теории, исчисления, вообще какого-то фрагмента науки) с данными переменными и не могут быть в нем сконструированы. Это, например, подстановка предложений конкретных реальных языков на место пропозициональных переменных. Подстановки такого рода назовем интерпретационными или семантическими. Будем в таких случаях говорить о семантической области значения переменных (или об области их интерпретации, приложения). Лишь благодаря интерпретационным подстановкам из выражений с переменными получаются высказывания.

Соотношение переменных и предметов из семантической области их значения аналогично соотношению терминов и обозначаемых ими предметов. Напоминаем, что здесь предметную область образуют термины, высказывания, части их, операторы и т. д., короче говоря — элементы языка. Так, соотношение пропозициональной переменной a и высказывания b есть соотношение a как термина и b как обозначаемого этим термином предмета.

Подстановка предметов из области значения переменных на место переменных осуществляется по таким правилам:

*V*1. На место любой переменной данного рода, взятой отдельно, может быть подставлен любой предмет из области ее значения.

*V*2. На место различных вхождений одной и той же переменной в данное выражение подставляются одинаковые предметы из области значения переменных этого рода (но не один и тот же предмет).

Здесь важно обратить внимание на то, что если на место двух различных вхождений переменной a в данное выражение подставлен термин b, то различные вхождения b в получаемое выражение не всегда означают один и тот же предмет. Они могут обозначать различные индивиды одного рода.

*V*3. На место различных переменных в данном выражении могут быть подставлены различные предметы из области их значения.

*V*4. В случае семантической подстановки подстановка предмета b на место переменной a осуществляется во всех местах, где a входит в данное выражение.

Таким образом, переменные можно рассматривать как термины, но как термины особого рода. Особенность здесь состоит в том, что приходится фиксировать два или более предмета, причем требуется учесть то, что речь идет о любых предметах данного рода, что они могут как-то различаться (но безразлично, как) и т. д. Например, переменные для терминов, обозначающих столы (удобнее говорить «переменные для столов»), различаются как выражения «один стол», «другой стол», «третий стол» (третий не в смысле порядка, а в смысле отличия от первых двух) и т. п. Причем, каждое из этих выражений обозначает любой стол. Но если они фигурируют совместно, то их различие означает: если одним из них обозначается какой-то стол, то другое из них может обозначать другой стол. Короче говоря, переменные суть технические приспособления, упрощающие употребление терминов в ситуациях с множествами предметов.

С другой стороны, не всякий общий термин можно рассматривать, в свою очередь, как переменную. Возьмем, например, термин «число» и видовой термин «нечетное число». Будем рассматривать первый как переменную, а второй — как предмет из области ее значения. Высказывание «Некоторые числа без остатка делятся на два» истинно, а высказывание «Некоторые нечетные числа делятся на два без остатка», полученное из него по правилу $V4$, ложно.

Примем такие правила для переменных, являющихся переменными для терминов:

$V5$. Из утверждения «если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть b, то A» получается утверждение «если $a^1, \ldots, a^{n-1}$ суть b, то $(\exists q)B$», где B образуется из A путем замены одного или более свободных вхождений a^n в A на q, а q есть переменная для b, не входящая в A.

Если $n = 1$, то $V5$ примет вид: из «если a есть b, то A» получается $(\exists q)B$. Например, из утверждения «если a и $a + 1$ суть натуральные числа, то $a + 1 > a$» получается «если a есть натуральное число, то $(\exists q)(q > a)$», где q есть переменная для натуральных чисел.

$V6$. Из утверждения «если $a^1, \ldots, a^n$ суть b, то A» получается «если $a^1, \ldots, a^{n-1}$ суть b, то $(\forall q)B$», где B образуется из A путем замены всех свободных вхождений a^n в A на q, а q есть переменная для b, не входящая в A.

Если $n = 1$, то $V6$ примет вид: из «если a есть b, то A» получается $(\forall q)B$. Пример для $V6$: из «если a есть натуральное число, то $(\exists q)(q > a)$» получается $(\forall r)(\exists q)(q > r)$, где r есть переменная для натуральных чисел.

§ 36. Определения с переменными

Частный случай определений — определения с переменными. Они строятся по такой логической схеме: если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть термины такие, что верны утверждения X с этими терминами, то $b^1, \ldots, b^m$ $(m \geqslant 1)$ будут терминами такими, что будут верны утверждения Y с этими терминами. Здесь $a^1, \ldots, a^n$ играют роль переменных для терминов.

Правило для определений с переменными: в самом определении и в выводимых из него следствиях на место $a^1, \ldots, a^n$ нельзя подставлять $b^1, \ldots, b^m$ и все те термины, которые содержат $b^1, \ldots, b^m$ или определяются через них. Это правило есть лишь выявление содержащегося в самом определении условия, согласно которому $a^1, \ldots, a^n$ должны быть терминами независимо от определения $b^1, \ldots, b^m$.

Нарушение приведенного правила может оказаться причиной парадоксальных следствий. Именно так образуется известный парадокс множества нормальных множеств.

Для наглядности примем сокращения: n — нормальное множество, Mn — множество нормальных множеств, $\in$ — знак включения элемента в множество ($a \in b$ читается как «a есть элемент b», «a включается в b», «a содержится в b», и т. п.). Определение нормального множества можно записать так: n будет термином таким, что если a есть термин множества, то

$$\sim(a \in a) \to (a \in Mn),$$
$$(a \in a) \to \sim(a \in Mn)$$

(т. е. если a не включается в самого себя, то a включается в множество нормальных множеств).

Парадокс получается, если подставить на место переменной a термин Mn:

$$\sim(Mn \in Mn) \to (Mn \in Mn),$$
$$(Mn \in Mn) \to \sim(Mn \in Mn)$$

(т. е. если Mn не включается в Mn, то Mn включается в Mn, и если Mn включается в Mn, то Mn не включается в Mn). Такая подстановка кажется правомерной, поскольку Mn есть термин множества. Но она ошибочна, поскольку по правилам определения выражение Mn и содержащее его выражение n до построения определения вообще терминами не являются, а по самой формулировке определения a есть переменная для предметов, являющихся терминами до построения определения и независимо от него (причем, только для терминов, обозначающих множества). Так что если строго соблюдать правила определения, парадокс не получится.

Используя переменные, можно указать такие виды имплицитных определений для одного термина:

1) $(a \rightharpoonup b) \to (x \dashv\vdash y)$;
2) $(a \rightharpoonup b) \to (x \leftrightarrow y)$;
3) $(a \rightharpoonup b) \to (\vdash x)$;
4) $(a \rightharpoonup b) \to (x \vdash y)$;
5) $(a \rightharpoonup b) \to (x \to y)$,

а также определения (6–10), в которых вместо $\to$ фигурирует $\leftrightarrow$ (т. е. имеет место обратное утверждение). Причем, в (1–10) буква a есть переменная, b — вновь вводимый термин. Определения (4), (5), (9), (10) суть неполные (или частичные) определения, поскольку вопрос о принятии $y \vdash x$ или $y \to x$ остается открытым или известно, что эти утверждения неверны.

§ 37. Многосмысленность языковых выражений

Общеизвестно, какую негативную роль играет многосмысленность языковых выражений в науке и вообще в языковой практике людей. И сл ожность борьбы с ней состоит в том, что она не всегда заметна, а порой обнаружение ее требует тщательного анализа. Во-первых, множества предметов, обозначаемых данными терминами, могут почти совпадать, так что их незначительное несовпадение вообще не принимается во внимание (хотя именно оно то и может сыграть роковую роль). Во-вторых, возможно, что множество предметов может предполагаться одно и то же, но обозначающие их термины вводятся в употребление различными способами, так что из них естественно получаются различные следствия. Сказанное относится и к логическим операторам.

Возьмем, например, термин «пространство». Из привычного словоупотребления кажется ясным, о чем идет речь, когда говорят о пространстве. Но в одних случаях имеют в виду пространственные объемы отвлеченно от тех предметов, которые в них находятся или могут в них поместиться, а в других — эти объемы со всеми содержащимися в них предметами или с заполняющим их особого рода веществом. Хотя здесь имеет место просто различное словоупотребление, одни лица обвиняют других в ошибках. Современные «теоретические» области науки буквально кишат такого рода ситуациями.

§ 38. Экспликация

Встречаются термины и высказывания, смысл которых считается ясным в некотором привычном словоупотреблении и более или менее однозначным. При этом от терминов не требуется, чтобы они были строго определены, а от высказываний не требуется, чтобы их логическое строение было выражено явно. Более того, иногда в таких случаях строгое определение терминов и построение предложений в соответствии со стандартами логики вообще бывает затруднено или практически невозможно. И если возникает потребность использования таких терминов и высказываний в какой-либо науке, то их обычное употребление может оказаться неприемлемым: оно многосмысленно, затрудняет или вообще исключает возможность получения нужных следствий, не дает гарантии правильности рассуждений и т. п. Поэтому вместо этих терминов и высказываний для некоторых целей науки употребляют своего рода заместителей, которые строго определяются и логическое строение которых выражается достаточно явным образом. Эта операция введения терминов и высказываний, замещающих некоторые данные термины и высказывания, называется экспликацией последних.

Задача экспликации языковых выражений состоит не в том, чтобы перечислить, в каких различных смыслах они употребляются, и не в том, чтобы выбрать одно какое-то их употребление, а в том, чтобы определить или дать четкую формулировку некоторых выражений, к которым применимы правила логики, которые удобны с точки зрения вывода нужных следствий, которые гарантируют однозначность результатов проверки и т. п., но которые при всем этом в какой-то мере совпадают с данными языковыми выражениями. Если при этом сохраняются те же слова и те же формулировки, здесь все равно происходит удвоение терминологии.

Экспликацию выражений языка, при которой используются лишь средства логики и некоторые общедоступные навыки языковой практики, будем называть логической. Упомянутые навыки составляют обычный элемент культуры и не требуют для своего понимания никакой специальной науки. Выше мы логическую экспликацию использовали систематически, в частности — ввели операторы $\sim, \vee, \wedge, :$ и т. д. как выражения, эксплицирующие известные выражения языка «не», «или», «и» и т. д. И в дальнейшем она будет важнейшим средством нашего анализа.

Экспликации можно сравнивать. Пусть $a^1 = Df \cdot b$ и $a^2 = Df \cdot c$ суть экспликации одного и того же выражения a. Аналогично пусть $a^1 \equiv Df \cdot b$ и $a^2 \equiv Df \cdot b$. Возможны случаи:

1) $b \multimap c$ (в случае определений $c = Df \cdot$) или $b \to c$ (в случае определений $c \equiv Df \cdot$);

2) $(c \multimap b) \wedge \sim (b \multimap c)$ или, соответственно, $(c \to b) \wedge \sim (b \to c)$;

3) $b \rightleftharpoons c$ или, соответственно, $b \leftrightarrow c$;

4) $\sim (b \multimap c) \wedge \sim (c \multimap b)$ или, соответственно, $\sim (b \to c) \wedge \sim (c \to b)$.

Так что возможны случаи, когда люди говорят об одних и тех же предметах, но не могут договориться в силу различных способов определения одних и тех же выражений.

§ 39. Непротиворечивость терминов

Термины могут быть построены или определены так, что из содержащих их высказываний могут выводиться противоречивые высказывания. Например, из высказывания $(\wedge P\widetilde{P})(a)$ выводится $P(a) \wedge \sim P(a)$, и причина этого — строение предиката; если принято определение $a = Df \cdot b \downarrow (\wedge P\widetilde{P})$, то будет доказуемо $P(a) \wedge \sim P(a)$, и причина этого — указанное определение.

Будем считать, что субъект a противоречив, если и только если найдется такой простой и неопределяемый предикат P, что будет доказуемо $P(a) \wedge \sim P(a)$. Будем считать, что предикат P противоречив, если и только если найдется такой простой и неопределяемый субъект a, что будет доказуемо $P(a) \to Q(a) \wedge \sim Q(b)$. Термины непротиворечивы, если они не являются противоречивыми.

§ 40. Теория доказательства

Теорией доказательства мы называем раздел логики, определяющий свойства предиката «доказано» (или «доказуемо»). Выражения вида «высказывание x доказуемо» мы будем записывать символами

$$\vdash x,$$

где $\vdash$ есть предикат доказуемости. Мы не вводим здесь особый знак в отличие от предиката логической истинности по следующим соображениям. Утверждения «высказывание x доказуемо (доказано)» принимаются в таких и только таких случаях:

1) x есть теорема логики;

2) x есть определение, часть определения или следствие из определения, и в этом случае x есть теорема логики;

3) x есть допущение, и в этом случае допущение «пусть x доказуемо» ничем не отличается от допущения «пусть x логически истинно».

Короче говоря, мы не допускаем никаких иных источников доказуемости, кроме определений терминов и логических операторов

и следствий из них. Ниже мы изложим некоторые дополнения к нашей логической теории, образующие фрагмент теорий доказательства. Мы считаем, что принципиально невозможна окончательно завершенная (полная) теория доказательства, как невозможна окончательно завершенная логика вообще. Ниже мы покажем также (на примере излагаемого фрагмента и затем на примере теории полной индукции), что теория доказательства привносит нечто новое в теорию вывода вообще.

Дополнение к определению пропозициональной формулы:

1) если x есть пропозициональная формула, то $(\vdash x)$ есть пропозициональная формула;

2) если x и y суть пропозициональные формулы, то $(x \vdash y)$ есть пропозициональная формула.

Дополнительные аксиомы (или аксиомные схемы):

I. 1. $(\vdash x) \vdash x$.
2. $(\vdash x) \vdash (\vdash (\vdash x))$.
3. $\sim(\vdash x) \vdash (\vdash \sim(\vdash x))$.
4. $(x \vdash y) \vdash (\vdash (x \vdash y))$.
5. $\sim(x \vdash y) \vdash (\vdash \sim(x \vdash y))$.
6. $(x \vdash y) \vdash ((\vdash x) \vdash (\vdash y))$.

II. 1. $\vdash (x \vee \sim x)$.
2. $(\vdash x) \wedge (\vdash y) \vdash (\vdash (x \wedge y))$.
3. $(\vdash x) \vee (\vdash y) \vdash (\vdash (x \vee y))$.

III. 1. $(x \vdash y) \vdash (\vdash (x \to y))$.
2. $(x \wedge z \vdash y) \wedge \sim(z \vdash y) \wedge (\vdash z) \vdash (\vdash (x \to y)$.
3. $(\vdash \sim(x \to y)) \vdash \sim(x \vdash y)$.
4. $\sim(\vdash (x \to y)) \vdash (\vdash \sim(x \to y))$.
5. $(\vdash \sim(x \to y)) \vdash \sim(\vdash (x \to y))$.

IV. 1. $(\exists Q)(((\vdash x) \to Q(mx)) \wedge (\exists a)(Q(mA) \wedge Q(m \sim B)) \vdash (\vdash \sim(A \to B))$.
2. $(\exists Q)(((\vdash x) \to Q(mx)) \wedge (\exists a)(Q(mA) \wedge \sim Q(mB)) \vdash (\vdash \sim(A \to B))$,

где mx, mA, mB и $m \sim B$ читаются как «Высказывание x» $(A, B, \sim B$ соответственно).

V. $(w \wedge (\vdash x) \vdash (\vdash y)) \wedge (w \wedge (\vdash y) \vdash (\vdash x)) \vdash (w \wedge (\vdash z) \vdash (\vdash v))$, где v образуется из z путем замены по крайней мере одного вхождения x в z на y.

VI. 1. $\vdash (\exists a) \sim x \to \sim(\vdash x)$, где a свободно входит в x.
2. Если в y входит переменная, не входящая в x, то $\sim(x \vdash y)$
3. Если $\sim(\vdash x), mo \sim(\vdash (x \wedge y))$.
4. Если $\sim(x \vdash y), mo \sim(x \vdash y \wedge z)$.
5. Если $\sim (\vdash (A \to B))$, и по крайней мере одна переменная, свободно входящая в A и в B, не входит в C, то $\sim(\vdash (A \wedge C \to B))$.

§ 41. Полная (строгая) индукция

Наш общий взгляд на индукцию заключается в следующем. Теория индукции (индуктивная логика), как и прочие разделы логики, лишь определяет свойства некоторых языковых выражений для некоторых типов ситуаций. Она ни в коем случае не есть некая теория открытий, — логика открытий вообще есть нонсенс. Ненадежность правил индукции во многих случаях есть следствие того, что фактические условия, в которых они используются, не совпадают с условиями, которые по идее должны быть зафиксированы в их формулировке.

Теория индукции есть лишь аспект логики, а не особый локализованный ее раздел. В различных разделах логики, по идее, могут быть сформулированы правила, считаемые правилами индукции. Излагаемая здесь теория полной (или строгой) индукции рассматривается нами как часть теории доказательства, определяющая свойства предиката доказуемости в ассоциации с квантором общности для множеств упорядоченных терминов.

В дальнейшем мы будем рассматривать множества терминов. При этом переменные для терминов мы, в свою очередь, рассматриваем как термины. Переменные и термины связаны соотношением: если a есть термин из области значения переменной b, то $a \rightharpoonup b$; если b есть переменная, a есть термин, и $a \rightharpoonup b$, то a есть термин из области значения b. Из терминов (и в том числе — из переменных) образуются пары, тройки и т. д., в общем — группы терминов. Условимся считать:

1) отдельный термин есть группа терминов;

2) если $a^1, \ldots, a^n$ суть термины (группы), то $(a^1, \ldots, a^n)$ есть группа терминов.

Группа терминов есть термин. Для групп терминов имеют силу правила:

$$((a^1, \ldots, a^n) \rightharpoonup (b^1, \ldots, b^n)) \dashv\vdash (a^1 \rightharpoonup b^1) \wedge \ldots \wedge (a^n \rightharpoonup b^n),$$

$$(\forall (a^1, \ldots, a^n))x \dashv\vdash (\forall a^1) \ldots (\forall a^n)x,$$

$$(\exists (a^1, \ldots, a^n))x \dashv\vdash (\exists a^1) \ldots (\exists a^n)x.$$

Группа терминов $(a^1, \ldots, a^n)$ свободно входит в x, если и только если все $a^1, \ldots, a^n$ свободно входят в x. Подстановкой $(a^1, \ldots, a^n)$ на место $(b^1, \ldots, b^n)$ в x будем называть подстановку соответственно a^1 на место $b^1, \ldots, a^n$ на место b^n везде, где $b^1, \ldots, b^n$ свободно входят в x. В дальнейшем, говоря о терминах (и переменных), мы будем иметь в виду при этом и группы терминов (группы переменных) с учетом сделанного замечания.

Простейший случай полной индукции — правила для индивидуальных терминов:

I. 1. $V \wedge (\vdash x) \vdash (\vdash (\forall a)x)$.
2. $V \wedge (\vdash (\forall a)x) \vdash (\vdash x)$,
где V есть утверждение «термин a индивидуален».

Пусть M есть конечное множество терминов. Пусть оно разделено на конечное число непустых и попарно непересекающихся подмножеств $M^1, \ldots, M^n$ $(n \geqslant 2)$. Пусть a есть переменная для терминов M, ia есть переменная для терминов M^i $(i = 1, \ldots, n)$; ix есть высказывание, образованное из x путем замены всех свободных вхождений a на ia, причем — никакие ia не входят в x, W есть высказывание: «$(1a \rightarrow a) \wedge \ldots \wedge (na \rightarrow a)$, и для любого термина b имеет силу $(b \rightarrow a) \rightarrow ((b \rightarrow 1a) \vee \ldots \vee (b \rightarrow na))$».

Правила конечной полной индукции:

II. 1. $W \wedge (\vdash (\forall 1a)1x) \wedge \ldots \wedge (\vdash (\forall na)nx) \vdash (\vdash (\forall a)x)$.
2. $W \wedge (\vdash (\forall a)x) \vdash (\vdash (\forall 1a)1x) \wedge \ldots \wedge (\vdash (\forall na)nx)$.

Следствия из II.1 и II.2:

3. $W \wedge (\sim(\vdash (\forall 1a)1x) \vee \ldots \vee \sim(\vdash (\forall na)nx)) \vdash \sim(\vdash (\forall a)x)$.
4. $W \wedge \sim(\vdash (\forall a)x) \vdash \sim(\vdash (\forall 1a)1x) \vee \ldots \vee \sim(\vdash (\forall na)nx)$.

Частный случай конечной полной индукции — каждое из $M^1, \ldots, M^n$ содержит только по одному элементу. Еще более узкий случай — каждый из терминов, входящих при этом в $M^1, \ldots, M^n$, индивидуален. Благодаря I из II получаются правила:

$$W \wedge V \wedge (\vdash 1x) \wedge \ldots \wedge (\vdash nx) \vdash (\vdash (\forall a)x),$$
$$W \wedge V \wedge (\vdash (\forall a)x) \vdash (\vdash 1x) \wedge \ldots \wedge (\vdash nx),$$

где V есть утверждение «$1a, \ldots, na$ суть индивидуальные термины».

Пусть M есть множество терминов, разделенное на непустые, конечные и попарно непересекающиеся подмножества $M^1, M^2, M^3, \ldots$. Пусть эти подмножества упорядочены так:

1) M^1 есть первое по порядку;

2) M^{i+1} следует по порядку непосредственно за M^i, где $i = 1, 2, 3, \ldots$ (т. е. M^{i+1} превосходит по порядку M^i, и никакого из M^1, $M^2, M^3, \ldots$ не заключено по порядку между ними). Пусть, далее, имеются правила, по которым можно построить (написать, произнести) все элементы M^1 и построить все элементы M^{i+1}, если заданы все элементы M^i.

Пусть для любого M^i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ могут быть построены все элементы M, образующие M^{i+1}, т. е. пусть ряд подмножеств $M^1, M^2, M^3, \ldots$ (а значит и множество M) потенциально бесконечен.

Примем обозначения: a — переменная для терминов M, x — высказывание, в которое свободно входит a, ia — переменная для терминов M^i, причем $(ia \rightharpoonup a)$ и ia не входит в x, ix — высказывание, образованное из x путем замены всех свободных вхождений a на ia; W есть высказывание, фиксирующее отношения ia и a, где $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Правила безусловной бесконечной полной индукции:

III. 1. $W \wedge (\vdash (\forall\, 1a)1x) \wedge (\vdash ((\forall\, ia)ix \rightarrow (\forall\, (i+1)a)(i+1)x)) \vdash (\vdash (\forall\, a)x)$.

2. $W \wedge (\vdash (\forall\, a)x) \vdash (\vdash (\forall\, 1a)1x) \wedge (\vdash ((\forall\, ia)ix \rightarrow (\forall\, (i+1)a)(i+1)x))$.

Следствия из III:

3. $W \wedge (\sim (\vdash (\forall\, 1a)1x) \vee \sim (\vdash ((\forall\, ia)ix \rightarrow (\forall\, (i+1)a)(i+1)x))) \vdash \sim (\vdash (\forall\, a)x)$.

4. $W \wedge \sim (\vdash (\forall\, a)x) \vdash \sim (\vdash (\forall\, 1a)1x) \vee \sim (\vdash ((\forall\, ia)ix \rightarrow (\forall\, (i+1)a) \times (i+1)x)))$.

Общепринятый принцип математической индукции есть частный случай этого вида полной индукции, когда каждое из $M^1, M^2, M^3, \ldots$ содержит только по одному индивидуальному термину.

Пусть p есть переменная для терминов такая, что состав M и разделение его на $M^1, M^2, M^3, \ldots$ зависит от значения p. Пусть множество значений p таково:

1) известен (задан) первый по порядку элемент;

2) для любого значения p можно построить другое его значение, непосредственно следующее за ним по порядку.

Пусть для любого значения p можно построить все элементы M^1, и если заданы все элементы M^i, то можно построить все элементы M^{i+1}. Отношения $M^1, M^2, M^3, \ldots$ между собою таковы же, как выше. Пусть W^* фиксирует изложенные выше отношения p, ia, a.

Правила условной бесконечной полной индукции:

IV. 1. $W^* \wedge (\vdash (\forall\, (p, 1a))1x) \wedge (\vdash ((\forall\, (p, ia))ix \rightarrow (\forall\, (p, (i+1)a))(i+1)x) \vdash (\vdash (\forall\, (p, a))x)$.

2. $W^* \wedge (\vdash (\forall\, (p, a))x) \vdash (\vdash (\forall\, (p, 1a))1x) \wedge (\vdash ((\forall\, (p, ia))ix \rightarrow (\forall\, (p, (i+1)a))(i+1)x)$.

Следствия из IV:

3. $W^* \wedge (\sim (\vdash (\forall\, (p, 1a))1x) \vee \sim (\vdash ((\forall\, (p, ia))ix \rightarrow (\forall\, (p, (i+1)a)) \times (i+1)x)) \vdash \sim (\vdash (\forall\, (p, a))x)$.

4. $W^* \wedge \sim (\vdash (\forall\, (p, a))x) \vdash \sim (\vdash (\forall\, (p, 1a))1x) \vee \sim (\vdash ((\forall\, (p, ia))ix \rightarrow (\forall\, (p, (i+1)a))(i+1)x))$.

Пусть D есть высказывание такое, что

$$D \dashv\vdash (z \in M),$$

где z есть переменная для терминов-субъектов. Высказывание D определяет, какие именно термины включаются в M. Пусть $b^1, \ldots, b^m$ суть все термины, включаемые в M^{i+1}, а $B^1, \ldots, B^m$ суть все высказывания соответственно с $b^1, \ldots, b^m$ такие, что верно R:

$$\vdash (B^1 \wedge \ldots \wedge B^m \to (\forall (i+1)a)(i+1)x) \wedge ((\forall (i+1)a)(i+1)x) \to B^1 \wedge \ldots \wedge B^m).$$

Пусть S есть утверждение

$$\vdash ((\forall ia)ix \to B^1 \wedge \ldots \wedge B^k),$$

где $1 \leqslant k < m$. Пусть $D^{k+1}, \ldots, D^m$ суть высказывания, образованные из D путем замены всех свободных вхождений z соответственно на $b^{k+1}, \ldots, b^m$. Пусть T есть утверждение

$$((\vdash ((\forall ia)ix \to B^{k+1})) \vee (\vdash (D^{k+1} \to B^{k+1}))) \wedge \ldots \wedge ((\vdash ((\forall ia)ix \to B^m)) \vee (\vdash (D^m \to B^m))).$$

Имеют силу следующие правила бесконечной полной индукции с ограничением:

V. 1. $W \wedge R \wedge (\vdash (\forall 1a)1x) \wedge S \wedge T \vdash (\vdash (\forall a)x)$.
2. $W \wedge R \wedge (\vdash (\forall 1a)1x) \wedge S \wedge (\vdash (\forall a)x) \vdash T$.

VI. 1. $W^* \wedge R \wedge (\vdash (\forall (p, 1a))1x) \wedge S \wedge T \vdash (\vdash (\forall (p, a))x)$.
2. $W^* \wedge R \wedge (\vdash (\forall (p, 1a))1x) \wedge S \wedge (\vdash (\forall (p, a)x) \vdash T$.

Следствия из V:

3. $W \wedge R \wedge (\vdash (\forall 1a)1x) \wedge S \wedge \sim T \vdash \sim (\vdash (\forall a)x)$.
4. $W \wedge R \wedge (\vdash (\forall 1a)1x) \wedge S \wedge \sim (\vdash (\forall a)x) \vdash \sim T$.

Следствия из VI:

3. $W^* \wedge R \wedge (\vdash (\forall (p, 1a))1x) \wedge S \wedge \sim T \vdash \sim (\vdash (\forall (p, a)x)$.
4. $W^* \wedge R \wedge (\vdash (\forall (p, 1a)1x) \wedge S \wedge \sim (\vdash (\forall (p, a)x) \vdash \sim T$.

§ 42. Логическая непротиворечивость

Общепризнанно, что если в логической теории доказуемы выражения вида $x \wedge \sim x$, то такая теория логически противоречива и потому непригодна. Мы считаем, что такое понимание противоречивости логических теорий не всегда применимо и не всегда приемлемо. Оно неприменимо тогда, когда в логической теории определяется класс

правил логического следования $x \vdash y$ («Из x логически следует y»), и формулы вида $\sim (x \vdash y)$ вообще не фигурируют. Оно неприемлемо тогда, когда в логической теории приходится принимать во внимание строение сложных терминов. По правилам построения сложных терминов можно сконструировать такие термины, что можно доказать как положительное, так и отрицательное высказывание с таким термином. Например, возьмем термин «Круглый квадрат». Высказывания «Круглый квадрат кругл» и «Круглый квадрат не кругл» оба доказуемы, поскольку всякий круглый предмет кругл, а всякий квадрат не кругл. В общем, по правилам построения терминов можно построить термины такие, что предметам, обозначаемым ими можно приписывать некоторый признак и можно отрицать его. Как быть с такого рода терминами? Поскольку логика до сих пор лишь от случая к случаю касалась этого вопроса и специально не исследовала строение терминологии, она игнорировала эти проблемы или так или иначе подгоняла свои решения под общепринятое мнение. Запретить конструирование таких терминов нельзя, как нельзя запретить конструирование высказываний вида $x \wedge \sim x$. Можно лишь установить правила, как к ним относиться, а именно — рассматривать такие термины как логически противоречивые. Но чтобы оценить термин как логически противоречивый, надо иметь возможность вывести из высказываний с этим термином логическое противоречие. В частности, чтобы сказать, что термин «Круглый квадрат» логически противоречив, надо иметь возможность доказать высказывание «Круглый квадрат кругл и круглый квадрат не кругл», т. е. доказать логически противоречивое высказывание. С традиционной точки зрения это звучит нелепостью. Но это так. И никакого логического противоречия в самом факте доказательства логической противоречивости высказывания с логически противоречивым термином нет. Очевидно, что при этом должна быть отклонена в качестве всеобщей (и ограничена лишь определенными случаями) семантическая трактовка противоречивости и непротиворечивости логических теорий. Очевидно также, что общая теория логического следования должна исключать парадоксы, подобные парадоксам материальной и строгой импликации. В ряде работ мы рассматривали логические теории того и другого рода, стремясь еще по возможности удержаться в рамках традиции. В частности, мы ограничили логику классов, в которой фигурировали структурно сложные термины, чтобы избежать возможности доказательства противоречивых высказываний, и использовали семантическую интерпретацию для доказательства непротиворечивости общей теории логического следования. Здесь мы кратко сформулируем нетрадиционное понимание непротиворечивости логических теорий явным образом.

Пропозициональную формулу будем считать противоречивой в таких и только таких случаях:

1) $p\wedge\sim p$ противоречива (где p есть пропозициональная переменная);

2) если A противоречива, то $A\wedge B$ противоречива;

3) если A и B противоречивы, то $A\vee B$ противоречива;

4) если $x\vdash y$ есть теорема сильной теории логического следования, и при этом y противоречива, то x противоречива.

Теорию логического следования (т. е. теорию, определяющую класс логических теорем вида $x\vdash y$) будем считать логически непротиворечивой, если и только если в ней недоказуема (не является теоремой) формула $A\vdash B$ такая, что A и B находятся в дизъюнктивной нормальной форме (в форме дизъюнкции конъюнкций элементарных формул), B противоречива согласно пунктам (1–3) приведенного выше определения, а A не является противоречивой согласно этим пунктам.

В теории сильного следования доказывается, что для любой пропозициональной формулы x имеется формула y в дизъюнктивной нормальной форме такая, что $x\vdash y$ и $y\vdash x$ суть теоремы. И утверждение о непротиворечивости теории сильного следования доказывается как обычная метатеорема без использования семантической интерпретации.

Вопрос о непротиворечивости теории кванторов редуцируется к вопросу о непротиворечивости теории логического следования путем элиминации кванторов и замены предикатных формул на пропозициональные переменные. Важно здесь то, что на каждом этапе развития логической теории (логика кванторов, модальностей, классов и т. д.) вопрос о непротиворечивости соответствующих разделов должен решаться применительно к особенностям этого раздела. В особенности это касается разделов логики, содержащих теоремы вида $\vdash x$ (читается как «x принимается из чисто логических соображений»). На уровне пропозициональной логики теория формул вида $\vdash x$ (теория вырожденного следования) непротиворечива, если и только если в ней не является теоремой формула $\vdash A$, где A противоречива. Но на уровне логических теорий, в которых рассматривается строение терминов, требуется иной подход: вопрос о непротиворечивости этих теорий должен быть редуцирован к вопросу о непротиворечивости теории вырожденного следования. Например, если в теории терминов приняты аксиомы

$$\vdash P(a\downarrow P),$$

$$(\wedge PQ)(a)\dashv\vdash P(a)\wedge Q(a),$$

$$\sim P(a)\dashv\vdash \widetilde{P}(a),$$

то в ней можно доказать теорему

$$\vdash P(a \downarrow (\wedge P\widetilde{P})) \wedge \sim P(a \downarrow (\wedge P\widetilde{P})).$$

Но это не есть доказательство противоречивости теории терминов. Наличие таких теорем в теории позволяет ввести определения противоречивости терминов и рассматривать вопрос о существовании соответствующих предметов. В частности, термин $(a \downarrow (\wedge P\widetilde{P}))$ противоречив, поскольку в теории терминов доказуемо приведенное выше следствие. В разделе о предикатах существования можно получить доказательство утверждения о несуществовании предмета, обозначаемого таким термином. Запретить такие «противоречивые» следствия в теории терминов — значит ограничить возможности логики без разумных к тому оснований (предрассудки нельзя считать основанием).

Ни к каким недоразумениям такого рода следствия не ведут, поскольку в нашей теории в общем случае не являются теоремами формулы вида:

$$x \wedge \sim x \vdash y,$$

т. е. из противоречия не следует любое высказывание. Противоречия такого рода, как приведенное выше, так и остаются локальными явлениями в теории, выполняя важную роль в науке логики в целом.

Конечно, можно ввести некоторые ограничения, исключающие такие противоречивые следствия (как мы это сделали, например, в логике классов). Например, это можно сделать, приняв вместо аксиом $\vdash P(a \downarrow P)$ такие: $\vdash P(a) \rightarrow P(a \downarrow P)$. И тогда все противоречия рассматриваемого вида можно рассматривать как результат того, что антецедент ложен. При этом, конечно, сохранится добропорядочность логики. Но это будет самообман и ненужное ограничение и усложнение логики. Ведь так или иначе противоречивые термины остаются как факт, и для них должны быть установлены соответствующие правила.

Редукция, о которой говорилось выше, состоит в том, чтобы преобразовать выражения теории терминов в предикатные формулы и, в конце концов, в пропозициональные переменные, и затем выяснить, не противоречат ли полученные формулы фундаментальным теориям, а именно — теории логического и вырожденного следования. Например, выражения вида $(\wedge PQ)(a)$ при такой редукции преобразуются в выражения вида $P(a) \wedge Q(a)$, и тогда формулы

$$(\wedge PQ)(a) \dashv\vdash P(a) \wedge Q(a)$$

преобразуются в формулы вида

$$P(a) \wedge Q(a) \dashv\vdash P(a) \wedge Q(a)$$

и, в конце концов, в формулы

$$p \wedge q \dashv\vdash p \wedge q.$$

Центр тяжести логического исследования переносится на другой более важный для логики вопрос, а именно — на вопрос о соответствии логической теории некоторой интуиции. Например, утверждение «предмет, имеющий признак P, имеет этот признак», интуитивно бесспорно. И ограничивать его условием «если предмет имеет признак P» нелепо. Отрицательные предикаты тоже факт. И объединение терминов по принципу

$$P(a) \wedge Q(a) \dashv\vdash (\wedge PQ)(a),$$

где $(\wedge PQ)(a)$ читается как «a имеет P и Q», есть тоже факт языковой *практики*.

Исходя из этих соображений, мы отклоняем упреки в противоречивости наших исчислений терминов и классов, учитывающих строение терминов, как несправедливые. Ограничение логики классов, предложенное нами в работах «Логика классов» и «Logische Sprachzegeln» мы считаем уступкой традиции. Если в логике классов и терминов доказываются какие-то формулы вида

$$\vdash (A \rightharpoonup B) \wedge \sim (A \rightharpoonup B)$$
$$\vdash (A \in B) \wedge \sim (A \in B),$$

то это еще не есть признак противоречивости этих систем. Возможно, что это есть признак противоречивости терминов, входящих в A.

§ 43. Классические и неклассические отношения между высказываниями

Сложился предрассудок, будто признание трехзначности (и вообще многозначности) высказываний ведет к тому, что не все законы «обычной» логики универсальны, поскольку не все законы двузначной логики (а она соответствует «обычной» логике) сохраняются в трехзначной (многозначной). Он базируется на таких операциях. В двузначной логике определяются логические операторы («и», «или», «не» и т. п.) с помощью таблиц истинности (т. е. правила приписывать значения истинности высказываниям с этими операторами), и затем в соответствии с этими определениями находятся выражения, которые всегда истинны. Они считаются законами логики. Таковы, например, законы исключенного третьего («X или не-X») и противоречия («Не-(X и не-X)»). В трехзначной логике логические операторы сохраняются те же самые, но таблицы, определяющие их, уже другие (хотя бы потому,

что присоединяется третье значение). Эти трехзначные таблицы строятся так, чтобы имелась связь с двузначными (чтобы при исключении третьего значения получались двузначные таблицы), в результате чего получается иллюзия, будто приходится иметь дело с теми же самыми логическими операторами. Но вместе с тем трехзначные таблицы специально подбираются так, чтобы не все законы двузначной логики были законами в новых таблицах.

Трехзначные таблицы специально изобретаются такими, чтобы исключить некоторые законы двузначной логики, — этот решающий факт элиминируется. И вообще игнорируется другой не менее важный факт — возможность отыскать другие трехзначные таблицы, из которых точно так же можно получить обычные двузначные таблицы путем исключения третьего значения, но которые уже не будут исключать те же самые законы двузначной логики (как мы показали выше). В любой функциональной полной многозначной логике для любых законов двузначной логики можно построить такие определения логических операторов, что эти законы сохранятся в многозначной логике, и такие определения логических операторов, что эти законы в данной многозначной логике не сохранятся.

Короче говоря, дело здесь обстоит не так, будто трехзначность высказываний ведет к тому, что некоторые законы двузначной логики отпадают. Дело обстоит так: по каким-то причинам хотят некоторые законы двузначной логики исключить, и для этого подбирают подходящий способ построения многозначной (в данном случае — трехзначной) логики. В результате, вместо внесения ясности, к которой обязан стремиться логический анализ науки, получается смешение различных логических операторов и относящихся к ним законов логики, что ведет к мистификации довольно тривиальных вещей.

Проиллюстрируем сказанное на примере закона исключенного третьего, который исключается из числа законов особой логики микрофизики. Прежде всего следует сказать, что исключение этого закона не есть фатальное следствие допущения трехзначности высказываний, поскольку имеется возможность различных определений логических операторов. Но если даже имеется только одно-единственное определение логических операторов, соответствующее ситуации в микрофизике, остается следующее обстоятельство: определение отрицания, дизъюнкции и т. п. в трехзначной логике есть определение логических операторов, отличных от соответствующих операторов двузначной логики. И единственно правильный вывод в рассматриваемом случае можно сделать лишь такой: если α и β суть соответственно двузначные отрицание и дизъюнкция, а γ и δ — трехзначные, то возможны такие определения последних, что утверждение с α и β будет тавтологией, а утверждение с γ и δ — нет.

Само выражение «закон исключенного третьего» многосмысленно. Это может быть утверждение о том, что высказывание «*X* или не-*X*» есть тавтология при условии подходящих правил приписывания значений истинности высказываниям с логическими операторами «или» и «не». О судьбе такой тавтологии в случае многозначности высказываний мы уже говорили. Но это может быть также утверждение такого вида: «всякое высказывание либо истинно, либо не является истинным». А это утверждение остается незыблемым в любой многозначной логике, поскольку во всех случаях значения истинности высказываниям приписывается так: либо высказывание имеет некоторое значение истинности, либо не имеет его (т. е. имеет какое-то другое). При этом даже такой случай, когда высказывание не является истинным и не является ложным, не содержит ничего особенного: просто при этом высказывание не является истинным.

Законом исключенного третьего называют также утверждение вида: «всякое высказывание либо истинно, либо ложно». Если при этом ложность понимается не как отрицание истинности, а как рядовое значение и при этом допускаются другие значения наряду с истинностью и ложностью, то приведенное утверждение будет ошибочно по самим упомянутым соглашениям. Оно просто не является законом логики. Это утверждение может быть принято лишь в качестве частной гипотезы, как и любые другие гипотезы о числе значений истинности. Такого рода гипотезы не являются законами логики и не исключают друг друга. На их основе могут быть построены (и строятся) системы логических правил для различных классов высказываний — для двузначных, трехзначных и т. п. Принцип действия правил логики здесь выглядит так: если высказываниям приписываются такие-то значения истинности и если принимаются такие-то правила приписывания этих значений, то будут иметь силу такие-то логические правила.

Наконец, законом исключенного третьего называют утверждения вида «либо *X*, либо не-*X*», которое принимается как аксиома или получается из некоторых аксиом как следствие. И это утверждение принимается как часть неявного определения логических операторов «или» и «не». И независимо от того, какие соображения лежат в основе принятия такого определения и какие могут быть возражения, факт остается фактом: раз принято решение употреблять знаки «или» и «не» так, что для любого высказывания *X* будет верно утверждение «либо *X*, либо не-*X*», то никаких исключений из этого правила не может быть. Всякого рода «исключения» на деле означают лишь то, что эти операторы начинают употребляться в каком-то ином смысле.

Аналогично обстоит дело и с другими законами логики, исключаемыми из числа законов особой логики микромира, в частности, с законом коммутативности конъюнкции. Закон этот разрешает в утвер-

ждениях вида «X и Y», где X и Y суть любые высказывания, менять местами X и Y (если истинно «X и Y», то истинно «Y и X»; или из первого логически следует второе). Он либо принимается как часть неявного определения логического оператора «и», либо принимается в силу правил приписывания значений истинности высказываний с этим логическим оператором (либо из комбинации того и другого). И если возникает сомнение в правомерности применения этого закона к каким-то высказываниям, то естественно усмотреть в этом не мистический переворот в логике, а тривиальное смешение оператора «и» с каким-то другим, очень похожим, возможно, на него, или неуместное его употребление. В частности, оператор «и» может быть спутан с логическими операторами типа «и затем», «и до этого» и т. п., для которых правило коммутации действительно не имеет силы, или употреблен вместо них.

Анализ природы законов логики, конкретной логического ситуации в микрофизике и вида ее особых логик показывает, что допущение особой логики микрофизики (микромира), отличной от логики макрофизики и других наук, есть чисто беллетристическое явление, основывающееся на смешении логических операторов и относящихся к ним логических правил. Мы при этом ни в какой мере не отвергаем пользы разработки многозначных (и, в частности, трехзначных) логических систем и исследования различного рода ограничений классической логики. Мы не отвергаем также возможной пользы всего этого для анализа языка микрофизики. Но все это не дает никаких аргументов в пользу особой логики микромира, отличной от логики наук, изучающих макромир.

Ситуации такого типа, когда приходится иметь дело не с двумя возможностями, а с тремя, где третья возможность есть отрицание двух других, складываются не только в сфере сложной и утонченной науки, но и на примитивном житейском уровне.

Один человек спрашивает другого: «перестал ли ты бить своего отца?» Согласно двузначной логике, другой должен ответить либо «да», либо «нет». И тот и другой ответ будет означать, что отвечающий раньше бил своего отца. А как быть, если он раньше не делал этого? Оперируя только одним отрицанием, проблему решить нельзя. Дело в том, что сложившаяся ситуация предполагает не только две возможности: «Я перестал бить своего отца» (X) и «Я не перестал бить своего отца» (Y), но также третью возможность «Я вообще (раньше) не бил своего отца» (Z). И верно будет не утверждение $X : Y : Z$, где Z может быть получено как внешнее отрицание обоих X и Y, т. е. будет верно $X : Y : \sim X \cdot \sim Y$. Пусть $P(s)$ есть «Я бил своего отца», $Q(s)$ — «Я сейчас бью (продолжаю бить) своего отца». В таком случае X есть $P(s) \cdot \neg Q(s)$, а Y есть $P(s) \cdot \neg Q(s)$. По правилам логического

следования будут верны $X : \sim X$ и $Y : \sim Y$, а не $X \sim Y$; и верно $\sim X \sim Y \vdash \sim P(s)$.

Другой пример. Пусть X есть высказывание «N утверждает, что A», где A есть какое-то высказывание, а Y есть «N утверждает, что $\sim A$». Очевидно, что утверждение $X : Y$ будет неверно, так как N может не утверждать как A, как и $\sim A$ (N вообще помалкивает). Верным будет лишь утверждение $X : Y : \sim X \sim Y$.

А между тем часто приходится наблюдать такую ситуацию. Участник дискуссии M обвиняет другого участника дискуссии N в том, что он утверждает A. Но N возражает и говорит, что он не утверждает A. Тогда M заключает: значит, N утверждает $\sim A$. Но N упорствует и заявляет, что он не утверждает $\sim A$. В ответ M тут же уличает N в противоречии, и аудитория, как правило, относится к этому одобрительно. Тот факт, что N вообще может быть безразличен к проблеме, не утверждая ни A, ни $\sim A$, остается незамеченным. Здесь не имеет значения то, что причины подобной небрежности могут иметь вненаучную природу. Важен результат: ситуация трех возможностей оценивается с точки зрения правил, уместных для ситуаций двух возможностей. Именно такого рода тривиальные с логической точки зрения явления образуют основу многих методологических проблем, которые считаются сверхсложными порождениями современной сверхсложной науки.

Ниже мы определим классические и неклассические отношения высказываний в общей логической терминологии и сформулируем для них своеобразную «теорему единственности». Сделаем это для простейшего случая двух высказываний, полагая, что обобщение на случай любого числа высказываний есть дело чисто техническое:

*D*1. Дополнением к X и Y будем называть высказывание $Z^1 \cdot \neg, \ldots, \cdot \neg Z^m$ $(m \geqslant 1)$, где $Z^1, \cdot, Z^m$ есть любая комбинация из высказываний $X, Y, \sim X$ и $\sim Y$.

*D*2. Если Z есть дополнение к X и Y и при этом $X : Y : Z \vdash X : Y$, то Z есть пустое дополнение к X и Y. Если $X : Y : Z \vdash X$, $X : Y : Z \vdash Y$ или $\vdash \sim (X : Y : Z)$, то Z есть сокращающееся дополнение к X и Y.

*T*1. Для X и Y имеется одно-единственное дополнение, которое не является пустым и сокращающим, и это дополнение есть $\sim X \sim Y$. Теорема доказывается по индукции путем перебора всех возможных дополнений к X и Y и установления того, что утверждение $X : Y : \sim X \sim Y \vdash X : Y$ недоказуемо в нашей теории логического следования, а во всех прочих случаях доказуемы утверждения вида $X : Y : Z \vdash X : Y$, $X : Y : Z \vdash X$, $X : Y : Z \vdash Y$, $\vdash \sim (X : Y : Z)$.

*D*3. Будем говорить, что высказывания X и Y находятся в классическом отношении, если и только если истинно $X : Y$, и в неклассси-

ческом отношении, если и только если истинно $X : Y : Z$, где Z есть дополнение к X и Y, не являющееся пустым и сокращающим.

$T2$. Согласно $T1$, если X и Y находятся в неклассическом отношении, то Z есть $\sim X \sim Y$.

$T3$. Согласно $T3$ и $D3$, каждому случаю классического отношения высказываний соответствует один, и только один, случай неклассического отношения тех же высказываний (теорема единственности неклассического отношения).

Выше мы рассмотрели отношения пар высказываний $P(s)$ и $\neg P(s)$, $(\forall a)X$ и $(\neg \forall a)X$, $(\exists a)X$ и $(\neg \exists a)X$, $(X \rightarrow Y)$ и $(\neg X \rightarrow Y)$. Все они суть примеры неклассических отношений. Пример классического отношения — отношение X и $\sim X$, а также отношения в приведенных парах в случаях, когда исключены неопределенности.

В предшествующем параграфе мы рассматривали высказывания A, B, X, Y и их отрицания. При этом в классическом отношении находятся пары A и $\sim A$, В и $\sim B$, X и $\sim X$, Y и $\sim Y$, A и B, а в неклассическом — пары AX и $A \sim X$, AX и $\sim A$, $A \sim X$ и $\sim A$. Как видим, неклассические случаи вполне описываются в двузначной логике, не исключая при этом возможности использования многозначной.

Глава 2

Логическая математика

§ 1. Числа в языке

Числа суть языковые выражения. Они играют роль терминов-субъектов, частей субъектов, частей предикатов и кванторов. Числа не могут быть только терминами предикатами. Примеры:

1) число «десять» в высказывании «Число видов элементарных частиц более десяти» есть субъект;

2) числа «один» и «два» в высказывании «Молекула воды состоит из одного атома кислорода и двух атомов водорода» суть части субъектов;

3) число «300 000» в высказывании «Свет движется со скоростью около 300 000 км/сек.» есть часть предиката;

4) число «три» в высказывании «Для трех типов самолетов верно, что они развивают сверхзвуковую скорость» есть квантор.

Анализ логических свойств чисел приводит к анализу натуральных чисел, через которые определяются все прочие виды чисел. Определением логических свойств натуральных чисел занимается формальная арифметика, которая фактически стала частью логики. И этому имеется оправдание: формальная арифметика для своего построения не предполагает никакой развитой математики, зато предполагает явно сформулированную логику и оперирует исключительно методами логики. Ниже мы изложим формальную арифметику, существенно отличную от известных нам построений такого рода и гармонирующую с излагаемой здесь концепцией логики.

При установлении свойств чисел будем использовать предикаты превосходства и тождества по порядку. Одновременно это будет определением упомянутых предикатов для терминов-чисел и упорядочиванием класса чисел.

Указание на способ установления порядка будем опускать, предполагая следующее:

1) порядок чисел устанавливается соглашениями теории чисел, в частности — той системой формальной арифметики, которая будет изложена ниже;

2) порядок чисел устанавливается нашим волевым решением. Так что выражения «a больше b» и «a равно b» для чисел у нас будут тождественны выражениям соответственно «a превосходит по порядку b» и «a тождественно по порядку b».

Отрицания для чисел здесь не различаются в том смысле, что имеет силу утверждение

$$\sim(a > b) \vdash (a \neg > b).$$

Оно означает, что в нашей власти полностью упорядочить рассматриваемый класс чисел и исключить случаи неопределенности. Благодаря этому утверждению будут верны утверждения

$$(a \neg > b) \dashv\vdash \sim(a > b),$$

$$(a \neg = b) \dashv\vdash \sim(a = b),$$

$$(a = b) \dashv\vdash \sim(a > b) \wedge \sim(b > a),$$

и в дальнейшем будет достаточно логических правил для классического случая.

§ 2. Числа как термины

Мы рассматриваем числа прежде всего как термины-субъекты, имеющие вполне определенное значение. Натуральные числа с этой точки зрения суть первичные термины. Они не определяются через другие числа. Наоборот, все прочие числа определяются через них. Значение их как терминов-субъектов таково. всякий индивид может быть назван (обозначен) термином «один» (1, «единица»), т. е. всякий индивид есть единица. Так что глубочайшая тайна единицы состоит в том, что никакой тайны здесь просто нет. Сложность проблемы здесь состоит в сложности осознания ее тривиальности. Всякая пара индивидов может быть названа термином «два» (2, «пара»). И вообще, всякая энка из n индивидов есть n.

Значение производных чисел как терминов устанавливается по общим правилам введения производных терминов. Например, $a^{\underline{2}}$ можно определить как сокращение для $a \times a$, а последнее — как сумму из a слагаемых a. При этом используются не какие-то особые логические средства математики (логических средств, свойственных только математике, вообще не существует!), а общие средства логики. Когда этим общелогическим средствам придают форму специфических средств математики, то лишь запутывают и непомерно усложняют довольно простые вещи.

Каждое число существует не в одном единственном экземпляре, а во многих. Потенциально количество экземпляров любого числа

не ограничено. Например, мы в потенциально неограниченном количестве можем продуцировать единицы (1, 1, 1, ...), двойки (2, 2, 2, ...) и т. д. И в этом отношении теория чисел ничем не отличается от прочих наук, осуществляющих обобщения, и в том числе от наук, имеющих дело с языком. Теория чисел осуществляет абстракцию, предполагая, что все экземпляры данного числа никак не различаются с точки зрения изучаемых их свойств, т. е. она отвлекается от места и времени употребления чисел и от их графических и звуковых модификаций.

Упомянутая абстракция означает, что те, кто имеет дело с числами, обладают способностью:

1) различать виды чисел как воспринимаемых вещей (например, отличать единицы от двоек);

2) отождествлять различные экземпляры чисел одного вида (например, устанавливать, что символы 1, 1, 1, 1, «один» и «единица» суть экземпляры одного вида чисел, а именно — экземпляры единицы).

Это обстоятельство является общенаучным, а не специфически математическим (подобно тому как биолог отличает зайцев от волков и отождествляет различные экземпляры зайцев). Если установлено, что числа a и b суть экземпляры чисел одного вида, то принимается $a \rightleftharpoons b$, т. е. принимается, что все случаи употребления чисел одного вида равнозначны.

Надо различать термины, обозначающие числа, и сами числа в роли терминов. Например, так различаются термин «единица», обозначающий любые единицы как числа, и единицы как термин, обозначающий любые индивиды. В первом случае термин «единица» не есть число, а во втором есть число. Различие этих случаев остается скрытым по той причине, что в языковой практике любое число вида a употребляется также как термин, обозначающий числа a, а в качестве терминов, обозначающих числа a, употребляются какие-то экземпляры чисел a. А между тем эти случаи не равнозначны. Например, выражение «класс единиц», в котором слово «единица» есть термин, обозначающий единицы, обозначает класс, в который включаются все единицы. А если здесь слово «единица» есть число, то это выражение есть термин класса, в который включаются все индивиды.

Если a и b суть числа, то

$$(a \rightleftharpoons b) \dashv\vdash (a = \alpha b),$$

где α есть какая-то система теории чисел, упорядочивающая числа класса, к которому принадлежат a и b.

Системы формальной арифметики, далее, можно строить двояко, употребляя в алфавите сами числа или термины, обозначающие числа. Мы выбрали первый способ, который благодаря упомянутой выше

абстракции обладает той же степенью общности, что и второй, но проще второго и откровеннее.

§ 3. Базисная арифметика

Базисной арифметикой (сокращенно БА) мы называем систему, определяющую свойства натуральных чисел. Она образуется благодаря таким дополнениям к системам логики.

Алфавит БА:

1) 1 — единица;
2) $+$ — числообразующий оператор сложения («плюс»).

Определение числа БА (сокращенно ЧБ):

1) 1 есть ЧБ;
2) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть ЧБ, то $(a^1 + \ldots + a^n)$ есть ЧБ;
3) нечто есть ЧБ только в силу (1–2).

Определение *собственного высказывания* БА (сокращенно СВ):

1) если a и b суть ЧБ, то $(a > b)$ есть СВ;
2) если x есть СВ, то $\sim x$ есть СВ;
3) если $x^1, \ldots, x^n$ $(n \geqslant 2)$ суть СВ, то $(x^1 \vee \ldots \vee x^n)$ и $(x^1 \wedge \ldots \wedge x^n)$ суть СВ;
4) нечто является СВ лишь в силу (1–3).

Определение собственной формулы БА (сокращенно СФ):

1) если x есть СВ, то $\vdash x$ есть СФ;
2) если x и y суть СВ, то $\vdash (x \to y)$ есть СФ;
3) нечто есть СФ лишь в силу (1) и (2).

В качестве сокращения для

$$\sim (a > b) \wedge \sim (b > a)$$

будем употреблять символ

$$(a = b).$$

Если $a, b, a^1, \ldots, a^n$ суть ЧБ, то все СФ вида $A1$–$A3$ суть аксиомы БА:

$A1$. $\vdash ((a + 1) > a)$
$A2$. $\vdash ((a > b) \to ((a > (b + 1)) \vee (a = (b + 1))))$
$A3$. $\vdash ((a^1 + \ldots + a^n) = c)$,

где c отличается от $(a^1 + \ldots + a^n)$ лишь наличием скобок.

Определение доказуемой СФ (или теоремы БА; сокращенно ТБА):

1) аксиомы суть ТБА;
2) если x есть СВ, и $\vdash x$ доказуема в логике (есть теорема логики), то $\vdash x$ есть ТБА;

3) если x и y суть СВ, и $\vdash (x \to y)$ есть теорема логики, то $\vdash (x \to y)$ есть ТБА;

4) если $\vdash (x \to y)$ и $\vdash x$ суть ТБА, то $\vdash y$ есть ТБА;

5) нечто есть ТБА лишь в силу (1–4).

Процедурой исключения в БА будем называть такую процедуру: из a в $(a > b)$ исключается первая по порядку вхождения единица и затем исключается первая по порядку вхождения единица из b; такая операция повторяется до следующих по порядку вхождения единиц (если таковые имеются) до тех пор, пока из a или из b (или из обоих) не будут вычеркнуты все единицы.

Будем приписывать СВ и СФ значения «истинно» и «неистинно» по таким правилам:

1) СВ $(a > b)$ истинно, если и только если в результате процедуры исключения в a остается по крайней мере одна единица, а в b нет;

2) СВ $(a = b)$ равнозначно $\sim(a > b) \wedge \sim(b > a)$;

3) СВ x и СФ $\vdash x$ равнозначны;

4) СВ $x \to y$ равнозначно $\sim x \vee y$.

Правила для $\sim, \wedge, \vee$ обычные.

Имеют силу следующие утверждения:

1) все ТБА истинны (из этого следует непротиворечивость БА);

2) если x есть СВ и истинно, то $\vdash x$ есть ТБА;

3) если x и y суть СВ, и y истинно при том условии, что истинно x, то $\vdash (x \to y)$ есть ТБА.

Система БА полна в смысле утверждений (2) и (3). Если дана СФ $\vdash x$, то для выяснения того, является она ТБА или нет, достаточно установить, истинна она или нет, если дана СФ $\vdash (x \to y)$, то для установления того, является она ТБА или нет, достаточно установить, будет y истинно при том условии, что истинно x, или нет. Так что для БА имеется процедура разрешимости относительно СФ.

Базисной арифметикой с нулем (БАН) будем называть систему, которая образуется благодаря таким дополнениям к БА. Дополнения к алфавиту: 0–ноль. Дополнение к определению числа: 0 есть число БАН. Дополнительные аксиомы:

*A*4. $\vdash ((a + 0) = a)$.

*A*5. $\vdash ((a + b) = (b + a))$.

Дополнение к исключающей процедуре: если в a или в b (или в a и b) в $CB(a > b)$ не входят единицы, то ... (и далее как в БА). Утверждения (1–3) сохраняют силу для БАН.

§ 4. Сокращенная запись ЧБ

Общепринятая система записи чисел с логической точки зрения есть система определений вида

$$2 = Df \cdot (1 + 1),$$
$$3 = Df \cdot (2 + 1)$$

и т. д., а также определений вида

$$ab = Df \cdot ((a \times 10) + b),$$
$$abc = Df \cdot ((a \times 100) + (b \times 10) + c)$$

и т. д., где $a, b, c, \ldots$ суть цифры $1, 2, 3, \ldots$.

§ 5. Универсальность арифметики

В литературе, связанной с современной физикой, довольно часто можно встретить утверждение о том, что даже правила арифметики не универсальны (не всегда верны). И в качестве примера этому приводят случаи, когда происходит соединение предметов. Логически эти примеры аналогичны случаю, когда из соединения двух капель ртути получается одна капля. При этом полагают, что правила $1 + 1 = 2, 2 + 2 = 4$ и т. п. в таких случаях не выполняются. Но рассматриваемое утверждение есть результат логической ошибки. Правила арифметики $1 + 1 = 2, 2 + 2 = 4$ и т. п. никакого отношения не имеют к физическому, химическому и т. п. соединению предметов. Они означают лишь то, что числа $(1 + 1)$ и 2 тождественны по порядку (и по значению); аналогично — числа $(2 + 2)$ и 4 и т. д. Правила арифметики универсальны по самому способу их установления и не имеют абсолютно никаких ограничений.

§ 6. Расширенная арифметика (РА)

Алфавит РА:

1) 1 и 0 — единица и ноль;

2) $+, \times, -, /, \smile, \sqrt{\ }$ — числообразующие операторы сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Определение числа РА (сокращенно ЧР):

1) 1 и 0 суть ЧР;

2) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть ЧР, то $(a^1 + \ldots + a^n)$ и $(a^1 \times \ldots \times a^n)$ есть ЧР;

3) если a и b суть ЧР, то $(a-b)$, (a/b), $a^{\underset{\smile}{b}}$, $\sqrt[\underset{\smile}{a}]{b}$ суть ЧР;
4) нечто есть ЧР лишь в силу (1–3).

Определения СВ и СФ отличаются от соответствующих определений для БА лишь тем, что вместо ЧБ везде фигурирует ЧР.

Если буквы $a, b, c, a^1, \ldots, a^n$ суть ЧР, то приводимые ниже СФ суть аксиомы РА:

$A1.$ $\vdash ((a+1) > a)$.
$A2.$ $\vdash ((a > b) \to ((a > (b+1)) \vee (a = (b+1))))$.
$A3.$ $\vdash ((a^1 + \ldots + a^n) = c)$,
где c отличается от $(a^1 + \ldots + a^n)$ лишь наличием скобок.
$A4.$ $\vdash ((a+0) = a)$.
$A5.$ $\vdash ((a+b) = (b+a))$.
$A6.$ $\vdash ((a \times 1) = a)$.
$A7.$ $\vdash (((a \times (b+c)) = ((a \times b) + (a \times c))$.
$A8.$ $\vdash ((a^1 \times \ldots \times a^n) = c)$,
где c отличается от $(a^1 \times \ldots \times a^n)$ лишь наличием скобок.
$A9.$ $\vdash ((a \times b) = (b \times a))$.
$A10.$ $\vdash (a^{\underset{\smile}{1}} = a)$.
$A11.$ $\vdash (a^{\underset{\smile}{b+c}} = (a^{\underset{\smile}{b}} \times a^{\underset{\smile}{c}}))$.
$A12.$ $\vdash (((a-b) > c) \to (a > (b+c)))$.
$A13.$ $\vdash ((a > (b-c)) \to ((a+c) > b))$.
$A14.$ $\vdash ((a > (b+c)) \to ((a-b) > c))$.
$A15.$ $\vdash (((a+c) > b) \to (a > (b-c)))$.
$A16.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((a/b > c) \to (a > (b \times c)))$.
$A17.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((c > (a/b) \to (c \times b) > a)))$.
$A18.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((a > (b \times c)) \to (a/b > c)))$.
$A19.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((c \times b) > a)) \to (c > (a/b)))$.
$A20.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((\sqrt[\underset{\smile}{a}]{b} > c) \to (b > c^{\underset{\smile}{a}})))$.
$A21.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((c > \sqrt[\underset{\smile}{a}]{b}) \to (c^{\underset{\smile}{a}} > b)))$.
$A22.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((b > c^{\underset{\smile}{a}}) \to (\sqrt[\underset{\smile}{a}]{b} > c)))$.
$A23.$ $\vdash ((a > b) \wedge (b > 0) \to ((c^{\underset{\smile}{a}} > b) \to (c > \sqrt[\underset{\smile}{a}]{b})))$.

Определение теоремы РА (сокращенно ТРА) аналогично определению ТБА.

Аксиомы $A4$ дают имплицитное определение нуля, аксиомы $A6$–$A9$ дают имплицитное определение чисел с оператором умножения, аксиомы $A10$ и $A11$ — с оператором возведения в степень, $A12$–$A15$ — с оператором вычитания, аксиомы $A16$–$A19$ — с оператором деления, аксиомы $A20$–$A23$ — с оператором извлечения корня. Ограничения

$(a > b) \wedge (b > 0)$ в $A16$–$A23$ приняты, чтобы избежать парадоксов нуля. Они могут быть ослаблены, что здесь для нас не играет значения.

Обращаем внимание на различие определений вида $\vdash (\alpha = \beta)$, позволяющих осуществлять замены чисел на равные им другие числа, и определений вида $\vdash (\alpha \to \beta)$ и $\vdash (\gamma \to (\alpha \to \beta))$, позволяющих заменять высказывания с числами на другие высказывания. Как следствие посредством определений второго вида производятся замены чисел, но — лишь как следствие.

Приведенные аксиомы РА не исчерпывают правил оперирования числами РА. Они должны быть дополнены правилами для всевозможных комбинаций чисел. Мы не будем приводить их здесь, поскольку это не имеет здесь принципиального значения. Ограничимся примерами:

$$\vdash ((a + b) - c) = (a + (b - c)),$$
$$\vdash ((a - b) - c) = (a - (b + c)),$$
$$\vdash (a/b + c) = (a + b \times c)/b$$

и т. п. В сочетании с приведенными выше правилами для простейших случаев эти правила позволяют любые комбинации чисел РА сводить к числам БА.

§ 7. Бесконечные числа

Система формальной арифметики с бесконечными числами образуется благодаря таким дополнениям к РА:

Дополнение к алфавиту: «$\sim$» — оператор бесконечности.

Определение бесконечного числа:

1) если a есть ЧБ, то $\underset{\sim}{a}$ есть бесконечное число;

2) если a есть бесконечное число, то $\underset{\sim}{a}$ есть бесконечное число;

3) нечто есть бесконечное число лишь в силу (1) и (2).

В определениях СВ и СФ учитывается, что бесконечные числа суть числа в данной системе.

Дополнительные аксиомы:

$A1^*$. $\vdash (a > b)$, где a есть бесконечное число, а b есть ЧР.
$A2^*$. $\vdash ((\underset{\sim}{a} + b) = (a + b))$.
$A3^*$. $\vdash ((a > b) \to (\underset{\sim}{a} > b))$.
$A4^*$. $\vdash ((\underset{\sim}{a} > \underset{\sim}{b}) \to (a > b))$.

Подобно тому как термины ЧБ и ЧР не являются числами, так и «бесконечное число» не есть число.

Верно, что если к бесконечному числу прибавить какое-то положительное число, то получится также бесконечное число. Но неверно,

что

$$\vdash ((a + b) = a),$$

где a есть бесконечное число. Прибавление к бесконечному числу a некоторого положительного числа b дает бесконечное число, но другое (если $b > 0$).

§ 8. Формальная арифметика с метаутверждениями

В алфавите БА и РА нет переменных для чисел. Так что утверждения о числах БА и РА (т. е. метаутверждения) невозможно записать в языке этих систем. Например, утверждение «Для всякого ЧБ найдется такое ЧБ, которое больше его» нельзя записать как высказывание БА. Для записи утверждений такого рода необходимо расширить язык БА и РА подходящим образом.

Примем следующие дополнения к системам БА и РА, благодаря которым образуются системы соответственно МБА и МРА. К алфавиту добавляется список переменных для чисел. Принимается такое определение субъекта:

1) ЧБ (соответственно ЧР) суть субъекты МБА (соответственно МРА);
2) переменные для ЧБ (для ЧР) суть субъекты МБА (МРА);
3) нечто есть субъект МБА (МРА) лишь в силу (1) и (2).

В определениях повсюду термины ЧБ (ЧР) заменяются на термин «субъект МБА (МРА)». В определениях СВ присоединяется пункт: если a есть субъект, а x есть СВ, то $(\forall a)x$ и $(\exists a)x$ суть СВ.

Теперь приведенное выше в качестве примера метаутверждение можно записать в языке МБА так:

$$(\forall p)(\exists q)(q > p),$$

где p и q суть переменные для ЧБ.

Теоремами МБА (МРА) являются формулы, которые получаются по общим правилам введения переменных из формул БА (и РА) и из таких теорем по общим правилам логики, к которым здесь присоединяются правила для кванторов. Например, из формулы

$$\vdash ((a + 1) > a)$$

получается формула

$$\vdash (\exists p)(p > a)$$

по правилу $V5$ и затем по правилу $V6$ формула

$$\vdash (\forall q)(\exists p)(p > q).$$

§ 9. Формальная арифметика и теория чисел

Системы формальной арифметики суть лишь одно из средств науки о числах, ни в коей мере не исчерпывающее средств науки о числах вообще. Они суть лишь определения некоторых языковых выражений языка науки, а определения сами по себе еще не образуют науку, какие бы возможности для дедукции они не давали. Общие соображения на этот счет изложим на конкретном примере Великой Теоремы Ферма (сокращенно ВТФ).

ВТФ на языке МРА имеет такой вид:

$$\vdash (\forall p)(\forall q)(\forall r)(\forall s) \sim (((s > 3) \vee (s = 3)) \wedge (p > 0) \wedge (q > 0) \wedge \\ \wedge (r > 0) \wedge (p^{\breve{s}} + q^{\breve{s}} = r^{\breve{s}})),$$

где p, q, r, s суть переменные для ЧБ. Как ВТФ, так и ее отрицание не являются теоремами систем логики, устанавливающих свойства операторов $\wedge, \vee, \sim, \exists, \forall$, что тривиально: в языке этих систем операторы $+, \times, \breve{}$ вообще отсутствуют, причем последние невозможно определить как производные от первых (рассматривая выражения с последними как сокращения для выражений с первыми). Но ВТФ и ее отрицание недоказуемы в РА, поскольку в РА нет переменных для ЧР. Имеется лишь один способ установить, является ВТФ или ее отрицание теоремой МРА или нет, а именно такой: найти четверку ЧБ x, y, z, u такую, что в РА доказуема формула

$$\vdash ((x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (z > 0) \wedge ((u > 3) \vee (u = 3)) \wedge \\ (x^{\breve{u}} + y^{\breve{u}} = z^{\breve{u}})),$$

или установить невозможность таких четверок, т. е. установить, что в РА для любых ЧБ a, b, c, n доказуема формула

$$\vdash \sim ((a > 0) \wedge (b > 0) \wedge (c > 0) \wedge ((n > 3) \vee (n = 3)) \wedge \\ (a^{\breve{n}} + b^{\breve{n}} = c^{\breve{n}})).$$

В первом случае такую четверку ЧБ надо как-то отыскать и уметь ее написать, а во втором надо найти метод пересмотра всех четверок ЧБ такого рода и доказать некоторую метатеорему. Но это — задача исследования в рамках целой науки, для решения которой могут быть привлечены любые допустимые средства. Эта задача эвристическая, а не формального вывода в рамках РА. Конечно, какие бы конкретные x, y, z, u мы не взяли, в силу полноты и разрешимости БА и в силу сводимости выражений с операторами умножения и возведения в степень к числам БА можно установить, будет формула $\vdash (x^{\breve{u}} + y^{\breve{u}} = z^{\breve{u}})$ теоремой МРА или нет.

Так что вопрос о том, для всякой или не всякой формулы МРА можно установить, доказуема она в МРА или нет, есть лишь перефразировка другой проблемы: всякое или не всякое утверждение о ЧР можно доказать или опровергнуть в арифметике как науке. Но для науки в целом сама постановка такой проблемы бессмысленна, поскольку она не имеет точной формулировки: для арифметики как науки нет точного определения входящего в нее утверждения, аналогичного определению СВ и СФ в БА и РА.

§ 10. Термины чисел

В системах теории чисел определяются термины типа «число БА», «число РА» и т. п., вообще — термины «число s», где s есть название какой-то системы теории чисел. Обобщением их является термин «число», вводимый по такой схеме: если a есть число в некоторой системе теории чисел, то a есть число. Термины такого рода числами не являются. Но они обозначают числа — суть термины чисел.

Из терминов такого рода по правилам ограничения строятся термины типа $a \downarrow P$ и $a \downarrow x$, где a есть термин «число» или «число s», P есть какой-то отличительный признак чисел (например, «делится на два без остатка»), x есть высказывание, содержащее термины чисел. По общим правилам определения вводятся производные термины, в определяющей части определения которых содержатся термины чисел (например, «простое число» $= Df\cdot$ «Число БА, которое делится без остатка только на себя и единицу»). Так образуется разнообразная терминология чисел. Из терминов чисел строятся высказывания с порядковыми предикатами, не всегда являющиеся собственными высказываниями систем теории чисел. Например, высказывание «Некоторые числа больше 100» построено из терминов «число» и «100», но оно не есть СВ в БА, РА и т. п. Эти высказывания подчиняются общим правилам логики порядка (т. е. раздела логики, в котором исследуются свойства порядковых предикатов), логики кванторов и т. д. Способами установления порядка для таких высказываний являются системы теории чисел и вообще принятые соглашения на отношения чисел.

§ 11. Существование чисел

Предикат существования не имеет единого определения для любых терминов чисел. Он определяется в зависимости от способа построения последних.

Прежде всего здесь надо различать существование чисел как особых предметов и существование предметов, обозначаемых терминами чисел.

Так, если мы каким-то образом ввели в алфавит теории чисел число 0, то тем самым принимается, что 0 существует: мы его можем видеть и сами написать. Но предмет, обозначаемый термином 0, не существует.

Вопрос о существовании чисел решается применительно к той или иной системе, определяющей некоторый класс чисел. Для системы PA имеют силу такие утверждения, образующие имплицитное определение предиката $\mathcal{E}$ для ЧР:

1) $\vdash \mathcal{E}(m1)$.
2) $\vdash \mathcal{E}(m0)$.
3) $\vdash (a^1 \rightharpoonup \text{ЧР}) \wedge \ldots \wedge (a^n \rightharpoonup \text{ЧР}) \to \mathcal{E}(m(a^1 + \ldots + a^n))$.
4) $\vdash (a^1 \rightharpoonup \text{ЧР}) \wedge \ldots \wedge (a^n \rightharpoonup \text{ЧР}) \to \mathcal{E}(m(a^1 \times \ldots \times a^n))$.
5) $\vdash (a \rightharpoonup \text{ЧР}) \wedge (b \rightharpoonup \text{ЧР}) \to \mathcal{E}(m(a - b))$.
6) $\vdash (a \rightharpoonup \text{ЧР}) \wedge (b \rightharpoonup \text{ЧР}) \to \mathcal{E}(m(a/b))$.
7) $\vdash (a \rightharpoonup \text{ЧР}) \wedge (b \rightharpoonup \text{ЧР}) \to \mathcal{E}(m(a^{\underline{b}}))$.
8) $\vdash (a \rightharpoonup \text{ЧР}) \wedge (b \rightharpoonup \text{ЧР}) \to \mathcal{E}(m(\sqrt[a]{b}))$.
9) Если $\vdash x$ есть ТБА, то $\vdash \mathcal{E}(m(a^1, \ldots, a^n) \downarrow y$, где $n \geqslant 1$; $a^1, \ldots, a^n$ суть термины «ЧР»; y образуется из x путем замены одного или более вхождений некоторого ЧР на a^1, на $a^2, \ldots$, на a^n.
10) В остальных случаях ЧР не существует.

Поскольку в PA для любых ЧБ a и b формула

$$\vdash (b/0 = a)$$

недоказуема, то согласно пункту 10

$$\vdash \neg\, \mathcal{E}(\text{ЧР} \downarrow (b/0 = a)).$$

Однако это не означает, что не существует $m(b/0)$. Согласно пункту 6 и определению ЧР

$$\vdash \mathcal{E}(m(b/0)).$$

Поскольку в PA доказуема формула

$$\vdash (3^{\underline{2}} + 4^{\underline{2}} = 5^{\underline{2}}),$$

то по правилу 9

$$\vdash \mathcal{E}(m(a, b, c) \downarrow (a^{\underline{2}} + b^{\underline{2}} = c^{\underline{2}})),$$

где a, b, c суть термины ЧР (читается это утверждение так: «Существует тройка ЧР такая, что сумма квадратов первого и второго равна квадрату третьего»).

Поскольку (-1) не есть ЧР, то $\vdash \sim \mathcal{E}(m(-1)), \vdash \neg\, \mathcal{E}(m\sqrt{-1})$ и т. п. в PA. Но если в некоторой системе теории чисел по определению

чисел этой системы $(-a)$ есть число, то относительно этой системы должно быть принято утверждение $\mathcal{E}(m(-a))$. И тогда будет верно $\vdash \mathcal{E}(m(-1)), \vdash \mathcal{E}(m\sqrt{-1})$ и т. п.

Но если для некоторого числа a верно, что $\mathcal{E}(ma)$, то из этого не следует, что существует предмет, обозначаемый числом-термином a, т. е. не следует $\vdash \mathcal{E}(a)$. Другими словами, утверждение

$$\vdash \mathcal{E}(ma) \rightarrow \mathcal{E}(a)$$

не является логической истиной. Например, из того, что $\vdash \mathcal{E}(m0)$ не следует, что $\mathcal{E}(0)$; из $\vdash \mathcal{E}(m(-1))$ не следует $\mathcal{E}(-1)$ и т. д. Целый ряд недоразумений возникает из смешения этих различных аспектов существования.

Аналогично обстоит дело с предикатом возможности. Мыслимы определения, комбинирующие предикаты возможности и существования.

§ 12. Число как часть субъекта

Высказывания, в которых числа фигурируют в качестве частей субъектов, суть лишь языковые трансформации высказываний, в которых числа суть самостоятельные субъекты. Например, высказывание «Молекула воды состоит из двух атомов водорода и атома кислорода» есть замена для высказывания «Молекула воды образуется из атома водорода, другого атома водорода и атома кислорода». Вообще выражение «n предметов a» в смысле «соединение n предметов a» есть лишь сокращение для выражения «соединение предмета a, другого $a, \ldots,$ n-го a».

§ 13. Величина

Знак величины есть языковое выражение, содержащее некоторое число α и языковое выражение β, фиксирующее способ получения α (т. е. единицы и способ измерения). Предикаты величин суть предикаты, имеющие строение

$$P\alpha\beta,$$

где P есть название признака («вес», «скорость», «длина»), α есть число («10», «100»), а β есть упомянутое выше языковое выражение («кг», «км/сек», «см»).

Предикаты типа $P\alpha\beta$ суть результат сокращения сложных выражений. Установление правил соответствующих операций есть дело наук,

в которых эти предикаты употребляются. Но эти предикаты имеют некоторые общие свойства, выразимые на языке логики.

Пусть a есть число, входящее в высказывание x, β есть система теории чисел, в которой a есть число и в которой определены свойства таких чисел, p есть переменная для чисел этой системы, $x(a/p)$ есть выражение, образованное из x путем замены a на p везде, где a входит в x. Мы принимаем такое правило извлечения чисел из высказываний:

$A1.\ \vdash ((p \downarrow x(a/p)) = \beta a)$,

(читается: число p такое, что $x(a/p)$ равно a относительно β).

Из $A1$ получаются такие следствия для величин:

$T1$. Если $P\alpha\gamma(a)$ и $P\beta\gamma(a)$, то отношение a и b по признаку P тождественно отношению чисел α и β.

Например, если $\alpha = \beta$, то $a = Pb$; если $\alpha > \beta$, то $a > Pb$.

Выражения типа «величина a по P есть α» (например, «вес a равен 10 кг») образуются как результат языковых трансформаций выражений вида $P\alpha\beta(a)$ или $p \downarrow x(a/p) = a$.

Кроме $A1$ для величин имеют силу следующие правила:

$A2.\ \vdash P(a) \rightarrow (P\alpha\beta(a) \rightarrow (\alpha > 0))$

$A3.\ \vdash P\alpha\beta(a) \wedge (\alpha > 0) \rightarrow P(a)$

$A4.\ \vdash \neg P(a) \rightarrow (P\alpha\beta(a) \rightarrow (\alpha = 0))$

$A5.\ \vdash P\alpha\beta(a) \wedge (\alpha = 0) \rightarrow \neg P(a)$.

Например, если тело перемещается, то скорость его перемещения больше нуля, и наоборот: если тело не перемещается, то скорость его перемещения равна нулю, и наоборот. Утверждения $A2$–$A5$ суть часть имплицитного определения величины.

Эвристический принцип, согласно которому любой эмпирический признак может быть измерен, вполне правомерен, поскольку в случае надобности для любого «качественного» («неизмеряемого») эмпирического признака практически находится способ измерения. Возьмем, например, признак, обозначаемый словом «совесть». Его можно измерить числом x/y, где y есть общее число поступков человека, к которым применим предикат «совесть», а x — число поступков этого человека, когда считается, что он проявил совесть (остальные поступки считаются бессовестными).

Предикаты величин разделяются на первичные и производные в таком смысле. Если нет таких высказываний $x^1, \ldots, x^n$, в которые не входит $P\alpha\beta$ и для которых верно

$$\vdash (x^1 \wedge \ldots \wedge x^n) \rightarrow P\alpha\beta(a),$$

то предикат $P\alpha\beta$ является первичным. Если же такие $x^1, \ldots, x^n$ имеются, то предикат $P\alpha\beta$ является производным.

Высказывания с первичными предикатами величин получаются в результате особого рода эмпирических операций, называемых измерением. Высказывания с производными предикатами величин получаются из других высказываний с предикатами величин по особым правилам, имеющим внелогическую природу. Так, в результате измерения расстояния α, пройденного телом A, и времени β, потраченного на это, получаются высказывания с первичными предикатами величин «A прошло расстояние α км» и «A потратило на это β секунд». А в результате правила вычисления скорости $v = s/t$ из этих высказываний получается высказывание с производным предикатом величины «A двигалось со средней скоростью α/β км/сек».

Указанное различение предикатов величин есть внелогическое различение, порой зависящее от особенностей ситуации, от вариаций в способах измерения и вычисления и т. д.

Примем, наконец, определения:

1) Величина a минимальна относительно класса величин A (сокращенно $la = \min A$), если и только если

$$(\forall b)((b \in A) \wedge (a \in A) \rightarrow (la \leqslant lb)).$$

2) Величина a максимальна относительно класса величин A (сокращенно $la = \max A$), если и только если

$$(\forall b)((b \in A) \wedge (a \in A) \rightarrow (la \geqslant lb)).$$

3) $(la > \min A) \equiv Df \cdot (\exists b)((b \in A) \wedge (a \in A) \wedge (lb < la))$.
4) $(la < \max A) \equiv Df \cdot (\exists b)((b \in A) \wedge (a \in A) \wedge (lb > la))$.

§ 14. Степени и диапазон истинности

Высказывания $P\alpha^1\beta(a)$, $P\alpha^2\beta(a), \ldots$ могут различаться только числами $\alpha^1, \alpha^2, \ldots$, но все могут считаться истинными в отношении одних и тех же индивидов a. Например, высказывания «a весит 10 кг», «a весит 9,99 кг», «a весит 10,1 кг» и т. п. могут считаться одинаково приемлемыми с какой-то точки зрения. Класс индивидов a, в отношении которых истинно $P\alpha^i\beta(a)$, есть область истинности $P\alpha^i\beta(a)$. А пределы, в которых могут колебаться числа α^i в истинных $P\alpha^i\beta(a)$, образуют диапазон истинности высказываний такого рода.

Известно, далее, что величины признаков предметов измеряются с большей или меньшей степенью приближения или точности. Знание об этой степени в состав высказываний $P\alpha^i\beta(a)$ не входит. Это — своеобразные истинностные значения, степени истинности или степени приближения к истинности. Никаких логических способов измерения степеней истинности нет. Но если они измеряются каким-то

способом, то для них имеют силу определенные логические правила (символом $v(a)$ будем для краткости записывать выражения «степень истинности a»), например — такие:

$$\vdash v(x \wedge y) \leqslant \min(v(x), v(y));$$

$$\vdash v(x \vee y) \geqslant \max(v(x), v(y));$$

$$(x \vdash y) \wedge (v(x) = \alpha) \vdash (v(y) \leqslant \alpha).$$

Увеличение степени истинности не может расширить область истинности высказывания, но может ее сократить. Уменьшение степени истинности не сокращает область истинности. Колебания степеней истинности имеют место в диапазоне истинности.

§ 15. Измерение и определение

Практически встречаются определения терминов по такой схеме: если применение способа измерения A к предметам a дает результат B, то будем говорить, что $P\alpha\beta(a)$. Например, если тело a положить на весы X (способ измерения), и стрелка весов покажет деление 1 (результат измерения), то будем говорить, что a весит 1 кг.

В определениях такого рода определяются предикаты $P\alpha\beta$ в целом, а не P и не β по отдельности. Смысл P может быть установлен путем обобщения по правилу:

$$\vdash (P\alpha\beta \rightarrow P).$$

§ 16. Числа-кванторы

Выражения, содержащие числа в роли кванторов, заменяются на выражения с числами в роли субъектов по правилу $A1$ из § 13. Например, $(Na)x$, где $N \geqslant 0$, заменяется на «Число предметов $a \downarrow x = N$».

§ 17. Количество

Выражения «количество элементов класса (скопления)» и «мощность класса (скопления)» мы употребляем как синонимы. Поскольку они одинаково определяются для классов и скоплений, ограничимся рассмотрением классов.

Определить выражение «мощность (количество элементов) класса» — значит прежде всего определить выражения типа «класс a тождественен по мощности классу b», «класс a превосходит по мощности класс b», «класс a уступает по мощности классу b» и их отрицания.

Будем для этого употреблять предикаты $= m$, $> m$, $< m$. Для определения же этих предикатов надо предварительно определить стандартные классы чисел. Для этого потребуются также предикаты соответствия, которые уже определены.

§ 18. Стандартные классы чисел

*Д*1. Определение стандартного ЧБ:

1) 1 есть стандартное ЧБ;
2) если a есть стандартное ЧБ, то $(a + 1)$ есть стандартное ЧБ;
3) нечто есть стандартное ЧБ лишь в силу (1) и (2).

*Д*2. Класс ЧБ будем называть стандартным классом ЧБ (сокращенно СКЧ), если и только если в него включаются только стандартные ЧБ, причем для каждого стандартного ЧБ a имеет силу следующее: в СКЧ включается одно и только одно a.

Другими словами, в СКЧ включается одна и только одна 1, одно и только одно ЧБ $(1 + 1)$, одно и только одно ЧБ $((1 + 1) + 1)$ и т. д. для всех ЧБ.

*Т*1. Из *Д*1 и *Д*2 следует, что всякий СКЧ есть упорядоченный ряд, имеющий начальный элемент 1 и не имеющий конечного элемента.

*Д*3. Класс, в который включается одно и только одно стандартное ЧБ n и по одному из каждых стандартных ЧБ a таких, что $\vdash (n > a)$, и никакие другие элементы в этот класс не включаются, будем называть стандартным n-классом ЧБ (сокращенно n-СКЧ).

*Т*2. Из *Д*3 следует, что n-СКЧ есть 1 или (в случае $n > 1$) упорядоченный ряд с начальным элементом 1 и конечным элементом n, (т. е. n-СКЧ конечен по числу членов).

В дальнейшем нам для иллюстрации одного общего положения потребуются определения стандартных классов четных и нечетных ЧБ. Приведем эти определения.

*Д*4. Класс из ЧБ, в который включаются все четные стандартные ЧБ по одному от каждого вида и только такие ЧБ, будем называть стандартным классом четных ЧБ.

*Д*5. Класс из ЧБ, в который включаются все нечетные стандартные ЧБ по одному от каждого вида и только такие ЧБ, будем называть стандартным классом нечетных ЧБ.

§ 19. Мощность классов чисел

*Д*1. Мощность СКЧ такова, как указано в определяющей части *Д*2 предшествующего параграфа.

*Д*2. Мощность n-СКЧ такова, как указано в определяющей части *Д*3 предшествующего параграфа.

Мощность других классов можно определять через мощность СКЧ и n-СКЧ (сказав, например, что мощность класса A равна мощности СКЧ). Но мощность СКЧ и n-СКЧ не определяется через мощность других классов. И в этом смысле выражения «мощность СКЧ» и «мощность n-СКЧ» первичны. Определения *Д*1 и *Д*2 суть лишь выделение некоторой (а именно — количественной) точки зрения на классы, определенные в *Д*2 и *Д*3 предшествующего параграфа.

*А*1. Отношение мощностей a-СКЧ и b-СКЧ тождественны отношению a и b.

*Д*3. Мощность класса ЧБ такова, что в него включаются все ЧБ.

Класс ЧБ не есть упорядоченный ряд, поскольку в него включаются по крайней мере два ЧБ с одинаковым порядком, например — $(1+1)+1)$ и $(1+(1+1))$. если считать признаком счетности класса то, что его элементы образуют упорядоченный ряд, то класс ЧБ является счетным. Но каждый из СКЧ и n-СКЧ является счетным классом.

Если мощность классов выражают числами, то это есть лишь языковая трансформация высказываний, сравнивающих мощность этих классов с мощностью классов чисел. В имплицитной форме это можно записать так: «Мощность A равна α» $\equiv Df\cdot$ «A равномощен классу β», где класс β может быть класс ЧБ, СКЧ, n-СКЧ и т. п. Из определений такого рода следует: если мощность A и α, а мощность B равна β, то отношение мощностей A и B тождественно отношению чисел α и β в смысле, аналогичном *А*1).

§ 20. Сравнение мощностей классов

В качестве сокращения для $(x \subset y) \wedge (y \subset x)$ будем употреблять символ $(x \subset \supset y)$.

Примем такие утверждения, определяющие предикаты $> m$ и $= m$ для классов:

*А*1. $\vdash (A \subset B) \rightarrow (A\neg > mB)$.

*А*2. $\vdash (\exists a)(a \in A) \wedge (\forall a) \sim (a \in B) \rightarrow (A > mB)$.

*А*3. $\vdash (A \Leftarrow B) \rightarrow (A\neg > mB)$.

*А*4. $\vdash (A \subset C \cup D) \wedge (B \subset \supset C \cup E)((D > mE) \leftrightarrow (A > mB) \wedge ((D = mE) \leftrightarrow (A = mB))$.

*А*5. $\vdash x \rightarrow ((A > mB) \leftrightarrow (\exists c)(\exists d)((c \subset A) \wedge (c \Leftrightarrow B) \wedge (d \in A) \wedge \sim (d \in c)))$,

где x есть «A и B непусты и не пересекаются»; c есть переменная для классов; d есть индивидная переменная.

Из $A1-A5$ следует:

$T1.$ $\vdash (A \subset \supset B) \to A = mB)$.

$T2.$ $\vdash (A \Leftrightarrows B) \to (A = mB)$.

$T3.$ $(\forall a) \sim (a \in A) \wedge (\forall a) \sim (a \in B) \to (A = mB)$.

$T4.$ $(\forall a)(a \in A) \wedge (\forall a)(a \in B) \to (A = mB)$.

Из $A1-A5$, далее, получаются такие важные следствия, не всегда согласующиеся с общепринятыми суждениями на этот счет.

$T5$. Класс подклассов класса классов не может превосходить по мощности класс классов (поскольку первый есть подкласс второго).

Известное утверждение теории множеств, противоположное $T5$, у нас не может быть выведено потому, что к упомянутым в $T5$ классам неприменимы предикаты соответствия.

$T6$. Класс четных чисел не превосходит по мощности класс ЧБ. Аналогично — класс нечетных чисел.

$T7$. Стандартный класс четных (нечетных) ЧБ, который не пересекается с СКЧ, тождественен последнему по мощности (поскольку между ними имеет место взаимнооднозначное соответствие).

$T8$. Любые два непересекающиеся СКЧ равномощны.

$T9$. Любые два непересекающиеся n-СКЧ равномощны.

$T10$. Любые два непересекающиеся стандартные классы четных (нечетных) ЧБ равномощны.

§ 21. Другие определения

$Д1$. Определение предиката «актуально конечен» для классов:

1) если

$$(\exists a)((a \in A) \wedge (\forall b)((b \in A) \to (a \rightleftharpoons b)),$$

где a и b суть переменные, то A актуально конечен;

2) если A и B актуально конечны, то $A \cup B$ актуально конечен;

3) если $A \subset \supset B$, и B актуально конечен, то A актуально конечен;

4) если $A \Leftrightarrows B$, и B актуально конечен, то A актуально конечен;

5) класс актуально конечен лишь в силу (1–4).

$Д2$. Определение предиката «актуально бесконечен» для классов:

1) если

$$(\forall \beta)((\beta \subset A) \wedge \sim (A \subset \beta) \wedge X \to (\exists c)((c \in A) \wedge \sim (c \in \beta)),$$

где β есть переменная для классов, c есть индивидная, X есть «β актуально конечен», то A актуально бесконечен;

2) если A и B актуально бесконечны, то $A \cup B$ актуально бесконечен;

3) если $A \subset\supset B$, и B актуально бесконечен, то A актуально бесконечен;

4) если $A \Leftrightarrow B$, и B актуально бесконечен, то A актуально бесконечен;

5) класс актуально бесконечен лишь в силу (1–4).

Определения предикатов экзистенциальной и потенциальной конечности и бесконечности классов получаются из $Д1$ и $Д2$ путем:

1) замены слова «актуально» на слово «экзистенциально», или, соответственно, «потенциально»;

2) замены выражения $(\exists a)\overline{\overline{X}}$ на $\mathcal{E}(a \downarrow x)$ или, соответственно, $M(a \downarrow x)$,

3) замены выражения $(\exists c)x$ на $\mathcal{E}(c \downarrow x)$ или, соответственно, $M(c \downarrow x)$.

Предикаты «неконечен» и «небесконечен» (актуально, экзистенциально и потенциально) определяются по общему правилу:

$$(\widetilde{P})(a) \dashv\vdash \sim P(a).$$

Поскольку из $\sim P(a)$ не следует $\neg P(a)$, то предикаты «неконечен» и «бесконечен» не тождественны. Аналогично не тождественны предикаты «конечен» и «небесконечен».

§ 22. Сводимость к логике

В силу определимости чисел в конечном счете через 1 и того обстоятельства, что 1 как термин равнозначна термину «предмет», и в силу сводимости всех функций чисел в языке к их функциям терминов-субъектов, имеет место следующее положение: целый ряд проблем методологии науки, связанных с употреблением чисел, терминов величин, измерением и т. д., сводится к проблемам, формулируемым на языке логики и решаемым средствами последней. Сказанное верно, разумеется, при том условии, что не принимаются во внимание все те проблемы, которые возникают как следствие комбинирования простых с логической точки зрения элементов языка и введения соответствующих сокращений.

Логический анализ языка науки без всякого ущерба для сути дела может элиминировать факт употребления чисел и рассматривать язык лишь в таком плане, в каком результаты математики как науки и результаты математизации конкретных наук не играют никакой роли, поскольку употребление чисел и операций с ними само по себе

не порождает никаких новых правил логики и не уничтожает «старых». «Логический аппарат» науки вообще не зависит от факта употребления чисел и от операций с ними.

Наконец, правила («законы») теории чисел относятся к числам как особого рода языковым выражениям. Отсюда следует, что они дают возможность предсказаний лишь в своей собственной области — в области теории чисел. Они не являются средством предсказания в конкретных науках, употребляющих числа. Средством предсказания в таких науках являются лишь утверждения самих этих наук. Иллюзия, будто правила теории чисел суть средства предсказания, возникает за счет того, что неявным образом утверждения конкретных наук ассоциируют с правилами теории чисел. Пусть, например, имеются высказывания:

1) «Если a увеличить в n раз, то c увеличивается в m раз»;
2) «Если b увеличить в k раз, то c уменьшается в l раз».

Кажется, что из (1) и (2) по правилам математики следует высказывание

3) «Если a увеличить в n раз, а b увеличить в k раз, то c изменится в m/l раз».

Но на самом деле для получения (3) требуются математические допущения (4) такие, что из (1), (2), (4) можно вывести (3). Например, это может быть допущение, согласно которому характер воздействия a на c (и b на c) не зависит от того, действует одновременно b на c (соответственно a на c) или нет. И во всех случаях, когда кажется, что какой-то конкретный факт науки был предсказан чисто математически, можно обнаружить и некоторые неявные допущения относительно предметов, изучаемых в этой науке. Это наше заявление базируется на логическом анализе чисел как явлений языка, имеет априорную силу и не нуждается в пересмотре многочисленных примеров современных заблуждений на этот счет.

§ 23. Замечание о классе натуральных чисел

Пусть x и y суть переменные для натуральных чисел. В метаарифметике доказуемо

1) $\vdash (\forall x)(\exists y)(y > x)$.

В этом смысле можно сказать, что класс натуральных чисел актуально бесконечен. Но из (1) не следует:

2) $\vdash (\forall x)\mathcal{E}(y \downarrow (y > x))$.
3) $\vdash (\forall x)M(y \downarrow (y > x))$,

т. е. не следует, что класс натуральных чисел экзистенциально и, соответственно, потенциально бесконечен. Чтобы получить (2) или (3), надо принять соответственно

4) $\vdash (\exists a)w \rightarrow \mathcal{E}(a \downarrow w)$

или

5) $\vdash (\exists a)w \rightarrow M(a \downarrow w)$

или принять сами (2) или (3). Поскольку из (2) следует (3), а из (4) следует (5), вариант с принятием (2) или (4) сильнее.

§ 24. Замечание об одном парадоксе с терминами чисел

Пусть a есть выражение «число планет Солнечной системы». Известно, что $a = 9$. Согласно правилам арифметики и логики имеем $\vdash (9 > 7)$ и «необходимо, что $9 > 7$». Заменив 9 на a, получим: «необходимо, что $a > 7$». А это не соответствует интуиции. Причина парадокса — неправомерное использование a в качестве термина-числа. На самом деле выражение a двусмысленно. Его можно эксплицировать как «класс планет Солнечной системы». Но тогда будет бессмысленно выражение «класс планет Солнечной системы равен 9», ибо число может быть равно только числу, а выражение как «класс планет Солнечной системы» не есть число. Его можно также эксплицировать как «число, которое равно мощности класса планет Солнечной системы». Но тогда в выражении «необходимо, что число, которое равно мощности класса планет Солнечной системы, больше семи», нет ничего парадоксального.

§ 25. Решение проблемы Последней Теоремы Ферма

Ниже мы изложим наше решение проблемы «последней теоремы Ферма», используя аппарат комплексной логики, и прежде всего — теории доказательства и полной индукции (см. § 40 и § 41 первой главы).

Мы рассматриваем числа как термины, знаки операций над числами — как терминообразующие операторы, а выражения «больше» ($>$), «меньше» ($<$) и «равно» ($=$) — как предикаты соответственно «превосходит по порядку», «уступает по порядку» и «тождественен по порядку». Свойства этих порядковых предикатов определены в логике порядковых

отношений. Здесь достаточно взять систему аксиом (буквы-переменные для терминов-субъектов):

1. $\vdash \sim (a > a)$;
2. $(a > b) \vdash \sim (b > a)$;
3. $\sim (a > b) \vdash (b > a) \vee \sim (a > b) \wedge \sim (b > a)$;
4. $(a > b) \wedge (b > c) \vdash (a > c)$;
5. $\sim (a > b) \wedge \sim (b > a) \wedge (b > c) \vdash (a > c)$;
6. $(a > b) \wedge \sim (b > c) \wedge \sim (c > b) \vdash (a > c)$.

Выражение $(a < b)$ есть замена для $(b > a)$, выражение $(a = b)$ есть замена $\sim (a > b) \wedge \sim (b > a)$. Из формальной арифметики мы применим здесь лишь минимальный фрагмент (МФА), достаточный для исследования интересующей нас проблемы. Алфавит МФА:

1) 1 — единица;

2) $+$, $\cdot$, $\smile$ — операторы соответственно сложения, умножения и возведения в степень. Последний будем опускать, записывая степени как верхние индексы у букв.

Определение числа МФА:

1) 1 есть число МФА;

2) если $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ суть числа МФА, то $(x_1 + \ldots + x_n)$ и $(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$ суть числа МФА;

3) если x и y суть числа МФА, то $x^{\overset{y}{\smile}}$ есть число МФА;

4) нечто есть число МФА лишь в силу (1–3).

Формулами МФА являются только такие выражения, которые содержат только числа МФА, логические операторы $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$ и предикаты $\vdash, >, <, =$.

Аксиомные схемы МФА:

1. $\vdash (a + 1) > a$;
2. $\vdash ((a > b) \rightarrow (a > b + 1) \vee (a = b + 1))$;
3. $\vdash (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = b$,

где b отличается от $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ лишь наличием скобок (кроме внешних);

4. $\vdash (a \cdot 1) = a$;
5. $\vdash a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$;
6. $\vdash (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = b$,

где b отличается от $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)$ лишь наличием скобок (кроме внешних);

7. $\vdash a^{\overset{1}{\smile}} = a$;
8. $\vdash a^{\overset{b+c}{\smile}} = a^{\overset{b}{\smile}} \cdot a^{\overset{c}{\smile}}$.

Очевидно, что для любого числа в МФА x может быть найдено число в МФА y такое, что $\vdash (x = y)$ есть теорема МФА, и в y не входят

операторы умножения и возведения в степень. В этом смысле МФА достаточна для наших целей. Мы употребляем оператор вычитания $(-)$ исключительно для упрощения записи метаутверждений. Например, выражение вида $(x+2)^{\underline{n}} = (x-1)^{\underline{n}} + y^{\underline{n}}$ является лишь иной записью некоторого утверждения $(z+3)^{\underline{n}} = z^{\underline{n}} + y^{\underline{n}}$. Выражения 2, 3, 4, ... мы рассматриваем как сокращения соответственно для $(1+1)$, $(1+1+1)$, $(1+1+1+1)$ и т. д.

Язык МФА не содержит переменных. Утверждения о числах МФА суть метаутверждения, а не формулы МФА. Они содержат буквы, играющие роль неявных переменных. Примем следующие дополнения в теории доказательства для таких выражений (это — некоторая надстройка над МФА). Определение численного выражения (МФА):

1) число МФА есть МФА;
2) переменная для чисел МФА есть МФА;
3) если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть МФА, то $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ есть МФА.

Дополнительные аксиомные схемы:

1. $\vdash ((a > b) \wedge (c > d)) \to ((a + c) > (b + d))$;
2. $\vdash ((a > b) \to ((a + c) > b)$;
3. $\vdash ((a > b) \wedge (c = d)) \to ((a + c) > (b + d))$.

Дополнительные отрицательные правила:

1) если e есть переменная (энка переменных) для чисел МФА, которая входит свободно в $(c < d)$, и при этом $(\exists e)(c < d)$, то

$\sim(\vdash ((a > b) \to ((a + c) > (b + d))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to \sim((a + c) > (b + d))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to ((a + c) < (b + d))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to \sim((a + c) < (b + d))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to ((a + c) = (b + d))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to \sim((a + c) = (b + d))))$;

2) если в c входит переменная для чисел МФА, то

$\sim(\vdash ((a > b) \to (a > (b + c))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to \sim(a > (b + c))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to (a = (b + c))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \to \sim(a = (b + c))))$;

3) если p есть переменная (энка переменных) для чисел МФА, которая свободно входит в $(q < r) \wedge (s < t)$, и $(\exists p)((q < r) \wedge (s < t))$, то

$\sim(\vdash ((a > b) \wedge (c > d) \to ((a + q) > (b + r)) \wedge ((c + s) > (d + t))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \wedge (c > d) \to ((a + q) < (b + r)) \wedge ((c + s) > (d + t))))$,
$\sim(\vdash ((a > b) \wedge (c > d) \to ((a + q) = (b + r)) \wedge ((c + s) > (d + t))))$

и т. д. для прочих вариантов в консеквенте (с учетом отрицаний).

Сформулируем Последнюю Теорему Ферма (ПТФ) так: если a, b, c, n суть целые положительные числа, и $n \geqslant 3$, то $\sim(c^{\underline{n}} = a^{\underline{n}} + b^{\underline{n}})$.

Для исследования ПТФ достаточно рассмотреть лишь случаи, когда выполняется утверждение $Д$: «$c > a, c > b, a > n, b > n$, c нечетно, a четно, b нечетно, $n \geqslant 3$». Очевидно, ПТФ есть метаутверждение по отношению к числам МФА.

Пусть a, b, c, n суть переменные для чисел, удовлетворяющие ограничению $Д$. Пусть $c_1, c_2, c_3, \ldots$ суть значения $c, a_1, a_2, a_3, \ldots$ суть значения a, $b_1, b_2, b_3, \ldots$ суть значения b. Пусть $c_1 = n + 3$, $a_1 = n + 2$ и $b_1 = n + 1$, если n четно, и $c_1 = n + 4$, $a_1 = n + 1$ и $b_1 = n + 2$, если n нечетно. Прочие значения c, a, b таковы: $c_{i+1} = c_i + 2$, $a_{i+1} = a_i + 2$, $b_{i+1} = b_i + 2$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Будем рассматривать множество M троек чисел (c, a, b). Разделим M на подмножества $M_1, M_2, M_3, \ldots$ так. Если n есть четное число, то M_1 содержит только одну тройку чисел (c_1, a_1, b_1), т. е. тройку чисел $((n + 3), (n + 2), (n + 1))$. Если n есть нечетное число, то M_1 содержит только две тройки чисел (c_1, a_1, b_1) и (c_1, a_2, b_1), т. е. тройки чисел $((n + 4), (n + 1), (n + 2))$ и $((n + 4), (n + 3), (n + 2))$. Подмножество M_i (где $i = 1, 2, 3, \ldots$) содержит все и только такие тройки чисел (c_i, a_r, b_s), которые удовлетворяют условию: если n четно, то $a_1 \leqslant a_r \leqslant a_i$; если n нечетно, то $a_1 \leqslant a_r \leqslant a_i + 1$; в обоих случаях $b_1 \leqslant b_r \leqslant b_i$.

Если $n \geqslant 3$, то доказуемы

$$((n + 3)^{\underline{n}} > (n + 2)^{\underline{n}} + (n + 1)^{\underline{n}}),$$

$$((n + 4)^{\underline{n}} > (n + 1)^{\underline{n}} + (n + 2)^{\underline{n}}),$$

$$((n + 4)^{\underline{n}} > (n + 3)^{\underline{n}} + (n + 2)^{\underline{n}}),$$

т. е. ПТФ верна для всех элементов M_1.

В дальнейшем оператор $\underline{\ }$ будем опускать.

Допустим, что ПТФ верна для всех элементов M_i при $n \geqslant 3$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$. Случай, когда для всех элементов M_i имеет место $c^n < a^n + b^n$, исключен. Остаются два случая:

1) для всех элементов M_i имеет место $c^n > a^n + b^n$;

2) для некоторых элементов M_i имеет место $c^n > a^n + b^n$, а для остальных $c^n < a^n + b^n$.

Так что мы можем наше допущение сформулировать в такой форме: либо доказуемо

$$c_i^n > (c_i - 1)^n + (c_i - 2)^n$$

(возможность A), либо (это возможность B) доказуемы

$$c_i^n > a_1^n + b_i^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_i^n > a_k^n + b_i^n,$$

где a_k есть некоторое число из области значения a такое, что $a_1 \leqslant a_k \leqslant c_i - 3$;

$$(c_i^n > (a_k + 2)^n + b_{e1}^n) \wedge (c_i^n < (a_k + 2)^n + (b_{e1} + 2)^n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(c_i^n > (a_k + 2m)^n + b_{em}^n) \wedge (c_i^n < (a_k + 2m)^n + (b_{em} + 2)^n),$$

где $m \geqslant 1$, $(a_k+2), \ldots, (a_k+2m)$ суть числа из области значения a такие, что $(a_k + 2m) \leqslant c_i - 1$; $b_{e1}, \ldots, b_{em}$ суть числа из области значения b такие, что $b_{em} + 2 \leqslant b_i$;

$$(c_i^n > (c_i - 1)^n + b_r^n) \wedge (c_i^n < (c_i - 1)^n + (b_r + 2)^n),$$

где b_r есть число из области значения b такое, что $b_r \leqslant b_i$.

Рассмотрим, какие следствия вытекают из принятого допущения для $M_i + 1$. Пусть имеет место возможность A. Из нее следует:

$$(c_i + 2)^n > (c_i + 1)^n + (c_i - 2)^n,$$
$$(c_i + 2)^n > (c_i - 1)^n + c_i^n.$$

Остается неохваченной лишь тройка чисел

$$((c_i + 2),\ (c_i + 1),\ c_i)).$$

Пусть имеет место возможность B. Из нее следует:

$$(c_i+2)^n > a_1^n + (b_i+2)^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(c_i+2)^n > a_k^n + (b_i+2)^n,$$

$$((c_i+2)^n > (a_k+2)^n + (b_{e1}+2)^n) \wedge ((c_i+2)^n < (a_k+4)^n + (b_{e1}+4)^n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$((c_i+2)^n > (a_k+2m)^n + (b_{em}+2)^n) \wedge ((c_i+2)^n <$$
$$< (a_k+2m+2)^n + (b_{em}+4)^n),$$

$$((c_i+2)^n > (c_i-1)^n + (b_r+2)^n) \wedge ((c_i+2)^n < (c_i+1)^n + (b_r+4)^n),$$

$$(c_i+2)^n > (a_k+4)^n + b_{e1}^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(c_i+2)^n > (a_k+2m+2)^n + b_{em}^n,$$

$$(c_i+2)^n > (c_i+1)^n + b_r^n.$$

Остаются лишь тройки чисел $\mathcal{E}$:

$$((c_i+2),(a_k+2),(b_e1+4)),\quad ((c_i+2),(a_k+4),(b_e1+2)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$((c_i+2),(a_k+2m),(b_{em}+4)),\quad ((c_i+2),(a_k+2m+2),(b_{em}+2)),$$

$$((c_i+2),(c_i-1),(b_r+4)),\quad ((c_i+2),(c_i+1),(b_r+2)).$$

В случае B очевидно

$$c_i^n < (a_k+2)^n + (b_e1+2)^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_i^n < (a_k+2)^n + b_i^n.$$

Частный случай: $b_{e1}+2=b_i$. Очевидно, далее, что остаются тройки чисел

$$((c_i+2),\quad (a_k+4),\quad (b_{e1}+2)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$((c_i+2),\quad (a_k+4),\quad b_i).$$

Задача теперь сводится к следующему:

1) выяснить, выводится или нет утверждение $\sim((c_i+2)^n = (c_i+1)^n + c_i^n)$ (обозначим V) из A; выяснить, выводится или нет это утверждение из утверждения «c_i нечетно, $n \geqslant 3$, $c_i > n$» (обозначим его $Д_A$);

2) выяснить, выводятся все аналогичные утверждения W с тройками чисел $\mathcal{E}$ из B или некоторые из них не выводятся из B; выводятся все они из утверждения «c_i нечетно, a_k четно, b_{e1} нечетно, ..., b_{em} нечетно, b_r нечетно, $a_k+2m<c_i+2$, $a_k+2>n$, $b_{e1}>n$, ..., $b_{em}>n$, $b_r>n$, $n\geqslant 3$» (обозначим его $Д_B$) или некоторые из них не выводятся из $Д_B$.

Утверждения A, B, V, W суть метаутверждения по отношению к формулам МФА, т. е. содержат переменные для чисел МФА (буквы). Согласно правилам МФА выражения вида $x^{\smile k} R(y^{\smile k}+z^{\smile k})$ (где R есть $>, <, =$) сводятся к выражениям вида ARB, где в A и B входят только знаки переменных (буквы), 1 и $+$. Это касается как допущений A и B, так и их следствий V и W. Причем, отношение допущений и следствий сводится к следующему: если допущение есть $x>y$ или $x<y$, то следствие есть $z<u$ или $z>u$ такое, что $z=x+\alpha$ и $u=y+\beta$, причем $\alpha>\beta$ или, соответственно, $\alpha<\beta$. Короче говоря, все следствия из A и B суть следствия по правилам

$$(\vdash (a>b)\wedge(\alpha>\beta)\rightarrow((a+\alpha)>(b+\beta))),$$

$$(\vdash (a<b)\wedge(\alpha<\beta)\rightarrow((a+\alpha)<(b+\beta)))$$

и т. д. И никакие другие следствия в рассматриваемом случае (имеются в виду следствия для M_{i+1}) не фигурируют.

Однако утверждения V и W выпадают из этого правила. В случае A имеем:

$$(\exists(c_i,n))(((c_i+2)^n-c_i^n<((c_i+1)^n+c_i^n)-((c_i-1)^n+(c_i+2)^n))),$$
$$\sim(\vdash((c_i^n>(c_i-1)^n+(c_i-2)^n)\to\sim((c_i+2)^n=(c_i+1)^n+c_i^n))).$$

В случае B имеем следующее. Возьмем утверждение

$$\sim((c_i+2)^n=(c_i+1)^n+(b_r+2)^n).$$

Единственная строка в B, совпадающая с ним по всем буквам, это

$$(c_i^n>(c_i-1)^n+b_r^n)\wedge(c_i^n<(c_i-1)^n+(b_r+2)^n).$$

Имеем:

$$(\exists(c_i,b_r,n))(((c_i+2)^n-c_i^n<((c_i+1)^n+(b_r+2)^n)-((c_i-1)^n+b_r^n)));$$
$$\sim(\vdash((c_i^n>(c_i-1)^n+b_r^n)\to\sim((c_i+2)^n=(c_i+1)^n+(b_r+2)^n)));$$
$$(\forall(c_i,b_r,n))(((c_i+2)^n-c_i^n>((c_i+1)^n+(b_r+2)^n)-((c_i-1)^n+(b_r+2)^n)));$$
$$\sim(\vdash((c_i^n<(c_i-1)^n+(b_r+2)^n)\to\sim((c_i+2)^n=(c_i+1)^n+(b_r+2)^n)));$$
$$(\exists(c_i,b_r,n))(((c_i+2)^n-c_i^n)<((((c_i+1)^n+(b_r+2)^n)-((c_i-1)^n+b_r^n))\wedge$$
$$\wedge((c_i+2)^n-c_i^n)>((c_i+1)^n+(b_r+2)^n)-((c_i-1)^n+(b_r+2)^n)));$$
$$\sim(\vdash((c_i^n>(c_i-1)^n+b_r^n)\wedge(c_i^n<(c_i-1)^n+(b_r+2)^n)\to\sim((c_i+2)^n=$$
$$=(c_i+1)^n+(b_r+2)^n))).$$

Рассмотрим теперь отношение V и W соответственно к $Д_A$ и $Д_B$. Примем такие правила интерпретации:

1) если y есть буква, то $x^{\underline{y}}$ преобразуется в $(x+y)$;

2) если a есть буква, и a входит в $(b_1+b_2+\ldots+b_n)$ более одного раза, то все вхождения a, кроме одного, вычеркиваются;

3) после этих преобразований буквам приписываются значения $1, 2, 3, \ldots$;

4) если x и y суть буквы, x приписано значение α, y приписано значение β, то значение $(x+y)$ равно $\max(\alpha,\beta)$.

Возьмем выражение

$$(c_i+2)^n=(c_i+1)^n+c_i^n.$$

В соответствии с условием $Д$ ему можно придать вид

$$(2k+3)^n=(2k+2)^n+(2k+1)^n.$$

По принятым правилам получим

$$2k + 3 + n = 2k + 2 + n + 2k + 1 + n;$$
$$2k + 3 + n = 2k + 3 + n.$$

Этому выражению можно приписать значение T. Значение T можно также приписать $Д_A$, а также всем теоремам логических систем (включая МФА), независимо от принятых правил интерпретации, используемым здесь, поскольку в них не фигурируют переменные для чисел МФА. А значит можно приписать значение T выражению

$$\sim\sim((c_i + 2)^n = (c_i + 1)^n + c_i^n).$$

Согласно правилам IV теории доказательства имеем:

$$\sim(\vdash (Д_A \to V)).$$

Аналогично в случае B можно приписать значение T выражению

$$(c_i + 2)^n = (a_k + 4)^n + b_i^n,$$

где $c_i = b_i + 2$. Имеем:

$$(2k + 5)^n = (a_k + 4)^n + (2k + 1)^n$$
$$2k + 5 + n = 2k + 5 + n.$$

Так что имеем

$$\sim(\vdash (Д_B \to W)).$$

Используя правила полной индукции V. 3, получим:

$$\sim(\vdash (\forall (c, a, b)) \sim (c^n = a^n + b^n)).$$

И по правилу I.3 теории доказательства имеем

$$\vdash \sim(\vdash (\forall (c, a, b)) \sim (c^n = a^n + b^n)),$$

т. е. что Последняя Теорема Ферма недоказуема.

Глава 3

Логическая физика

§ 1. Эмпирические индивиды

Эмпирическими индивидами (объектами) мы будем называть такие предметы, о существовании и о признаках (свойствах, чертах, характеристиках) которых люди узнают посредством своих природных органов чувств. Это не значит, что одних органов чувств достаточно для этого. Это означает, что органы чувств так или иначе необходимы для этого. Люди узнают об эмпирических индивидах путем непосредственного воздействия последних на них, через посредников, по следам и последствиям, с помощью приборов, от других людей. Но во всех случаях где-то, как-то и на кого-то должно иметь место воздействие эмпирических индивидов на органы чувств людей, чтобы признать факт их существования и какие-то их свойства.

Эмпирические индивиды существуют независимо от того, исследует их кто-то или нет, существуют вне сознания исследователей, — существуют, как говорят философы, объективно. Не все мыслимые предметы таковы. Например, путем чисто логических операций со знаками (словами) можно построить знак «круглый квадрат». Обозначаемый этим выражением предмет не существует логически и, следовательно, эмпирически, т. е. не есть эмпирический индивид.

Эмпирические индивиды возникают в какое-то время, какое-то время сохраняются (существуют) и в конце концов прекращают существование (разрушаются, исчезают). Они существуют в каком-то ограниченном пространстве, имеют пространственные размеры и форму. Они имеют пространственное строение. Они изменяются со временем, вступают в различного рода связи с другими индивидами и т. д. В принципе возможно дать логически полное перечисление признаков эмпирических индивидов, построив логическую теорию, которую я называю логической физикой или логической онтологией. Ниже я намерен изложить ее основы, причем — как часть общей концепции комплексной логики.

При чтении последующего текста читатель должен принимать во внимание следующее обстоятельство. Логика, как и всякая наука, погружена в некоторую общекультурную и языковую среду, без которой

она не может существовать в качестве науки. Это выражается, в частности, в том, что в логике постоянно приходится использовать некоторые привычно ясные и легко доступные для понимания соображения, использовать простые примеры и разъяснения посредством обычного языка. Все это не входит в число законов логики, но без этого последние нельзя выработать и понять. И это не есть отступление от методов логики. Наоборот, это — необходимый элемент методологии всякой науки, если иметь в виду науку в целом, а не отдельные ее проблемы, которые могут до известной степени обособиться и создать видимость независимости от упомянутой среды.

По мере более детального изложения логики надобность в такой среде все более возрастает отчасти потому, что при этом логика выходит на поверхность языковой практики, где приходится учитывать массу обстоятельств, нарушающих чистоту логических нормативов, а отчасти потому, что логика рассматривает выражения языка, которые по самой своей природе являются продуктом многочисленных и разнообразных источников и которые функционируют в сложной системе языковых связей. От первичной чистоты логических построений, которые можно видеть, например, на уровне исчисления высказываний, здесь остается очень немногое. На место сложностей дедукционного порядка здесь приходят сложности, связанные с необходимостью согласовать множество различных факторов анализа. Меняется вследствие этого и способ изложения логики. Теперь уже невозможно такое изложение, когда последовательно добавляются новые определения и утверждения, от которых никак не зависит предшествующее изложение. Теперь складывается ситуация, когда нужно сразу рассмотреть целый комплекс проблем, понятий и утверждений. Но сказать обо всем сразу нельзя. Последовательное рассмотрение одних проблем здесь предполагает отвлечение от других, допущение данными целого ряда терминов и положений, которые затем становятся предметом специального исследования. И в результате изложение материала перестает соответствовать представлению об изложении логики, сложившемуся на основе наблюдения логики высказываний и предикатов в современных курсах логики.

В последующем изложении нам с самого начала прийдется использовать выражения, которые затем станут предметом нашего исследования. Никакого порочного круга в этом нет, ибо речь будет идти об экспликации языковых выражений, при которой такое их «удвоение» является обязательным.

Мы не будем давать сразу законченное определение выражения «эмпирический индивид». Дадим лишь частичное определение его, достаточное для целей данного изложения, и будем его дополнять по мере надобности. К вопросу о полном его определении мы вернемся

со временем в связи с другой проблемой. Частичное определение в данном случае уместно потому, что мы будем рассматривать следствия, вытекающие из того факта, что данные предметы являются эмпирическими, используя имеющиеся в нашем распоряжении части определения и не претендуя на большее.

§ 2. Протяженность

Эмпирические индивиды обладают пространственной протяженностью. Это утверждение есть часть имплицитного определения выражения «эмпирический индивид». Поскольку смысл языковых выражений, фиксирующих объемы и площади эмпирических индивидов, сводится логически к смыслу выражения «длина», мы в дальнейшем ограничимся при рассмотрении пространственной протяженности индивидов их длиной. Выражение «длина a относительно α» будем кратко записывать символом

$$l^s\{a, \alpha\}.$$

Приведенное выше утверждение можно записать в такой форме:

$$\Phi 1.\ \vdash A \to (l^s\{a, \alpha\} > 0),$$

где A есть утверждение «a есть эмпирический индивид относительно α».

Из $\Phi 1$ следует: если $l^s\{a, \alpha\} = 0$, т. е. если a не имеет пространственной протяженности относительно α, то a не есть эмпирический индивид относительно α.

Для рассуждений удобнее вместо приведенной формулировки принять такую:

$$\Phi 1.\ \vdash B \to (\forall \alpha)(l^s\{a, \alpha\} > 0),$$

где B есть утверждение «a есть эмпирический индивид», а α есть переменная для способов установления пространственного порядка.

§ 3. Изменение

Пусть $\downarrow x$ есть состояние эмпирического предмета a в одно время, а $\downarrow y$ — состояние того же индивида в другое время после этого, т. е. $\downarrow y$ превосходит $\downarrow x$ по временному порядку. Пусть при этом $\vdash \sim (x \wedge y)$, т. е. состояния $\downarrow x$ и $\downarrow y$ исключают друг друга. Будем говорить, что при этом произошло превращение состояния $\downarrow x$ в состояние $\downarrow y$ (или что $\downarrow x$ превратилось в $\downarrow y$) или что $a \downarrow x$ превратился в $a \downarrow y$ и записывать символами

$$\downarrow x \Rightarrow \downarrow y \quad \text{и} \quad a \downarrow x \Rightarrow a \downarrow y.$$

Частные случаи превращения индивида из одного состояния в другое или изменения суть следующие:

1) $\downarrow \neg E(a) \Rightarrow \downarrow E(a)$ — возникновение a;
2) $\downarrow \sim x \Rightarrow \downarrow x$ — возникновение $\downarrow x$;
3) $\downarrow E(a) \Rightarrow \downarrow \neg E(a)$ — уничтожение a;
4) $\downarrow x \Rightarrow \downarrow \sim x$ — уничтожение $\downarrow x$;
5) $\downarrow P(a) \Rightarrow \downarrow \neg P(a)$ — потеря признака индивидом a;
6) $\downarrow \neg P(a) \Rightarrow \downarrow P(a)$ — приобретение признака индивидом a;
7) $\downarrow P\alpha(a) \Rightarrow \downarrow P\beta(a)$, где $\alpha > \beta$ — уменьшение a по признаку P;
8) $\downarrow P\alpha(a) \Rightarrow \downarrow P\beta(a)$, где $\alpha < \beta$ — увеличение a по признаку P.

Через предикат $\Rightarrow$ определяются все прочие термины, так или иначе фиксирующие изменения.

Говоря об изменении или превращении, следовательно, надо иметь в виду, что предполагается какой-то эмпирический предмет и смена его состояний во времени.

Когда говорят о превращении одного предмета a в другой b (например, куколка превратилась в бабочку), то предполагается превращение одного состояния некоторого предмета, обозначаемого термином a, в другое состояние того же предмета, обозначаемое термином b.

Чтобы какое-то скопление изменений, упорядоченное в пространстве и времени, назвать также изменением, необходимо ввести термин a, которым можно обозначить данное скопление эмпирических предметов в различное время несмотря на происходящие изменения, а результаты последних представить как различные состояния a.

Частный случай изменения — перемена места в пространстве (перемещение или движение). Этот случай специально рассмотрим ниже.

Изменения происходят в каких-то областях пространства. Изменяющиеся предметы имеют пространственные размеры. Но говорить о пространственной протяженности изменения как такового без особой договоренности нельзя, — пространственные предикаты вводятся для эмпирических предметов иного типа (к этому вопросу мы еще вернемся). Изменения характеризуются временной протяженностью или длительностью.

Подобно тому, как наблюдение некоторых эмпирических тел позволяет ввести пространственные термины и составить представление о длине, так наблюдение некоторых изменений служит базой представлений о времени и некоторой первичной терминологии относящейся ко времени. Существует также исторически условная и преходящая величина длительности изменения, необходимая для того, чтобы изменение было обнаружено.

Термин «длительность изменения a относительно α» будем кратко записывать также символом

$$l^t\{a, \alpha\}.$$

Всякое эмпирическое изменение совершается во времени, т. е. величина длительности любого эмпирического изменения больше 0. Это — часть определения самого выражения «эмпирическое изменение».

Пусть A есть утверждение «a есть эмпирический индивид относительно α». Приведенное выше утверждение можно записать так:

$\Phi 2.\ \vdash A \to (l^t\{a, \alpha\} > 0)$.

Из $\Phi 2$ следует: если $l^t\{a, \alpha\} = 0$, т. е. если на изменение a не затрачивается время, то a не есть эмпирический индивид относительно α.

Пусть B есть утверждение «a есть эмпирическое изменение», а α есть переменная для способов установления временного порядка. Рассматриваемому утверждению можно придать другой вид:

$\Phi 2.\ \vdash B \to (\forall \alpha)(l^t\{a, \alpha\} > 0)$.

В силу правил логики отношений из $\Phi 1$ следует

$$\vdash A \to \sim (l^s\{a, \alpha\} < 0),$$

$$\vdash B \to (\forall \alpha) \sim (l^s\{a, \alpha\} < 0),$$

а из $\Phi 2$ следует

$$\vdash A \to \sim (l^t\{a, \alpha\} < 0)$$

$$\vdash B \to (\forall \alpha) \sim (l^t\{a, \alpha\} < 0),$$

т. е. следует то, что отрицательных длин и длительностей для эмпирических предметов не бывает.

§ 4. Переходное состояние

Пусть t^1 есть время, когда зафиксировано состояние $\downarrow x$, а t^2 — когда зафиксировано состояние $\downarrow y$, образующие $\downarrow x \Rightarrow \downarrow y$. Известны из опыта случаи, когда между t^1 и t^2 имеется временной интервал t^3 такой, что $\sim x \wedge \sim y$. Такое состояние индивида $\downarrow (\sim x \wedge \sim y)$ будем называть переходным состоянием. Если x есть $P(a)$ или $\neg P(a)$, а y есть соответственно $\neg P(a)$ или $P(a)$, то $\downarrow (\sim x \wedge \sim y)$ есть $\downarrow P(a)$. Аналогично $\downarrow (\sim x \wedge \sim y)$ есть $\downarrow E(a)$ в случае, если одно из x и y есть $E(a)$, а другое — $\neg\, ?E(a)$.

§ 5. Пространство и время

Надо различать два вида проблем, относящихся к пространству и времени:

1) терминологические, т. е. связанные с установлением значения терминов «пространство», «время», «дальше», «ближе», «раньше» и т. п.;

2) измеренческие (или физические), т. е. связанные с установлением пространственно-временных характеристик предметов.

Различие этих аспектов видно хотя бы из такого примера. Если некоторый человек утверждает, что Иркутск расположен ближе к Москве (по железной дороге), чем Новосибирск, то мы усматриваем в этом не ошибку в употреблении термина «ближе», а в установлении пространственного порядка Иркутска и Новосибирска относительно Москвы по железной дороге. И если этот человек согласится с тем, что Новосибирск ближе Иркутска, то термин «ближе» он будет употреблять в том же смысле (так же), как и в первом случае.

В силу разделения труда в науке проблемы исследования пространственно-временных свойств и отношений предметов стали проблемами физики. Однако физические теории пространства и времени не дают определений пространственно-временной терминологии в том смысле, что не вводят эту терминологию в употребление впервые. Они предполагают ее данной и устанавливают методы выяснения пространственно-временных отношений предметов для различного рода трудных (сравнительно с обычным житейским опытом) случаев, в частности — для различно движущихся систем, для удаленных событий, для случаев, когда имеет значение скорость распространения сигналов, взаимные перемещения событий и наблюдателей и т. п. При этом явно или неявно предполагаются некоторые базисные случаи, для которых установление пространственно-временных отношений проблемы не представляет и на примере которых соответствующая терминология вводится в язык. Например, к базисным случаям относятся такие, когда последовательность наблюдения событий считается точно совпадающей с последовательностью их наступления во времени. Пространственно-временные отношения для прочих случаев выясняются путем применения правил логики, математики и физики к тем данным, которые получаются из наблюдения базисных случаев. В качестве одного из условий и следствий физические теории осуществляют экспликацию пространственно-временной терминологии для особого рода случаев отношений предметов. При этом происходит следующее любопытное явление.

В случае упомянутой экспликации не происходит введение новых терминов, учитывающих особенности рассматриваемых случаев, а используется та же самая общая терминология, выработанная

на основе наблюдений пространственно-временных отношений предметов в обычном опыте. В результате происходит неявное наложение двух (по крайней мере) различных совокупностей терминов с известными парадоксальными последствиями.

С другой стороны, на пространство и время перенесли терминологию, выработанную для эмпирических предметов, т. е. фактические стали рассматривать пространство и время как особого рода эмпирические предметы наряду с другими. В частности, стали говорить об изменении пространства и времени, о ходе или движении времени, о сжатии пространства, о замедлении и ускорении хода времени, об обратном течении времени и т. п. Причем эти выражения употребляются не иносказательно, а буквально. В результате в литературе, так или иначе связанной с пространством и временем, сложилась такая хаотическая терминологическая ситуация, что логический анализ самых фундаментальных вопросов терминологии здесь явно был бы не бесполезен.

Попытки ввести пространственно-временные термины путем определения через другие обнаруживают, что для этого требуются термины, не имеющие с точки зрения первичной ясности никаких преимуществ перед пространственно-временными терминами. Кроме того, среди последних имеются такие, которые вообще вводятся в употребление не посредством определений, а иными способами. И применительно к такого рода терминам речь может идти лишь об их экспликации.

Эксплицирующие термины по воспринимаемому виду могут быть тождественны эксплицируемым. Именно так обстоит дело в нашем случае. В этом нет ничего страшного, если постоянно помнить различные роли одних и тех же слов.

§ 6. Пространственно-временные отношения

Простейшие пространственно-временные термины суть термины из области значения знаков $> \alpha$, $< \alpha$ и $= \alpha$. Их отношения друг к другу таковы, как отношение этих знаков в общем случае. Что касается их особенностей, то надо выяснить следующее: что присоединяется к логическим соображениям, когда мы выбираем ту или иную тройку конкретных терминов порядка (например, «раньше – позже – одновременно», «ближе – дальше – на одинаковом расстоянии» и т. п.)?

В общем обо всех простейших пространственно-временных терминах такого рода можно сказать следующее: исследователь имеет особые приспособления (прирожденные способности, если это человек; особые технические средства, если это человекоподобная машина), благодаря которым он фиксирует пространственные и временные отношения,

и после достаточно большого числа повторений начинает правильно употреблять соответствующие термины (подобно тому, как люди усваивают большинство слов языка, обозначающих вещи, события, поступки). Приспособления, о которых сказано выше, — поворот глаз, поворот тела, смена восприятий. Все это дологические операции.

Важно отметить различие предметов, которые фигурируют в пространственном и временном порядке. В случае пространственного порядка предметы суть эмпирические (воспринимаемые, т. е. видимые, слышимые) тела. В случае временных отношений предметы суть воспринимаемые изменения (наступления событий, «вспышки», «возмущения»).

Некоторые тела и изменения становятся особого рода метками или знаками пространства и, соответственно, времени, если не принимаются во внимание их длины и длительности и принимается во внимание лишь их упорядоченность друг относительно друга и интервалы между ними. В таких случаях говорят о точках пространства и моментах времени. Выражения «в такой-то точке пространства» и «в такой-то момент» не следует понимать, будто соответствующие тела и изменения не имеют длины и длительности. Они учитывают лишь место предметов в пространственном или временном порядке.

Та совокупность терминов, о которой говорилось выше, есть совокупность предикатов. Используя ее, можно нечто высказать о пространственно-временных свойствах и отношениях эмпирических индивидов. Но ее нельзя использовать в качестве субъектов суждений, т. е. нельзя еще высказать что-либо о пространстве и времени как об особых предметах.

Чтобы ввести термины, обозначающие пространство и время как особые предметы, необходимо проделать еще такие операции по введению терминов.

Пусть эмпирические индивиды $a^1, \ldots, a^n$ образуют пространственную структуру A. Возможны по крайней мере три различных смысла термина «данное пространство A».

В первом смысле термин «данное пространство A» вводится так. Берется пространственная структура A и происходит отвлечение от всех индивидов, находящихся внутри A, а также от того, что именно $a^1, \ldots, a^n$ образуют ее. Этому отвлеченно придают наглядную форму допущений, вполне соответствующую обычному опыту: находящиеся внутри A индивиды могут быть изъяты из нее (предельный случай — пустое или чистое пространство без индивидов), любые индивиды подходящего размера могут быть помещены в A, индивиды $a^1, \ldots, a^n$ могут быть заменены любыми другими, подходящими для фиксирования границ A. В результате под данным пространством A будем иметь в виду лишь то, что заключено между какими-то индивидами, расположение

которых аналогично расположению $a^1, \ldots, a^n$ в A, после исключения из A всех индивидов. Индивидуальность данного пространства определяется положением A.

Таким образом, «данное пространство A» в рассматриваемом смысле есть то, что останется, если сохранить только положение A, а из A изъять все индивиды (в том числе — и граничные его точки $a^1, \ldots, a^n$). Так что термин «данное пространство A» удобнее было бы читать как «пространство, занимаемое A».

Важно здесь следующее: возможно или нет осуществить указанную выше операцию, это никак не влияет на определение термина «данное пространство A» и на его правомерность.

Для образования термина, обозначающего данное пространство A в смысле два, осуществляется то же самое, что и в первом случае, за исключением допущений относительно предметов $a^1, \ldots, a^n$: они принимаются во внимание как граничные точки данного пространства. При образовании термина данного пространства A в смысле три допускают, что его образует пространственная структура A с какими-то предметами, которые находятся внутри ее. Здесь возможны варианты: согласно одному из них, в данное пространство A включаются все предметы, находящиеся в A, и в этом случае данное пространство A есть кусок материи, заключенный в пространственной структуре A; согласно другим, в него включаются лишь какие-то особые виды «тонкой» материи (в частности, такие, которые физически нельзя изъять из A в принципе ни при каких обстоятельствах).

Аналогично обстоит дело с терминами данного времени. Берется временная структура B, образованная событиями $b^1, \ldots, b^m$ и осуществляются допущения относительно событий $b^1, \ldots, b^m$ и событий внутри B, подобные допущениям для терминов данного пространства. Заметим только, что допущения для времени, подобные допущениям для пространства, точно так же имеют наглядную основу в опыте людей. Дело в том, что исследователь фиксирует некоторую пространственную структуру в какое-то определенное время, а временную структуру — в какой-то определенной области пространства. А области пространства, где, по-видимому, ничего не происходит («все спокойно»), в какой-то мере встречаются в опыте людей. Точно так же в рамках заданной временной структуру исследователь может вызывать сам происходящие события или препятствовать их наступлению. По крайней мере он может не обращать на них внимания. В третьем смысле данное время B есть мир со всеми (или избранными) событиями во временной структуре B.

Термины «данное пространство» и «данное время» образуются (подобно термину «структура») как обобщение терминов, обозначающих конкретные пространства и времена. Конечно, в реальных языках здесь

имеет место комплекс разнообразных терминов вроде «интервал», «место», «отрезок», «область пространства» и т. п. — видовые термины для термина «структура».

Но обычно, когда употребляют термины «пространство» и «время» сами по себе, то (в отличие от соотношения термина «структура» и терминов, обозначающих конкретные структуры) имеют в виду не любые конкретные пространства и времена («отрезки» и «объемы» пространства и времени), а их объединение в целое. Для введения этих терминов (скажем, «пространство в целом» и «время в целом») надо допустить пространственную и временную структуры такие, в которые включаются любые данные пространственные и, соответственно, временные структуры (в рассмотренном выше смысле). И в отношении этой гипотетической структуры проделать те же допущения, что и в отношении данных пространственных и временных структур. Только при этом различие первого и второго смысла терминов теряется. Остается лишь различие первого и третьего:

1) пространство — вместилище всех вещей, время — чистая длительность;

2) пространство — мир всех (или избранных) вещей, время — мир всех (или избранных) событий.

Как видим, обнаруживается явное разнообразие значений терминов. А между тем судьба многих высказываний с пространственно-временной терминологией всецело зависит от того, какие определения приняты (явно или неявно) для нее. И от этой зависимости не в состоянии избавить никакие достижения науки. Если, например, высказано утверждение, что пространство в районе такой-то звезды искривлено, то это утверждение еще ровным счетом ничего не значит, пока не сказано, в каком смысле здесь употреблен термин «пространство». Если он употреблен в первом смысле, то это утверждение бессмысленно, ибо искривлен может быть лишь какой-то ряд предметов относительно какого-то другого ряда, а с точки зрения первого понятия пространства все это исключено. Значит термин «пространство» употреблен здесь в третьем смысле. Но в таком смысле ничего удивительного в этом нет.

Относительно пространства и времени в целом (т. е. объединения всех пространств и времен) надо заметить еще следующее. Для объединения всех пространственных (временных) структур в одну пространственную (временную) структуру требуется один и тот же класс способов установления пространственного (временного) порядка для всех структур. А это практически немыслимо. Если же иметь в виду класс всех способов установления порядка (и он действительно будет один), то таковой будет содержать взаимоисключающие способы и потому логически невозможен. Так что все рассуждения о простран-

стве и времени как о целом (объединении всех пространств и времен) остаются всегда чисто гипотетическими.

Более того, если попытаться придать логически явный вид приведенным выше абстракциям, то обнаруживается следующее интересное обстоятельство.

Абстракцию, осуществляемую для образования термина «данное пространство A» в первом смысле, явным образом можно записать так: если изъять (исключить) из пространственной структуры A все индивиды, находящиеся внутри A, и индивиды $a^1, \ldots, a^n$, оставив все остальные без изменения, то, что останется от A, будем называть пространством A (или пространством, занимаемым A). В этом утверждении право употреблять термин «пространство A» поставлено в зависимость от такого условия, которое невыполнимо. И поэтому в соответствии со свойствами оператора «если, то» это право реализовать нельзя. Замена «если, то» на выражения «если бы, то», «если бы можно было, то» лишь еще более запутывает дело. Так что приведенные схемы образования терминов пространства логически совершенно несостоятельны. Аналогично для времени.

По нашему мнению, логически корректным является лишь такой путь. Логической экспликации поддаются термины, обозначающие пространственный и временной порядок индивидов, термины «пространственная структура», «временная структура» и совокупность терминов, которые связаны с ними и которые мы отчасти рассмотрели. Что касается самих слов «пространство» и «время», то они могут быть точно определены лишь как части сложных выражений (если, конечно, есть в этом надобность). Например, так: «Индивид a находится в пространстве A» $\equiv Df\cdot$ «Индивид a находится внутри пространственной структуры A»; «Пространство в области α искривлено» $\equiv Df\cdot x$, где x есть описание данных наблюдения или эксперимента относительно поведения или положения каких-то индивидов в области α. Но во всех таких случаях определяются практически выражения, содержащие слова «пространство» и «время», но не сами эти слова как отдельные самостоятельные термины.

§ 7. Время существования эмпирического индивида

Высказывания вида «a существует во время t» будем записывать символами вида

$$Et(a),$$

где t есть какое-либо обозначение времени (временного интервала или момента), а Et — предикат «существует во время t».

Примем далее, что временные интервалы (времена) и моменты упорядочены относительно некоторого способа упорядочивания. Для упрощения записи в этом параграфе будем символы $t^1 > t^2$, $t^1 < t^2$ и $t^1 = t^2$ употреблять в смысле соответственно «t^1 после (позже) t^2», «t^1 до (раньше) t^2», «t^1 и t^2 совпадают (суть одно и то же время)».

Частью имплицитного определения выражения «эмпирический индивид» является следующее утверждение: время существования эмпирического объекта локализовано и непрерывно (X). Это утверждение означает следующее. Пусть t^1 есть время, когда возникает a (перед этим его не было), а t^2 — время, когда исчезает или разрушается a (после этого его уже нет). В любое время t^i такое, что $t^i < t^1$, a не существует (утверждение X^1). В любое время t^i такое, что $t^i > t^2$, a не существует (утверждение X^2). В любое время t^i такое, что $t^i > t^1$ и $t^i < t^2$ a существует (утверждение X^3). Другими словами, a не существует в любое время до t^1 (X^1), a не существует в любое время после t^2 (X^2), и если a существует в t^1 и t^2, то существует в любое время в интервале между t^1 и t^2. В отношении времени после уместно даже сказать, что a невозможен в любое время после. Утверждение X есть лишь сокращение $X^1 \wedge X^2 \wedge X^3$, т. е. $X \equiv Df \cdot X^1 \wedge X^2 \wedge X^3$. А последнее принимается как аксиома, являющаяся частью имплицитного определения эмпирического индивида.

Утверждения X^1, X^2 и X^3 можно получить как следствия из других аксиом, а именно — таких:

Ф3. Если a существует в t^1 и не существует в t^2 до t^1, то он не существует в любое время до t^2.

Ф4. Если a существует в t^1 и не существует в t^2 после t^1, то он не существует в любое время после t^2.

Из *Ф3* и *Ф4* следует: если a существует в t^1 и в t^2, причем $t^1 > \alpha t^2$ или $t^2 > \alpha t^1$, то a существует в любое время t^3 между t^1 и t^2. Утверждение очевидно: если a не существует в t^3, то a не существует в t^1, если $t^3 > t^1$, или в t^2, если $t^3 > t^2$, а также a не существует в t^1, если $t^3 < t^1$, или в t^2, если $t^3 < t^2$.

Пусть α, β и γ — переменные для терминов времени. Утверждения *Ф3* и *Ф4* можно записать также в следующей форме:

Ф3. $\vdash (E\alpha(a) \wedge (\exists \beta)((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \rightarrow (\forall \gamma)((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a))$;

Ф4. $\vdash (E\alpha(a) \wedge (\exists \beta)((\beta > \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \rightarrow (\forall \gamma)((\gamma > \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a))$.

Из *Ф3* и *Ф4* получается утверждение непрерывности времени существования эмпирического индивида:

$\Phi 3$. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \rightarrow (\forall \beta)(((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \vee ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta)) \rightarrow E\beta(a))$.

Приведем доказательство $\Phi 3$ более иди менее полно. Вместо формул $\Phi 3$ и $\Phi 4$ будем для сокращения писать их номера $\Phi 3$ и $\Phi 4$. Если какая-нибудь теорема входит как часть в теорему, следующую за ней по порядку в изложении доказательства, для сокращения будем писать лишь ее номер в доказательстве. Если N — номер некоторой теоремы, имеющей вид $N^1 \rightarrow N^2$, то символом $(N \rightarrow)$ будем записывать ее антецедент N^1, а символом $(\rightarrow N)$ записывать ее консеквент N^2.

Доказательство $\Phi 3$:

1. $(\rightarrow \Phi 3) \vdash ((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a))$;
2. $\vdash ((\rightarrow \Phi 3) \rightarrow ((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a)))$;
3. $\vdash \Phi 3 \wedge 2$;
4. $(\Phi 3 \wedge 2) \vdash ((\Phi 3 \rightarrow) \rightarrow ((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a)))$;
5. $\vdash ((\Phi 3 \rightarrow) \rightarrow ((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a)))$;
6. $E\alpha(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash (\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)$;
7. $(\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a) \vdash (\exists \beta)((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a))$;
8. $E\alpha(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash (\exists \beta)((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a))$;
9. $E\alpha(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash E\alpha(a)$;
10. $E\alpha(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash (\Phi 3 \rightarrow)$;
11. $E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a) \vdash E\alpha(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a))$;
12. $E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a) \vdash (\Phi 3 \rightarrow)$;
13. $\vdash ((E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a))(\Phi 3 \rightarrow))$;
14. $\vdash 13 \wedge 5$;
15. $13 \wedge 5 \vdash ((E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \rightarrow ((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a))$;
16. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a) \rightarrow ((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a))$;
17. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a) \wedge (\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a)$;
18. $\vdash E\alpha(a) \wedge \sim E\beta(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \rightarrow \sim E\gamma(a))$.

Аналогичным образом доказывается формула 19:

19. $\vdash E\alpha(a) \wedge \sim E\beta(a) \wedge ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta)) \rightarrow \sim E\gamma(a))$;
20. $\vdash (18 \rightarrow) \rightarrow E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta) \wedge \sim E\beta(a)$;
21. $\vdash (\rightarrow 20) \rightarrow \sim E\gamma(a)$;
22. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta) \wedge E\gamma(a) \rightarrow E\beta(a)$;
23. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \rightarrow E\beta(a)$;

Аналогично получается формула 24:

24. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \wedge ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta)) \rightarrow E\beta(a)$;
25. $\vdash (23 \vee 24) \rightarrow E\beta(a)$;
26. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \wedge (((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \vee ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta))) \rightarrow E\beta(a)$;
27. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \rightarrow ((((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \vee ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta))) \rightarrow E\beta(a))$;
28. $\vdash (\forall \beta)(27)$;

29. $\vdash 28 \to ((27 \to) \to (\forall \beta)(\to 27))$;
30. $\vdash (27 \to) \to (\forall \beta)(\to 27)$.

Формула 30 есть $\Phi 3$.

Утверждения 18 и 19 эквивалентны $\Phi 3$ и $\Phi 4$ в том смысле, что если принять 18 и 19 за аксиомы, то $\Phi 3$ и $\Phi 4$ будут теоремами, выводимыми из них.

Если учесть различие отрицаний $\sim$ и $\neg$, то аксиомы $\Phi 3$ и $\Phi 4$ следует заменить такими четырьмя:

1. $\vdash (\Phi 3(\sim E\beta(a)/\neg E\beta(a)))(\sim E\gamma(a)/\neg E\gamma(a))$;
2. $\vdash (\Phi 3(\sim E\beta(a)/?E\beta(a)))(\sim E\gamma(a)/?E\gamma(a))$;
3. $\vdash (\Phi 4(\sim E\beta(a)/\neg E\beta(a)))(\sim E\gamma(a)/\neg E\gamma(a))$;
4. $\vdash (\Phi 4(\sim E\beta(a)/\neg ?E\beta(a)))(\sim E\gamma(a)/?E\gamma(a))$.

Частью определения эмпирического индивида являются утверждения

$\Phi 5$. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\exists \beta)((\beta < q\alpha) \wedge \sim E\beta(a) \to (\forall \gamma)((\gamma < q\beta) \to \sim E\gamma(a)$

$\Phi 6$. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\exists \beta)((\beta > q\alpha) \wedge \sim E\beta(a) \to (\forall \gamma)((\gamma > q\beta) \to \sim E\gamma(a)$,

где α, β, γ суть переменные для терминов пространства. Из них выводится утверждение $T2$, аналогичное $T1$ и читаемое как утверждение непрерывности пространства существования эмпирического индивида или неповторимости его в пространстве.

Кажется, что утверждение противоречит случаям, когда эмпирический индивид состоит из частей, разделенных в пространстве. Пусть индивид есть A, е его части суть B и C. В промежутке между ними не существует B и не существует C. Но нельзя сказать, что в том месте, где есть B или C, существует A, а в промежутке между B и C индивид A не существует. Этот промежуток также есть пространство, занимаемое A.

Продолжительность существования эмпирического индивида больше нуля, т. е.

$\Phi 7$. $\vdash (\exists \alpha)E\alpha(a) \to (\exists \beta)(E\beta(a) \wedge (l\beta > 0))$,

где α и β — переменные для интервалов времени.

§ 8. Существование пространства и времени

Обработка пространственно-временной терминологии не заканчивается введением соответствующих субъектов. Если последние введены, это не означает, что мы можем получать осмысленные высказывания, соединяя их с любыми предикатами. Условия предицирования пространства и времени для целого ряда предикатов еще должны быть

определены. Возьмем, например, утверждение о бесконечности пространства. Оно, в частности, имеет смысл как замена для следующего выражения: имеется способ установления порядка, относительно которого упорядочиваются пространственные структуры; и этот упорядоченный ряд бесконечен. В противном случае оно не имеет смысла.

Возьмем предикат существования. В каком смысле говорят о существовании пространства и времени? Оставим в стороне различия терминологии, рассмотренные выше, и выделим общее:

1) вопрос о существовании данного пространства и времени и пространства и времени вообще;

2) вопрос о существовании пространственно-временных структур.

Первый вопрос принципиальных трудностей не представляет: вопрос о существовании любого пространства (и времени) и вопрос о существовании пространства (времени) вообще совпадают и сводятся к вопросу о существовании некоторого данного пространства и времени), подобно тому, как вопрос о существовании стола вообще сводится к вопросу о существовании какого-то конкретного стола.

Вопрос о существовании структур сводится к вопросу о существовании порядковых отношений, а существование последних определяется в зависимости от существования предметов: отношение aRb существует, если и только если существуют a и b и при этом отношение между ними именно таково, как сказано в утверждении aRb. Другие определения существования являются лишь усложнением этой схемы.

Поскольку пространственные структуры суть структуры эмпирических предметов, то из самого определения предиката существования для этих структур следует, что пространство не существует без эмпирических предметов. Но, поскольку не только в обиходе, но и в науке обходятся неявными определениями, это обстоятельство остается скрытым, и положение о невозможности существования пространства без вещей расценивается или как результат наблюдений, или как постулат. Совершенно аналогично для времени: время не существует без эмпирических изменений.

Данное пространство A существует для исследователя, если и только если для него существует данная пространственная структура A (или существуют какие-то предметы, образующие пространственную структуру A, в случае первого смысла термина). А последняя существует для исследователя, если и только если существуют предметы $a^1, \ldots, a^n$ (или какие-то предметы в соответствующих местах), и порядок их таков, как сказано в определении A. Пространство вообще существует для исследователя, если и только если для него существует какое-то данное пространство. Важно заметить, что здесь предполагается существование

предметов, образующих данную пространственную структуру, в некоторое данное время (предполагается «одновременность» вещей).

Определения существования для времени аналогичны, только напоминаем, что в них имеются в виду не эмпирические устойчивые вещи, а изменения вещей. И здесь важна разновременность изменений. Изменения, образующие данную временную структуру, наблюдаются исследователем и, следовательно, существуют для него в разное время, а сама временная структура существует для него именно тогда, когда она им фиксируется. Так что для исследователя имеет смысл говорить не о времени существования данного времени, а лишь о некоторой пространственной области, в которой исследователь наблюдает изменения, образующие данную временную структуру. Эти изменения, можно сказать, «однопространственны».

Время и место существования времени и пространства определяется утверждениями:

$\Phi 8.$ $\vdash Et(t)$;
$\vdash Es(s)$;
$\vdash (t^1 > t^2) \rightarrow \neg\, \alpha Et^1(t^2) \wedge \neg\, Et^2(t^1)$;
$\vdash (s^1 > s^2) \rightarrow \neg\, Es^1(s^2) \wedge \neg\, Es^2(s^1)$.

Будем говорить, что интервал времени t^1 включается в интервал времени t^2 относительно α, если и только если все изменения, происходящие внутри t^1 относительно α, происходят внутри t^2 относительно α. Будем также говорить, что пространственная структура s^1 включается в пространственную структуру s^2 относительно α, если и только если все тела, находящиеся внутри s^1 относительно α, находятся внутри s^2 относительно α.

§ 9. Положение индивида в пространстве и времени

Положение индивидов в пространстве и времени определяется их местом в пространственных и временных рядах и положением внутри пространственных временных структур. В дальнейшем, употребляя выражения «во время t» и «в месте s», мы будем иметь в виду какой-то (любой) способ установления положения индивида.

§ 10. Тот же самый индивид

Надо различать два случая употребления термина «тождественный» в отношении индивидов:

1) когда имеется в виду, что индивиды a и b тождественны по каким-то признакам; в частности, здесь может иметь место случай, когда a и b тождественны по всем признакам;

2) когда имеется в виду, что a и b суть один и тот же индивид.

Частный случай, указанный в пункте 1, можно записать так (P — переменная для предикатов):

$$(\forall P)(P(a) \leftrightarrow P(b)).$$

В этом случае, можно сказать, a и b тождественны во всем.

Кажется естественным считать, что если a и b тождественны во всем, то a и b суть один и тот же индивид. Однако выражение «один и тот же индивид» имеет совсем иной смысл. Возьмем такой пример: индивид a имеет признак P во время t^1 и не имеет признака Q в это время; затем происходит его изменение, и во время t^2 индивид a не имеет P, но зато приобретает Q. Индивид a остается тем же самым, но индивид a во время t^1 и индивид a во время t^2 не являются тождественными во всем.

Выражение «один и тот же индивид» определяется совершенно иначе, а именно — так. Индивиды a и b суть один и тот же индивид, если и только если для них имеют силу утверждения (в них α есть переменная для времени, а β — переменная для способов установления положения индивида в пространстве):

1) $(\forall \alpha)(\forall \beta)(\alpha = \beta b)$;
2) $(\forall \alpha)((E\alpha(a) \leftrightarrow E\alpha(b))$.

Первое утверждение означает: в любое время a тождественен b по пространственному положению относительно любого способа установления пространственного порядка. Второе означает: всегда, когда существует один из a и b, существует и другой (т. е. времена их существования совпадают). Из второго по правилу контрапозиции получаем: всегда, когда не существует один из a и b, не существует и другой.

Как видим, выражение «тот же самый индивид» практически широко употребимо. Что же касается случая, когда эмпирические индивиды a и b тождественны во всем, то он фактически не может встретиться, поскольку эмпирические индивиды постоянно изменяются так или иначе (это опытное суждение). Лишь для абстрактных индивидов возможно допущение, согласно которому некоторые индивиды не изменяются со временем.

Выражение «тот же самый» выше было определено для индивидов. Оно, далее, должно быть определено для прочих типов эмпирических предметов — классов, скоплений, структур и т. д. Особый интерес здесь для нас представляет определение его для структур.

Возьмем структуру A, образованную индивидами $a^1, \ldots, a^n$, и структуру B, образованную индивидами $b^1, \ldots, b^m$. Для того чтобы считать A и B одной и той же структурой, необходимо следующее:

1) число индивидов $a^1, \ldots, a^n$ должно быть равно числу индивидов $b^1, \ldots, b^m$;

2) для каждого индивида a^i имеется индивид b^k такой, что a^i и b^k — один и тот же индивид; и в обратную сторону, для каждого b^k имеется a^i такой, что b^k и a^i — один и тот же индивид.

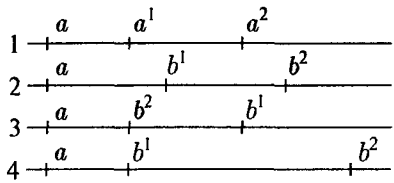
Но этого мало. Остаются еще отношения между индивидами, образующими каждую структуру. Включать или не включать тождество этих отношений в определение выражения «тот же самый» для структур? В природе вещей не заложено ничего такого, что обязывает нас принять то или иное решение.

Итак, возможны по крайней мере два смысла выражения «тот же самый» применительно к структурам:

1) слабый, при котором считается достаточным для определения указанные выше два пункта (будем говорить «слабо тот же самый»);

2) сильный, при котором помимо упомянутых двух пунктов в определение включается третий пункт — тождество отношений между соответствующими парами индивидов (будем говорить «сильно тот же самый»).

Причем сильный вариант, в свою очередь, дифференцируется: можно ограничиться требованием тождества отношений на уровне предикатов порядка, но можно потребовать еще и совпадения соответствующих интервалов между индивидами. Так, на следующем рисунке показано, что отношение порядка сохраняется в том смысле, что в обоих случаях (2) и (4) имеет место $b^2 > \alpha b^1$, но интервал между b^1 и b^2 изменился. Так что если в паре a^1 и b^1 и в паре b^2 и a^2 мы имеем дело с одним и тем же индивидом, то для ответа на вопрос, имеем мы дело с одной т той же структурой или с разными структурами, требуется еще договоренность относительно порядка индивидов и протяженности интервалов. В слабом варианте все структуры (1–4) суть одна и та же структура, в сильном же структуры (1) и (3) не есть одна и та же структура. Если в сильном варианте учитывается также размер интервалов, то все структуры (1–4) попарно не есть одна и та же структура.



Обращаем внимание на то, что отрицанием утверждения «a и b суть тот же самый индивид» есть утверждение «a и b не есть один и тот

же индивид», а не утверждение «*a* и *b* различны». Дело в том, что *a* и *b* могут различаться, но быть одним и тем же индивидом в разное время.

Рассмотрим один любопытный парадокс, возникающий в связи с употреблением выражения «тот же самый».

Пусть *b* есть термин «*a* ребенок», а *c* есть термин «*a* взрослый», где *a* есть индивидуальный термин (имя человека, индивидуализирующее его). Так что *b* и *c* суть один и тот же (тот же самый) индивид *a* в разное время. И в зависимости от времени этот индивид обладает разными признаками — в одном случае признаками ребенка, в другом — признаками взрослого человека. Отношение терминов *a*, *b*, *c* таково:

$$(b \rightharpoonup a) \wedge (c \rightharpoonup a) \wedge \sim (b \rightharpoonup c) \wedge \sim (c \rightharpoonup b).$$

Если *b* и *c* суть один и тот же (тот же самый) индивид, то для любого времени *t*

$$Et(b) \leftrightarrow Et(c).$$

Однако человек не может быть одновременно ребенком и взрослым, т. е. кажется правомерным

$$Et(b) \rightarrow \neg\, Et(c);$$
$$Et(c) \rightarrow \neg\, Et(b).$$

Причина такого парадокса — нарушение правил логики. Здесь надо различать такие два аспекта. Действительно, имеются такие признаки ребенка *P* и взрослого *Q* человека, что для любого человека

$$P(d) \rightarrow \neg\, Q(d);$$
$$Q(d) \rightarrow \neg\, P(d).$$

И поэтому для всякого *t* имеют силу утверждения W^1:

$$Et(d \downarrow P) \rightarrow \neg\, Et(d \downarrow Q);$$
$$Et(d \downarrow Q) \rightarrow \neg\, Et(d \downarrow P).$$

Но имеется другой аспект употребления соответствующих выражений, а именно — такой. Термины *b* и *c* определяются так:

$$b = Df \cdot a \downarrow (Pt^1(a) \wedge \neg\, Qt^1(a));$$
$$c = Df \cdot a \downarrow (Qt^2(a) \wedge \neg\, Pt^2(a)),$$

где $t^2 > t^1$. И поскольку *b* и *c* суть один и тот же индивид, получим утверждение W^2:

$$Et(b) \leftrightarrow Et(c),$$

что означает в соответствии с определением b и c следующее:

$$Et(a \downarrow (Pt^1(a) \wedge \neg kQt^1(a))) \leftrightarrow Et(a \downarrow (Qt^2(a) \wedge \neg Pt^2(a))).$$

А это утверждение ничего парадоксального не содержит. Парадокс есть следствие смешения разных аспектов, в которых получаются W^1 и W^2, т. е. результат их «наложения».

§ 11. Изменение пространства и времени

Возьмем пространственную структуру A, образованную предметами $a^1, \ldots, a^n$. Для того, чтобы считать A, взятую во время t^1, и A, взятую в другое время t^2, одной и той же структурой, необходимо, чтобы для каждого a^i выполнялось следующее: a^i, взятый в t^1, и a^i, взятый в t^2, суть один и тот же предмет. Но достаточно это условие или нет? Нужно ли в определении указывать на то, что все отношения между a^i в t^2 остаются такими же, как в t^1?

Если это второе условие в определении не указывать (не считать его обязательным), то пространственные структуры в силу определений будут иметь возможность изменяться (т. е. утверждение «A изменилась» и другие производные утверждения о величинах изменений, о скорости и т. п., могут быть истинными). Если же это условие считать обязательным, то все пространственные структуры будут неизменны по определениям: если отношения между a^i в t^2 не изменились сравнительно с t^1, то структура A не изменилась; если же они изменились, то мы не имеем права сказать, что A в t^1 и A в t^2 суть одна и та же структура, и не имеем условий для применения предикатов изменения.

Второе условие не мешает тому, что происходит смена одних структур другими. И все то, что можно сказать без принятия второго условия, можно сказать и с ним только в несколько иных выражениях (на ином варианте языка).

Заметим, кстати, еще одно интересное обстоятельство. Предмет a, взятый в любое время, есть один и тот же предмет a. Здесь указание на время не входит в состав термина. Если же мы введем указание на время в термин, т. е. возьмем термин «a, взятый в t^1» («a, который существует в t^1») и «a, взятый в t^2» («a, который существует в t^2»), и при этом один из t^0 и t^1 превосходит другой, то обозначаемые ими предметы нельзя рассматривать как один и тот же предмет в силу второго пункта определения. Они суть лишь представители одного и того же класса предметов a. Так что если при задании пространственной структуры A фигурируют названия образующих ее предметов только что рассмотренного вида, то условия для применения предикатов изменения исчезают, и все высказывания об изменениях пространственных структур оказываются непроверяемыми.

Обратимся к временным структурам. Здесь, для того, чтобы сказать «та же самая временная структура», требуется, чтобы были теми же самыми образующие ее события. Возьмем простейший случай — структуру B из двух событий b^1 и b^2. Время существования B есть само это время B. Пусть b^1 произошло в t^1, а b^2 в t^2. Пусть интервал между t^1 и t^2 есть время t_1. Чтобы судить об изменении, надо взять ту же самую структуру B в другое время t_2. Причем как t_1 и t^1, так и t_2 и t^2 суть разные времена. Но по определению существования событий события b^1 и b^2 не существуют в t_2. Если мы возьмем некоторые события, аналогичные b^1 и b^2, но существующие в t_2, они по определениям не существуют в t_1. Так что здесь даже независимо от условия, аналогичного второму условию для пространственных структур, все высказывания об изменениях временных структур нельзя проверить. Здесь нельзя сказать, что временная структура изменилась. Но нельзя сказать, что она не изменилась: чтобы признать, что B не изменилась, нужно воспроизвести те же самые события b^1 и b^2 в t_2, что невозможно. Таким образом, в силу определений наших высказываний как об изменениях времени (об ускорении, замедлении и т. п.), так и о его неизменности являются непроверяемыми.

Но можно ли считать, что принятие таких высказываний является делом безобидным? Ничего подобного. Если мы приняли утверждение, что временные структуры изменяются, то в силу смысла соответствующих терминов мы придем к следствиям, противоречащим принятым определениям (например, к заключению, что одно и то же событие осуществляется в разное время). Принятие такого рода высказываний означает неявный отказ от каких-то определений, изменение смысла терминологии и т. п. Это не физические допущения, а всего лишь небрежное обращение со словами.

Единственное, что уместно говорить с точки зрения изменений о временных структурах, это изменение временного интервала между различными представителями классов событий, изменение порядка представителей классов событий и т. п. Но это ничего общего не имеет с изменением временных структур и времени.

Возможна ли такая ситуация, что в одном месте мира время идет иначе (быстрее, медленнее, наоборот), чем в другом? Не говоря уже о том, что вообще бессмысленно говорить о движении времени, если строго относиться к словам и рассматривать движение как вид изменения, здесь присоединяются слова, являющиеся результатом сравнения (например, слово «быстрее»). Оставим в стороне указанную бессмысленность и сформулируем проблему приемлемым образом так: пусть события a^1 и a^2 суть элементы класса событий Ka, а — класса событий Kb. Пусть измерение времени между a^1 и a^2 дало результат $a^1(R^1\alpha)a^2$, а между b^1 и b^2 — результат $b^1(R^2\beta)b^2$. Чтобы сравнить эти времена,

необходим единый способ установления временного отношения γ как для пары событий a^1 и a^2, так и для b^1 и b^2. Лишь после того, как мы *получим* $a^1(R^3\gamma)a^2$ *и* $b^1(R^4\gamma)b^2$, *мы можем высказать свои суждения* о временном отношении a^1 и b^1, с одной стороны, и a^2 и b^2, с другой стороны, осуществив их сравнение. Например, мы можем сказать, что в некоторой области пространства A сначала происходит c и затем d, а в области пространства B — наоборот, причем в A интервал между c и d вдвое больше, чем в B.

Изменение продолжительности существования индивидов с изменением некоторых условий не есть изменение хода времени. Так, от изменения скорости движения зависит продолжительность существования некоторых микрочастиц. Но видеть в этом пример изменения (замедления или ускорения) хода времени правомерно в такой же мере, как в случае изменения продолжительности жизни людей в зависимости от изменения характера питания.

Рассмотрим, наконец, такой случай. Пусть взята пара одинаковых часов α и β. Пусть α оставлены на Земле (A), а β помещены на тело B, которое во время t^1 покидает Землю, движется каким-то образом и во время t^2 возвращается на Землю. Пусть показания α и β оказываются различными (в α произошло нечто, характеризуемое величиной x, а в β — величиной y, причем x и y не равны).

Что можно высказать об указанном факте, соблюдая правила осмысленности употребляемых выражений? Наблюдатель, осуществляющий сравнение α и β и имеющий какой-то способ измерения времени, в котором он фиксирует t^1, t^2 и интервал z между ними, может сказать следующее: показания α и β различны; за одно и то же время z в α осуществился некоторый процесс, фиксируемый величиной x, а в β — процесс того же рода, фиксируемый величиной y; этот процесс в одних из часов α и β протекал медленнее (быстрее), чем в других из них. На вопрос о том, сколько прошло времени, нужно поставить другой вопрос: относительно какого способа отсчета времени? И только при этом *условии можно дать такие ответы, не противоречащие друг другу:*

1) за время z прошло время, которое характеризуется величиной x (прошло времени x), относительно α, установленных на A;

2) за время z прошло время y относительно β, установленных на B;

3) прошло время z относительно некоторого способа установления временных отношений;

4) прошло время x относительно α на A;

5) прошло время y относительно β на B.

Пункты (1–5) могут попарно совпадать и различаться, что не играет роли. Но невозможны имеющие смысл выражения «для A и B прошло

разное время», «для A и B время текло с различной скоростью» и т. п., ибо они предполагают сравнение и одно и то же время, без которого сравнение логически исключено.

Таким образом, дело не в том, что утверждение о замедлении или ускорении времени неверно. Дело в том, что здесь одинаково бессмысленно как само такое утверждение, так и его отрицание. Здесь имеют место языковые конструкции, похожие на высказывания, но таковыми не являющиеся, ибо входящие в них выражения не имеют смысла (не являются терминами). А бессмыслицу нельзя доказать (подтвердить) и нельзя опровергнуть.

Если для каких-либо предметов прошло времени x относительно некоторого способа установления временных отношений α, то для любых предметов за это же время прошло времени x относительно α. Это утверждение есть логическая тавтология, только это обстоятельство здесь скрыто за словесной формулировкой. Оно иначе (и более явно) может быть сформулировано так: для любого предмета a, если для a можно измерить время способом α и если при этом получается величина x, то величина времени для a относительно α характеризуется величиной x.

§ 12. Необратимость времени

Вопрос об обратимости и необратимости времени есть часть вопроса об изменении времени. Мы его выделили здесь, чтобы обратить внимание еще на одну деталь.

Вопрос об обратимости и необратимости времени смешивают с вопросом об обратимости и необратимости процессов. Но если даже на минуту признать, что это — одна и та же проблема, мы должны считаться с такими фактами.

Если мы наблюдаем превращение A в B, а затем обратное превращение B в A, это не будет возврат во времени: если в t^1 наблюдается A, а затем в t^2 имеет место B, то обратное превращение B в A возможно лишь во время t^3, следующее за t^1 и t^2. Кроме того, то A, которое превращалось в B, и то A, в которое превратилось B, это не один и тот же предмет в силу определения выражения «один и тот же предмет». В результате $B \Rightarrow A$ получается предмет такой же, как A (того же класса), но не тот же A.

Необратимость времени не имеет никаких физических оснований. Временная терминология вырабатывается так (и для таких предметов), что в силу самого способа выработки этой терминологии приходится признать необратимость времени во избежание конфликта с определениями терминов.

Пусть интервал времени t^1 имеет место позже, чем t^2 (т. е. все изменения, происходящие в t^1, происходят позже всех изменений, происходящих в t^2). Выражение «время обратимо» означает (в простейшем случае) следующее: возможны такие t^1 и t^2, для которых можно изменить временное отношение на обратное (т. е. сделать так, что t^2 будет иметь место позже, чем t^1).

Чтобы ответить не вопрос о том, возможно или нет обернуть время, надо сами временные интервалы (и моменты) рассматривать как индивиды и установить, что будет называться временем существования времени.

Мы не будем восстанавливать все тонкости, связанные с переносом принятых выше определений на такого рода индивиды. Приведем лишь очевидный результат: время существования данного времени t есть само это время t. Так что t^1 не существует в t^2, а t^2 не существует в t^1. Если t^2 не существует в t^1, то t^2 не будет больше существовать никогда. Так что во время t^3, когда мы хотим получить $t^2 > t^1$, не будет существовать ни t^2, ни t^1 (поскольку $t^3 > t^1$). Так что t^1 и t^2 неповторимы, и отношение между ними изменить уже нельзя. Сказанное можно для большей убедительности переформулировать, заменив t^1 и t^2 скоплениями изменений в t^1 и t^2, которые индивидуальны и, значит, неповторимы.

Используя $\Phi 8$, можно доказать такое утверждение необратимости времени

$$(t^2 > t^1) \wedge (t^3 > t^1) \rightarrow \neg\, Et^3(\downarrow (t^1 > t^2)).$$

В самом деле, если $t^3 > t^2$, то в силу $\Phi 8 \vdash \neg\, Et^3(t^2)$ и в силу определения существования отношения $\vdash \neg\, Et^3(\downarrow (t^1 > t^2))$. Аналогично доказываются такие утверждения неускоряемости и незамедляемости времени:

$$(t^2 > t^1) \wedge (t^3 > t^2) \rightarrow \neg\, Et^3(\downarrow (t^1 = t^2));$$

$$(t^2 = t^1) \wedge (t^3 > t^2) \rightarrow \neg\, Et^3(\downarrow (t^2 > t^1));$$

$$(t^2 > t^1) \wedge (t^2 \parallel t^1) \wedge (t^3 > t^2) \rightarrow \neg\, Et^3(\downarrow ((t^2 > t^1) \wedge (t^2 \neg \parallel t^1)));$$

$$(t^2 > t^1) \wedge (t^2 \neg \parallel t^1) \wedge (t^3 > t^2) \rightarrow \neg\, Et^3(\downarrow ((t^2 > t^1) \wedge (t^2 \parallel t^1))).$$

Об обратимости времени говорят также в смысле возможности изменить направление временного ряда. Рассмотрим языковые выражения, фигурирующие в рассуждениях на эту тему. Направление ряда A устанавливается относительно другого ряда B того же рода. Ряд A при этом не является отрезком B, а B не является отрезком A. Причем, сопоставление A и B осуществляется определенным способом.

Так что для логической ясности надо рассматривать выражения типа «направление ряда A относительно B». Чтобы говорить об изменении направления ряда, надо установить его направление в одно время и затем его направление в другое время относительно одного и того же α. Чтобы говорить о различии направлений двух рядов A^1 и A^2 одного ряда A, надо сравнивать их направления относительно одного и того же α. При этом A^1 не должен быть отрезком A^2, а A^2 не должен быть отрезком A^1. Сравнение направлений отрезка ряда и ряда в целом лишено смысла. Временной ряд есть ряд из временных интервалов и моментов. Порядок последних сводится к временному порядку происходящих в них изменений так: t^2 превосходит по порядку t^1 относительно β, если и только если все изменения, происходящие в t^2, превосходят по временному порядку все изменения, происходящие в t^1, относительно β. Чтобы говорить об изменении временного ряда, надо взять временной ряд относительно некоторого γ во время t^1 и затем тот же ряд во время t^2 после t^1 относительно β. В таком случае временной ряд в t^2 будет отличаться от временного ряда в t^1 только наличием интервала между t^1 и t^2 и интервала t^2. В силу принятых условий и определений временной ряд в t^1 есть отрезок временного ряда в t^2, и сравнивать их по направлению бессмысленно. Чтобы говорить о различии направлений двух временных рядов, надо взять временной ряд в интервале t^1 и какой-то временной ряд в другом интервале t^2. Причем, один из t^1 и t^2 превосходит другой относительно β. Для сравнения временных рядов в t^1 и t^2 по направлению необходимо соотнесение каждого из них к способу β. Но в таком случае в силу заданных условий временной ряд t^1 есть отрезок временного ряда относительно β, и говорить о его направлении бессмысленно. Аналогично для t^2. Так что сравнение их по направлению лишено смысла.

§ 13. Об отношении порождения

Пусть индивид A улетел с Земли во время t^1 и вернулся во время t^2. По самому смыслу слова «вернулся» время t^2 следует за t^1 относительно некоторой точки отсчета времени α. Если индивид B существовал в t^1 или до t^1 и не существовал в t^2, то согласно $\Phi 3$ и $\Phi 4$ этот индивид никогда не будет существовать после t^2. Так что если B есть отец или мать индивида A, то по крайней мере можно сказать следующее: куда бы A ни улетал и как бы он ни летал (и что бы с ним ни случилось в пути), если он, вернувшись, не находит в живых своих родителей, то они никогда уже не появятся на свет, причем наша уверенность в этом вытекает из анализа терминов, в которых формулируются наши утверждения.

Отношение детей и родителей есть частный случай отношения «порождает». Для этого отношения по определению имеет силу следующее: если a порождает b, то для любого способа установления временного порядка индивид a возникает раньше, чем b. Если α и β суть переменные времени, а a и b — индивидные переменные, то сказанное можно записать так: если a порождает b, то для любого способа отсчета времени

$$(\exists\,\alpha)(\exists\,\beta)(E\alpha(a) \wedge \neg\, E\alpha(b) \wedge E\beta(b) \wedge (\beta > \alpha)).$$

Мы здесь не рассматриваем смысл термина «порождает» полностью. Но приведенное утверждение есть часть возможного имплицитного определения его. Если это определение не принимать, то либо отношение детей и родителей не будет частным случаем порождения, либо разговоры на этот счет теряют всякий смысл.

§ 14. Непрерывность пространства и времени

Непрерывность пространства и времени не сводятся к непрерывности рядов эмпирических предметов в пространстве и времени. Они непрерывны в таком смысле: между любыми пространственными (временными) структурами заключены также пространственные (временные) структуры. Уточним это понимание.

Рассмотрим сначала интервалы. Пусть $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \alpha\}$ — пространственные интервалы, причем $b > \alpha c$. Возможны два пути. Первый: принять, что при заданных условиях также $\{b, c, \alpha\}$ — пространственный интервал. Но при этом возникает вопрос: как быть с $\{c, d, \alpha\}$? Чтобы признать его пространственным интервалом, требуется еще одна аксиома (аксиома сложения интервалов): если $\{a, b, \alpha\}$ и $\{b, c, \alpha\}$ суть пространственные интервалы, то $\{a, c, \alpha\}$ — также пространственный интервал. Второй путь: принять, что при заданных условиях $\{a, d, \alpha\}$ также есть пространственный интервал. Но при этом возникает вопрос относительно $\{b, c, \alpha\}$. Чтобы признать его пространственным интервалом, необходима еще аксиома (аксиома деления интервалов); если $a > \alpha b$ и $b > \alpha c$ и при этом $\{a, c, \alpha\}$ — пространственный интервал, то $\{a, b, \alpha\}$ и $\{b, c, \alpha\}$ — пространственные интервалы. Совершенно аналогично для времени. Приведенные два пути эквивалентны.

Если принята аксиома сложения интервалов, то должна быть принята следующая аксиома X^1, с помощью которой можно определить непрерывность пространства на уровне интервалов: если $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \alpha\}$ суть пространственные интервалы и при этом $b > \alpha c$, то $\{b, c, \alpha\}$ также есть пространственный интервал. Назовем X^1 аксиомой непрерывности. Определение непрерывности пространства примет

такой вид: «пространство непрерывно» $\equiv Df \cdot X^1$. Аналогично для времени.

Если принята аксиома деления интервалов, то должна быть принята следующая аксиома непрерывности X^2: если $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \alpha\}$ — пространственные интервалы, и при этом $b > \alpha c$, то $\{a, d, \alpha\}$ — также пространственный интервал. Непрерывность пространства определится так: «пространство непрерывно» $\equiv Df \cdot X^2$. Аналогично для времени.

Если для времени приведенное определение кажется достаточным (время представляется «неплоскостным» и «необъемным»), то для пространства требуется более общее определение, учитывающее любые пространственные структуры. Заметим, что это требуется и для времени, если учесть разнопространственность способов отсчета времени. Во всяком случае, в приводимом ниже определении для времени можно иметь в виду лишь бинарные структуры с общим способом установления порядка (привычный частный случай).

Для структур нам известны такие соотношения: одна структура есть подструктура другой и одна структура находится внутри другой (все элементы первой находятся внутри другой). Второе сводится к первому таким образом. Если структура A находится внутри структуры B относительно некоторого класса способов установления порядка α, то:

1) элементы A образуют структуру A^* относительно α, а элементы B образуют структуру B^* относительно α;

2) элементы A и B образуют структуру C относительно α;

3) A^* есть подструктура C и B^* есть подструктура C.

Так что в дальнейшем достаточно ограничиться соотношением структуры и подструктуры.

Примем следующую аксиому сложения пространственных структур $Ф5$: если A и B — пространственные структуры, C — структура относительно α, A и B — подструктуры C относительно α, то C также есть пространственная структура (т. е. сложение пространств дает пространство или сумма пространств есть пространство). Аналогично для времени (сложение времен дает время; сумма времен есть время).

Примем следующую аксиому непрерывности пространства $Ф6$: если A и B — пространственные структуры относительно α, C — структура, образованная относительно α из элементов A (причем из A взят по крайней мере один элемент) и элементов B (также взят по крайней мере один элемент B), то C есть пространственная структура относительно α (т. е. между любыми пространствами заключено пространство). Аналогично для времени (между любыми временами заключено время).

Другой вариант — с аксиомой деления пространства и времени. Если принят первый, то второй получается как следствие. И наоборот.

Утверждения $\Phi 5$ и $\Phi 6$ суть части имплицитного определения пространства и времени как таковых. Их можно истолковывать также как определение непрерывности для пространства и времени. Очевидно, что непрерывность рядов в пространстве и времени и непрерывность пространства и времени суть разные вещи.

§ 15. Инвариантность пространства и времени

Пространство и время *инвариантны* в смысле следующей аксиомы $\Phi 11$: если A есть пространственная (временная) структура относительно α, и A^* есть структура, образованная из элементов A относительно β, то A^* также есть пространственная (соответственно, временная) структура.

Сказанное можно истолковать так: пространство всегда остается пространством (а время — временем), независимо от способа его ограничения, отсчета, измерения и т. п.

§ 16. Тождество и различие места и времени

Пусть A и B — пространственные структуры относительно α. Высказывания «Индивид находится во время t внутри A (внутри B) относительно α» будем кратко записывать буквами соответственно x и y. Примем определения:

1) A и B пересекаются относительно α во время t, если и только если $(\exists I)\ (x \wedge y)$.

2) A и B совпадают относительно α во время t, если и только если $(\forall I)\ (x \wedge y)$.

Аналогичные определения имеют силу для временных структур, с той лишь разницей, что выражение «время t» повсюду заменяется на «место s».

Из определений 1 и 2 следует:

3) A и B не пересекаются относительно α во время t, если и только если $(\neg\, \exists I)\ (x \wedge y)$.

4) A и B не совпадают относительно α во время t, если и только если $(\neg\, \forall I)\ (x \wedge y)$.

Большинство людей принимает утверждение: физическое тело не может одновременно находиться в разных местах. Но поставьте вопрос: почему не может? И вы, как правило, услышите ответ: так устроена природа.

Но природа здесь на самом деле совершенно ни при чем. И приведенное утверждение не так уж бесспорно, если разобраться в том,

что оно означает. На самом деле это утверждение принимается лишь постольку, поскольку неявно принимается некоторое определение терминов «разные места» и «в то же самое время».

Выражения «разные места» и «разные времена» неоднозначны: они могут означать, что некоторые пространственные (временные) структуры не пересекаются, и могут означать, что они не совпадают. А выражения «одно и то же место» и «одно и то же время» могут означать, что пространственные (временные) структуры пересекаются и могут означать, что эти структуры совпадают.

Кроме того, тождество и различие мест и времен понимается как тождество и различие предметов по пространственному и временному порядку, т. е. как тождество и различие точек пространства и моментов времени в пространственном и временном порядке предметов.

Если принято определение, согласно которому два места суть разные места, если и только если они не пересекаются, то мы получим в качестве следствия: эмпирический индивид не может одновременно находиться одновременно в разных местах. Причем одновременность здесь понимается как тождество моментов или совпадение временных интервалов. Если же разные места определены более «слабо», лишь как несовпадающие места, или разные времена определены как несовпадение временных интервалов, то не исключена возможность нахождения индивида в одно и то же время в разных местах (если он находится в их общей части).

§ 17. Предицирование изменений

Изменение $\downarrow x \Rightarrow \downarrow y$ исследуется как особый предмет $\downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$, и ему приписываются предикаты. Последние при этом должны быть в ряде случаев специально определены, а именно — тогда, когда учитывается особенность этого логического типа эмпирического предмета.

Измерение рассматривается как дискретное, если не принимается во внимание переходное состояние. Если допускается, что переходного состояния вообще нет, то допускается абстрактное изменение. Изменение рассматривается как недискретное, если принимается во внимание переходное состояние, и последнее в свою очередь рассматривается как скопление изменений и т. д. до тех пор, пока не дойдем до непрерывного ряда промежуточных изменений. Таким образом, предикаты «дискретный» и «недискретный» в применении к изменению приобретают дополнительный сравнительно с их применением к рядам оттенок, а именно — указание на способ нашего анализа.

Изменение $\downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$ существует (осуществляется) в интервале времени t, если и только если имеет место следующее:

1) в t^1 существует $\downarrow x$ (*и* не существует $\downarrow y$);

2) затем во время t^2 существует $\downarrow (\sim x \wedge \sim y)$;

3) затем во время t^3 существует $\downarrow y$ (и не существует $\downarrow x$);

4) t^1, t^2, t^3 образуют непрерывный ряд;

5) t есть временной интервал, в который включается интервал между t^1 и t^3, а также примыкающие к нему части t^1 и t^3, которые необходимы и достаточны для существования $\downarrow x$ и, соответственно, $\downarrow y$, t есть при этом собственное время $\downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$.

Изменение $\downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$ существует только в собственное время t. Как только оно произошло, оно перестает существовать как особый индивид. Оно как индивид не существует в любое время до t^1 и в любое время после t^3.

Предикат $\Rightarrow$ является двухместным. Но употребляется и одноместный предикат «изменяется», «изменился» и т. п. (будем его изображать символом $\Downarrow$), который можно определить следующим образом: $\Downarrow (a)$, если и только если возможно какое-то высказывание, которое содержит в качестве субъекта a и которое истинно в одно время и не истинно в другое; причем это высказывание не есть $E(a)$ и $\neg E(a)$, т. е. существование предполагается.

Таким образом, предикат $\Downarrow$ есть лишь модификация $\Rightarrow$ для особых случаев.

Применимы ли предикаты изменения к самому изменению? Вопрос далеко не праздный, поскольку с неясностью в такого рода случаях употребления терминологии связаны различного рода спекуляции.

Что можно иметь в виду, применяя предикаты $\Rightarrow$ и $\Downarrow$ к изменению $\downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$? Возможны такие случаи:

1) $\downarrow x$ превращается не в $\downarrow y$, а в $\downarrow z$;

2) $\downarrow x$ превращается в $\downarrow y$, но иначе.

В первом случае имеет место другое изменение $\downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow z)$. Во втором случае встает вопрос: сравнительно с чем иначе? Если $\downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$ произошло, то оно уже не существует и не будет существовать никогда. Значит речь может идти лишь о сравнении случаев изменения одного класса.

Пусть $\downarrow x^1 \in K x \downarrow$, $\downarrow x^2 \in K \downarrow x$, $\downarrow y^1 \in K \downarrow y$ и $y^2 \in K \downarrow y$. Пусть происходят или могут происходить изменения $\downarrow (\downarrow x^1 \Rightarrow \downarrow y^1)$ и $\downarrow (\downarrow x^2 \Rightarrow \downarrow y^2)$. Эти изменения суть элементы одного и того же класса изменений $K \downarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$. Они могут различаться по самым различным признакам — по месту, по продолжительности и т. п. Но это не есть изменение каждого из $\downarrow (\downarrow x^1 \Rightarrow \downarrow y^1)$ и $\downarrow (\downarrow x^2 \Rightarrow \downarrow y^2)$.

Таким образом, применить предикаты изменения к самим изменениям просто невозможно — соответствующие высказывания бессмысленны.

Для предиката изменения имеют силу утверждения, входящие в его имплицитное определение, в частности — такие:

1) $\neg (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y) \rightarrow \sim (\downarrow x \Rightarrow \downarrow \sim y)$;
2) $\neg (\downarrow x\neg \Rightarrow \downarrow y) \leftrightarrow\sim (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$;
3) $\neg \sim (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y) \rightarrow x \vee ((\downarrow x \Rightarrow \downarrow z) \wedge \sim (y \wedge z))$;
4) $\neg \sim y \rightarrow \sim (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y)$;
5) $\neg x \rightarrow \sim (\downarrow x \Rightarrow y)$;
6) $\neg (\downarrow x \Rightarrow \downarrow y) \rightarrow (\downarrow x \Rightarrow \downarrow \sim x) \wedge (\downarrow \sim y \Rightarrow \downarrow y)$.

Последнее читается так: «Если sx превращается в sy, то sx исчезает и sy возникает в то же самое время». Частный случай: «Если предмет a превращается в b, то в то же самое время исчезает a и возникает b».

§ 18. Перемещение

Перемещение тел в пространстве (движение) есть частный случай изменения.

Предикат $\Rightarrow$ в случае перемещения имеет такой смысл. Пусть x есть высказывание «Тело a находится в месте β», α и β суть разные места, состояние $\downarrow x$ по времени предшествует $\downarrow y$. При этом $\downarrow x \Rightarrow \downarrow y$ читается сокращенно так: «Тело a переместилось (перемещается) из место α в место β».

Выражение $\Downarrow (a)$ («тело a перемещается (движется)») двусмысленно. Оно может означать, что имеет место переходное состояние $s(\sim x \wedge \sim y)$. Но его можно эксплицировать так: в данное время t может быть указана область пространства α такая, что неверно «тело a находится в α» и неверно «тело a не находится в α».

Выражение «a переместилось из α в β» по определению означает, что в некоторое время t^1 предмет a находился в месте α, а во время t^2 — в месте β, причем $t^2 > t^1$. Выражение «a не переместилось из α» (пребывает в α) означает, что a находился в α как в t^1, так и в t^2, причем в любое время между t^1 и t^2 предмет a был в α.

Но возникает вопрос: возможно или нет, чтобы один прибор или человек A отметил нахождение a в месте α во время t, а другой прибор или человек B отметил нахождение a в другом месте β в то же самое время t? Вспомним определение разных мест. Согласно этому определению: если α и β суть непересекающиеся места, то a не может одновременно находиться в разных местах с точки зрения одного и того же способа установления порядка. Так что если различие A и B означает различие способов установления порядка, то мы не можем считать α и β разными местами. А если различие A и B означает различие в рамках одного и того же способа установления порядка, то указанная выше ситуация невозможна.

Если принято определение разных мест как непересекающихся не имеющих общих точек), то из него логически следует невозможность мгновенных перемещений. Перемещение тела a из места α в другое место β считается мгновенным, если и только если a находится во время t в α и в то же самое время оказывается в β. Но если по определению разных мест никакое тело a не может находиться сразу в α и β, то мгновенное перемещение невозможно. Так что допущение мгновенных перемещений есть чисто физическое допущение. Оно правомерно лишь как намерение не учитывать время, затраченное в том или ином случае на перемещение, или как допущение абстрактных предметов, способных перемещаться во времени.

§ 19. Парадокс движения

Движение, т. е. перемещение тел в пространстве, есть лишь частный случай изменений предметов. На него распространяется все, сказанное выше об изменении вообще. Ниже мы рассмотрим известный парадокс движения «Движущееся тело находится и в то же самое время не находится в данном месте пространства».

В большинстве случаев на вопрос «Может ли физическое тело находиться и в то же самое время не находиться в данном месте?» отвечают отрицательно. И в большинстве случаев мотивы отрицательного ответа заслуживают критики.

Физическое тело не может находиться и в то же самое время не находиться в данном месте потому, что таков мир, — так часто отвечают на поставленный выше вопрос. Действительно, в нашем опыте не встречаются случаи, противоречащие такому ответу. И никогда не встретятся. Но причина этого принципиально отличается от причин того, что не встречаются лошади с десятью рогами и зайцы с лошадиными копытами. Причина этого заключается в том, что мы употребляем знаки «и» и «не», а высказывание «физическое тело находится в данное время в данном месте» есть частный случай высказывания. И никакой иной премудрости здесь не заключено.

Трудность устранения всяких парадоксов заключается прежде всего в том, чтобы строго описать, как они получаются. Так обстоит дело и в данном случае. Откуда берется утверждение «Движущееся тело находится и в то же самое время не находится в данном месте»? Является результатом эмпирического наблюдения? Нет. Логически невозможное невозможно и фактически, а невозможное (и несуществующее) нельзя наблюдать. Значит оно принимается как аксиома или получается как следствие из других утверждений. Как аксиома оно не может быть принято, поскольку оно логически противоречиво (неистинно в силу

свойств конъюнкции «и» и отрицания «не»). Значит оно есть следствие каких-то других допущений. Каких именно?

Эмпирически замечены случаи, когда о перемещающемся предмете нельзя сказать, что он находится в некотором месте, и нельзя сказать, что он не находится в этом месте, т. е. когда имеет место переходное состояние. Если $P(a)$ есть высказывание «a находится в α», то в отношении переходного состояния верно высказывание

1) $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$.

Но если не различают два отрицания, т. е. не различают $\sim$ и $\neg$, а последнее воспринимают как $\sim$, то переходное состояние ошибочно описывают высказыванием

2) $\sim P(a) \wedge \sim\sim P(a)$.

Поскольку имеют силу правила логики

3) $\sim\sim P(a) \dashv\vdash P(a)$,

из 2 и 3 получается

4) $\sim P(a) \wedge P(a)$.

А если принято 2, то нужно принимать и 4. Отсюда по правилам логики следует, что

5) $(\exists x)(\sim P(x) \wedge P(x))$.

6) $\sim(\forall x)(P(x) \vee \sim P(x))$,

где x есть индивидная переменная, т. е. закон исключенного третьего $\vdash A \vee \sim A$ верен не для всех индивидов.

Парадокс есть результат ошибки, суть которой заключается в следующем: с самого начала допускается неклассический случай, для которого неверны утверждения

$$\vdash P(a) \vee \neg P(a),$$

$$\sim \neg P(a) \vdash P(a),$$

поскольку предполагаются три возможности

$$P(a), \quad \neg P(a), \quad \sim P(a) \wedge \sim \neg P(a),$$

а применяют правила для классического случая, для которого отрицания $\neg$ и $\sim$ не различаются, а значит, верны упомянутые утверждения, поскольку допускаются только две возможности

$$P(a), \quad \neg P(a).$$

§ 20. Процесс

Процесс есть упорядоченный во времени ряд изменений, обладающих такими свойствами. Пусть $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$ есть любая пара соседних элементов этого ряда. Если состояние a существует в t^a, b — в t^b, а c — в t^c, то $t^c > t^b$ и $t^b > t^a$. Состояния a, b и c суть состояния одного и того же индивида A.

Вопрос о существовании процесса решается в зависимости от определения термина, обозначающего его. Например, процесс B может быть определен так: это — последовательность изменений предмета A такая, что $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$. Очевидно, B существует, если и только если существуют $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$ в соответствующем временном порядке. Но процесс B может быть назван так: «процесс индивида A». Для существования такого процесса достаточно, чтобы существовало по крайней мере одно изменение индивида A. Одним словом, вопрос о существовании процесса решается в зависимости от типа термина, обозначающего его.

С процессами связаны парадоксы. Процесс, не имеющий начала, не начинается и, значит, не существует (не происходит). Но считается, что процесс изменений в мире не имеет начала (бесконечен в прошлое), однако он существует. Если процесс состоит из бесконечного числа изменений, то он не заканчивается. Считается, однако, что любой закончившийся процесс можно без конца разлагать на составные изменения.

Чтобы разобраться в этих парадоксах, необходимо прежде всего отметить, что выражение «процесс не имеет начала (не начинается)» двусмысленно. Процесс может не иметь начала как ряд изменений, не имеющий начального элемента. И процесс может не иметь начала в том смысле, что индивид пребывает все время (данное или вообще) в некотором состоянии, и последнее не превращается в другое состояние. Например, процесс из изменений $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$ не имеет начала во втором смысле, если состояние a сохраняется во время t^b и t^c.

Очевидно, что если процесс не имеет начального элемента (т. е. для любого его элемента α найдется другой элемент β, который предшествует ему), из этого не следует, что он не существует. Если же процесс не начинался, т. е. некоторое состояние индивида не сменялось другими состояниями, то согласно определению существования процесса такой процесс не существует. Указанный выше первый парадокс есть результат смешения понятий, т. е. обычной логической ошибки.

Что касается второго парадокса процесса, то рассмотрим такой простейший случай. Пусть произошло изменение $a \Rightarrow b$. Анализ его может обнаружить, что это изменение есть процесс из изменений

$$a \Rightarrow c^1,\ c^1 \Rightarrow c^2, \ldots, c^n \Rightarrow b.$$

И кажется, что каждое изменение этого процесса можно анализировать аналогично, так что всякое изменение можно представить как процесс из бесконечного числа изменений. Но на каждое изменение нужно время. А если последнее больше нуля и конечно, то потребуется бесконечное число изменений, а оно не может закончиться. Значит изменение $a \Rightarrow b$ невозможно. Но также невозможно и каждое изменение данного процесса.

Этот парадокс есть результат смешения абстрактных и эмпирических процессов. В случае абстрактных процессов допускаются изменения, на которые не требуется время или которые могут быть как угодно быстрыми. И затем результаты рассуждений для абстрактных процессов переносятся на эмпирические процессы, что не всегда правомерно, а в данном случае ошибочно.

§ 21. Минимальная протяженность

Для абстрактных предметов принимаются допущения, согласно которым протяженность предметов может быть равна нулю, а для каждого интервала между предметами, который больше нуля, имеется другой интервал, который меньше первого и больше нуля. В таких допущениях нет ничего страшного, если не забывать, что это относится лишь к абстрактным предметам. Если x и y суть переменные для интервалов, то указанные допущения можно записать так:

1) $(\exists x)(x = 0)$;

2) $(\forall x)(\exists y)((x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x > y))$.

Для эмпирических индивидов дело обстоит иначе. Термин «интервал между a и b относительно α» имеет смысл лишь при том условии, что $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$, т. е. a и b суть элементы упорядоченного ряда. Если a и b суть эмпирические изменения, и речь идет о временном интервале между ними, то положения a и b во временном ряду не изменяются. Если же a и b суть эмпирические тела, и речь идет о пространственном интервале между ними, то предполагается фиксированное время, в течение которого интервал не изменяется. Если речь идет об изменении интервала в какое-то время, то предполагается последовательный во времени ряд интервалов, каждый элемент которого фиксирован. Так что при этих условиях остаются только такие случаи:

1) a и b соприкасаются, т. е. между ними нельзя поместить никакой другой индивид. Они сдвинуты вплотную. Расстояние между ними уже нельзя уменьшить. Оно здесь самое маленькое;

2) a и b не соприкасаются, т. е. между ними можно поместить еще какой-то индивид. Расстояние между ними в этом случае можно уменьшить. Оно больше самого маленького;

3) a и b соприкасаются или не соприкасаются, но что именно имеет место, нам не известно. Поскольку здесь речь идет не о наших возможностях познания, а об отношении a и b независимо от нас, то для этого случая правомерно просто считать, что a и b соприкасаются или не соприкасаются, т. е. исключить неопределенности.

Другими словами, для терминов интервалов между эмпирическими индивидами в качестве части их имплицитного определения правомерно принять утверждение:

$\Phi 12.\ \vdash (a \parallel \alpha b) \vee (a \neg \parallel \alpha b)$.

Вместо выражения «протяженность (длина, длительность) самого маленького (минимального) интервала класса интервалов между индивидами» будем употреблять выражение «min». Ниже аналогичное сокращение примем для класса протяженностей эмпирических индивидов.

Учитывая сказанное выше, примем такие определения:

$\Phi 13.\ (l\{a, b, \alpha\} = \min) \dashv\vdash (a \parallel \alpha b)$.

$\Phi 14.\ (l\{a, b, \alpha\} > \min) \dashv\vdash (a \neg \parallel \alpha b)$.

Первое словесно означает: интервал между a и b называется минимальным, если и только если a и b соприкасаются. Второе означает: интервал между a и b называется превышающим минимальный, если и только если a и b не соприкасаются.

Теперь будет иметь силу такое тривиальное рассуждение. Подстановкой в $\Phi 12$ $(l\{a, b, \alpha\} = \min)$ на место $(a \parallel \alpha b)$ и $(l\{a, b, \alpha\} > \min)$ на место $(a \neg \parallel \alpha b)$ получаем:

1) $\vdash (l\{a, b, \alpha\} = \min) \vee (l\{a, b, \alpha\} > \min)$.

По правилам логики отношений имеем:

2) $(l\{a, b, \alpha\} = \min) \vdash \sim (l\{a, b, \alpha\} < \min)$,

3) $(l\{a, b, \alpha\} > \min) \vdash \sim (l\{a, b, \alpha\} < \min)$.

Из (1–3) получаем:

4) $\vdash \sim (l\{a, b, \alpha\} < \min)$.

Поскольку сказанное имеет силу для любого интервала, то по правилам введения переменной z для терминов интервалов между эмпирическими индивидами из (1) и (4) получим:

$T1.\ \vdash (\forall z)(lz \geqslant \min)$,

$\vdash (\forall z) \sim (lz < \min)$.

По правилам для кванторов отсюда имеем:

$$\vdash (\neg \exists z)(lz < \min).$$

По правилам соотношения квантора $\exists$ и предиката E имеем:

$$\vdash \neg E(z \downarrow (lz < \min)).$$

Пусть, далее, x и y суть переменные для терминов интервалов. В логике отношений доказуемо

$$\vdash (lx = ly) \vee (lx > ly) \vee (lx < ly) \vee (lx ?> ly).$$

Пусть z есть термин интервала такой, что $lz = \min$. Такой термин можно построить. Например, это может быть такой термин: $\{a, b, c\} \downarrow (l\{a, b, c\} = \min)$, т. е. термин «интервал между a и b относительно α такой, протяженность которого равна минимальной». Согласно правилу теории терминов $\vdash P(a \downarrow P)$ («Предмет, имеющий признак, имеет этот признак») получим: интервал, имеющий минимальную протяженность, имеет минимальную протяженность. Так что если термин z сконструирован нами с таким расчетом, чтобы $lz = \min$, то для такого z будет верно:

1) $\vdash lz = \min$.

Подставив z на место x, получим:

2) $\vdash (lz = ly) \vee (lz > ly) \vee (lz < ly) \vee (lz ?> ly)$.

Далее имеем:

3) $\vdash (lz > ly) \wedge (lz = \min) \rightarrow (ly < \min)$.
4) $\vdash \sim (ly < \min) \rightarrow \sim ((lz > ly) \wedge (lz = \min))$.

Поскольку

5) $\vdash \sim (ly < \min)$,

из 4 и 5 имеем:

6) $\vdash \sim ((lz > ly) \wedge (lz = \min))$.

Из 6 и 1 имеем:

7) $\vdash \sim (lz > ly)$.

Из 2 и 7 имеем:

8) $\vdash (lz = ly) \vee (lz < ly) \vee (lz ?> ly)$.

По правилам логики отношений имеем:

9) $(lz = ly) \vdash \sim (lz > ly)$.

10) $(lz < ly) \vdash \sim (lz > ly)$.

11) $(lz ?> ly) \vdash \sim (lz > ly)$.

12) $\vdash \sim (lz > ly)$.

По правилу обобщения имеем:

13) $\vdash (\forall y) \sim (lz > ly)$.

Наконец, по правилу введения переменной получим:

*T*2. $\vdash (\exists x)(\forall y) \sim (lx > ly)$,

т. е. утверждение об интервале, который не больше любого другого интервала.

Напоминаем, что определение протяженности эмпирического индивида сводится к определению протяженности интервала, т. е.

$$\vdash (l\{c, a\} = l\{a \downarrow x, b \downarrow x, a\}),$$

где x есть $(a \parallel \alpha c) \wedge (c \parallel \alpha b)$.

Поскольку верно x, имеем:

$$\vdash \sim (a \parallel \alpha b),$$

$$\vdash (l\{a \downarrow x, b \downarrow x, a\} \geqslant \min),$$

$$\vdash (l\{a, b, \alpha\} \geqslant \min)$$

и следовательно

$$\vdash (l\{c, a\} \geqslant \min .$$

Так как c — любой эмпирический индивид, имеем

*T*3. $\vdash (\forall x)(l\{x, a\} \geqslant \min)$,

$\vdash (\forall x) \sim (l\{x, a\} < \min)$,

где x есть индивидная переменная (для эмпирических индивидов, конечно). По правилам для кванторов и предикатов $=$, $>$ и $<$ имеем:

$$\vdash (\neg \exists x) \sim (l\{x, a\} \geqslant \min)$$

$$\vdash (\neg \exists x)(l\{x, a\} < \min).$$

Мы получили, таким образом, что протяженность всякого эмпирического индивида относительно заданного способа установления порядка α не может быть меньше некоторого минимума. Причем здесь α есть любой способ установления порядка, так что имеем

$$\vdash (\forall \alpha)(\forall x) \sim (l\{x, \alpha\} < \min).$$

Возьмем, далее, интервал $\{a, b, \alpha\}$, который больше минимального, и будем сближать a и b. Это сближение равносильно выбору интервала $\{c, d, \alpha\}$, который короче $\{a, b, \alpha\}$. При сближении a и b (или при сравнении интервалов) будет иметь место следующее. Либо сближение не влияет на величину интервала (между a и b помещается такой же индивид, как ранее, или такое же число некоторых индивидов, как ранее), либо величина интервала скачком изменяется на длину одного индивида: он перестает помещаться между a (или b) и индивидами, которые помещены между a и b и через которые определяется протяженность $\{a, b, \alpha\}$. А поскольку протяженность индивидов не может быть меньше некоторого минимума, сближение a и b будет серией конечного числа скачкообразного уменьшения интервала до тех пор, пока он не достигнет минимума (между a и b уже оказывается невозможным вставить какой-либо индивид). Так что если интервал x превышает интервал y лишь на минимальную длину некоторого индивида, а y превышает длину минимального интервала также на один индивид, то для y не найдется интервал z такой, что $(y > \min) \wedge (z > \min) \wedge (y > z)$. Если $y > z$, то при этих условиях $z = \min$.

Таким образом,

$T4.\ \vdash (\exists x)(\forall y)((l\{x, \alpha\} \leqslant l\{y, \alpha\} \wedge l\{x, \alpha\} > 0))$.

Сказанное относится как к длинам, так и к длительностям. Из сказанного следует, что пространственно-временные отношения эмпирических индивидов и их протяженности изменяются скачкообразно, квантами (к этому мы еще вернемся).

Надо особое внимание обратить на такое обстоятельство. Поскольку в общем случае из высказываний вида $(\exists a)w$ не следуют высказывания вида $E(a \downarrow w)$, утверждения $T3$ и $T4$ нельзя истолковывать буквально как

$\vdash E(x \downarrow (\forall y) \sim (lx > ly))$,

$\vdash E(x \downarrow (\forall y)((l\{x, \alpha\} \leqslant l\{y, \alpha\} \wedge l\{x, \alpha\} > 0))$.

Их можно истолковывать лишь как возможность выбора такого, который удовлетворяет условию, указанному после стрелки.

Примем определения:

$\Phi 14.\ (l\{a, \alpha\} = \min) \dashv\vdash (\forall z)((lz < l\{b \downarrow k, c \downarrow k, \alpha\}) \to (lz = \min))$,

$(l\{a, \alpha\} > \min) \dashv\vdash (\exists z)((lz < l\{b \downarrow k, c \downarrow k, \alpha\}) \to (lz > \min))$,

где a есть переменная для терминов эмпирических индивидов, z есть переменная для терминов эмпирических интервалов, k есть $(b \parallel \alpha a) \wedge (a \parallel \alpha c)$.

Для эмпирических индивидов имеет силу теорема, аналогичная $T4$.

§ 22. О бесконечной протяженности

Существуют (возможны) или нет эмпирические индивиды и интервалы, имеющие бесконечную протяженность? Поскольку протяженность индивидов сводится к протяженности интервалов, достаточно будет рассмотреть этот вопрос для интервалов.

Ответом на поставленный вопрос должны быть высказывания типа $E(a \downarrow x)$ и $M(a \downarrow x)$, где a есть термин интервала, а x есть некоторое дополнительное условие (в данном случае — «Интервал имеет бесконечную протяженность»), или его отрицание. Но чтобы признать или отвергнуть такие высказывания, надо иметь по крайней мере сам термин a. Затем надо иметь определения предикатов E и M для терминов интервалов. Поскольку значения этих предикатов для общих терминов сводятся к их значению для индивидуальных терминов, а все производные термины интервалов сводятся к первичным терминам типа $\{c, d, \alpha\}$, то нам в конечном счете для решения поставленной проблемы следует обратиться к высказываниям типа $E(\{c, d, \alpha\}), M(\{c, d, \alpha\}), E(\{c, d, \alpha\} \downarrow x), M(\{c, d, \alpha\} \downarrow x)$ и их отрицаниям, где c и d суть термины эмпирических индивидов.

Но при таком взгляде на проблему надо строго различать случаи, когда вместо терминов эмпирических индивидов употребляются явные или неявные переменные (вроде выражений «один индивид», «другой индивид» и т. п.), и случаи, когда на самом деле употребляют индивидуальные термины для эмпирических тел и изменений. Когда, например, говорят: «Возьмем эмпирические индивиды a и b, бесконечно удаленные друг от друга относительно α», допуская тем самым интервал $\{a, b, \alpha\}$ с бесконечной протяженностью, то это еще никак не означает того, что при этом построили индивидуальный термин интервала $\{a, b, \alpha\}$, ибо a и b здесь не являются индивидуальными терминами. Здесь имеет место иллюзия, аналогичная случаю, когда говорят: «Возьмем истинное высказывание $x\wedge \sim x$». От этой фразы $x\wedge \sim x$ не становится конкретным высказыванием, и ни одно высказывание типа $x\wedge \sim x$ не становится при этом истинным. Чтобы привести пример интервала в рассматриваемой ситуации, надо брать интервалы типа интервалов между Москвой и Ленинградом, между Землей и Солнцем, между началом первой Мировой войны и началом второй и т. п.

Допущение бесконечности Мира в пространстве и времени не имеет никакой логической связи с утверждениями о существовании (возможности) или несуществовании (невозможности) бесконечно протяженных (в пространстве или времени) интервалов. Дело в том, что упомянутое допущение означает допущение того, что в пространственных и временных рядах отсутствуют начальные или конечные (или и те и другие) элементы. А в случае интервалов задаются границы ин-

тервалов, что очевидно из самого строения терминов $\{c, d, \alpha\}$. И если интервалы эти заполнить до рядов, то получатся как раз ряды, имеющие начало и конец.

Предикаты E и M еще не определены для индивидуальных терминов вида $\{c, d, \alpha\}$. Поскольку речь идет о пространственных и временных интервалах, то в определениях следует учесть некоторые их различия. Мы принимаем такие определения. Для временных интервалов:

$$E(\{a, b, \alpha\}) \dashv\vdash (\exists t^1)(\exists t^2)(Et^1(a) \wedge Et^2(b) \wedge (a > \alpha b)),$$

$$M(\{a, b, \alpha\}) \dashv\vdash (\exists t^1)(\exists t^2)(Mt^1(a) \wedge Mt^2(b) \wedge (a > \alpha b)),$$

где a и b суть переменные для терминов эмпирических изменений, t^1 и t^2 суть переменные для терминов времени (для «меток» времени). Для пространственных интервалов:

$$Et(\{a, b, \alpha\}) \dashv\vdash (\exists s^1)(\exists s^2)(Es^1t(a) \wedge Es^2t(b) \wedge (a > \alpha b))$$

$$Mt(\{a, b, \alpha\}) \dashv\vdash (\exists s^1)(\exists s^2)(Ms^1t(a) \wedge Ms^2t(b) \wedge (a > \alpha b)),$$

где a и b суть переменные для терминов эмпирических тел, s^1 и s^2 суть переменные для областей пространства (для положений тел в пространстве), t есть термин (или переменная) времени. В случае временного интервала мы опустили t, поскольку время существования временного интервала есть сам этот интервал. Как видим, для существования индивидуального эмпирического интервала требуется существование эмпирических индивидов, образующих его границы. Так что даже без дальнейшего формального анализа можно сказать, что утверждения о существовании (возможности) индивида, бесконечно удаленного от некоторого выбранного индивида в пространстве или во времени, никогда не могут быть подтверждены или опровергнуты опытным путем. Судьба этого утверждения зависит от системы определений, т. е. по крайней мере отчасти зависит от состояния языка.

Наконец, у нас нет определений «конечен по протяженности» и «бесконечен по протяженности» для терминов интервалов. А здесь возможны разнообразные варианты, которые далеко не всегда равноценны.

Примем такие определения:

*Д*1. Эмпирический непрерывный ряд из индивидов с минимальной (конечной) протяженностью имеет конечную протяженность, если и только если он имеет начальный и конечный элемент, и бесконечную протяженность, если и только если он не имеет начального или конечного элемента (или обоих).

*Д*2. Эмпирический ряд A из элементов с минимальной (конечной) протяженностью будем называть промежуточным для $\{a, b, \alpha\}$, если

и только если он непрерывен, все его элементы находятся между a и b, его начальный элемент соприкасается с b, а конечный соприкасается с a (относительно α).

Д3. Интервал $\{a, b, \alpha\}$ имеет конечную (бесконечную) протяженность, если и только если найдется такой промежуточный для него ряд A относительно α, который имеет конечную (бесконечную) протяженность.

Из принятых определений следует: любой промежуточный для интервала $\{a, b, \alpha\}$ ряд A имеет конечную протяженность, поскольку он состоит из минимальных (конечных) по протяженности индивидов, непрерывен и имеет начало и конец; значит в этом случае $\{a, b, \alpha\}$ имеет конечную протяженность; если же промежуточный ряд не найдется, то будет неверно, что $\{a, b, \alpha\}$ имеет бесконечную протяженность.

Можно принять более слабое определение бесконечной протяженности интервала $\{a, b, \alpha\}$, а именно — такое: интервал $\{a, b, \alpha\}$ имеет бесконечную протяженность, если и только если между a и b можно поместить непрерывный ряд A, имеющий бесконечную мощность. В таком случае правомерно такое рассуждение. Чтобы судить о существовании бесконечно протяженного интервала $\{a, b, \alpha\}$, надо сначала выбрать эмпирическое изменение b, происшедшее во время t^1. Затем нужно выбрать другое эмпирическое изменение a такое, что $a > \alpha b$, и при этом между b и a происходит бесконечное количество изменений (условие W). Каждое из этих изменений имеет длительность больше нуля, и длительность эта постоянна, так как прошедшее время изменить нельзя. Так что время на эти изменения есть все время после b относительно α. Разобьем это время после t^1 на конечные последовательные интервалы $t_1, t_2, \ldots$, образующие непрерывный ряд. Если изменение a выбрано в t_2, то оно, очевидно, не удовлетворит условию W, поскольку число изменений в каждом конечном t_i конечно. Пусть любое изменение a, выбранное в t_n, не удовлетворяет условию W. Но в таком случае этому условию не будет удовлетворять и любое изменение в t_{n+1}, поскольку сумма чисел изменений в t_1, $t_{n+1} \ldots$, конечна. Отсюда следует: изменение a, выбранное в любом t_i, не удовлетворяет условию W, т. е.

$$\vdash (\forall t^2) \neg Et^2(a \downarrow W),$$

где t^2 — переменная для интервалов времени после t^1. Отсюда имеем:

$$\vdash \sim (\exists t^2) Et^2(a \downarrow W),$$

$$\vdash \sim ((\exists t^1)(\exists t^2)(Et^1(b) \wedge Et^2(a \downarrow W) \wedge (a > \alpha b))$$

и, наконец,

$$\vdash \sim E(\{a \downarrow W, b, \alpha\}).$$

Обращаем внимание на то, что полученный результат означает утверждение: «Неверно, что существует бесконечно протяженный временной интервал», но не утверждение «Не существует бесконечно протяженный временной интервал». Поскольку

$$\sim P(d) \dashv\vdash \neg P(d) \vee ? P(d),$$

получим

$$\vdash \sim E(\{a \downarrow W, b, \alpha\}) \vee ? E(\{a \downarrow W, b, \alpha\}),$$

т. е. не существует бесконечно протяженный временной интервал или нельзя установить, существует он или нет.

Обратимся теперь к пространственным интервалам. Чтобы судить о существовании бесконечно протяженного пространственного интервала $\{a, b, \alpha\}$, надо выбрать эмпирическое тело b, существующее во время t в некоторой области пространства s^1, и другое эмпирическое тело a в другой области пространства такое, что $a > \alpha b$. Но при этом присоединяется условие W: между a и b должен помещаться непрерывный бесконечный ряд эмпирических тел, каждое из которых имеет длину больше нуля, и длина эта постоянна в t (если длина тела меняется, то в силу требования непрерывности промежуточного ряда пустоты должны заполняться, а излишние длины выталкиваться, так что изменение тел роли не играет). Разобьем все пространство, превосходящее b, на конечные интервалы $s_1, s_2, \ldots$, образующие непрерывный ряд. Рассуждением, аналогичным приведенному выше для времени, можно убедиться, что тела a, удовлетворяющего условию W, нет ни в одном из $s_1, s_2, \ldots$. Так что имеем

$$\vdash (\forall s^2) \neg E s^2 t(a \downarrow W),$$

где s^2 есть переменная для s_i. Отсюда имеем:

$$\vdash \sim (\exists s^2) E s^2 t(a \downarrow W),$$

$$\vdash \sim ((\exists s^1)(\exists s^2)((E s^1 t(b) \wedge E s^2(a \downarrow W) \wedge (a > \alpha b))).$$

Таким образом, при условии W буквально немыслим (просто не может быть назван, приведен в качестве примера) ни один интервал с бесконечной протяженностью: назвав одну границу интервала при условии W мы не можем назвать его вторую границу в том смысле, что не можем выбрать эмпирический индивид (тело или изменение), бесконечно удаленный от данного выбранного индивида.

Как уже отмечалось, иллюзия того, что мыслим бесконечно протяженный интервал, возникает за счет возможности произвольно конструировать языковые выражения и приписывать им любые свойства.

Так и в данном случае можно сказать: «Возьмем индивид a, бесконечно удаленный от данного индивида b». Мы уже говорили, что от этого выражение «индивид a» не становится индивидуальным термином, обозначающим эмпирически существующий индивид. Приведем один любопытный пример того, к каким последствиям ведет смешение этого выражения с индивидуальным термином. Пусть мы выбрали индивид b. Возьмем ряд A такой:

1) он имеет начальный элемент, соприкасающийся с b относительно α;

2) он не имеет конечного элемента, т. е.

(1) $(\forall c)(\exists d)((c \in A) \wedge (d \in A) \rightarrow (d > \alpha c))$;

3) всякий индивид, превосходящий по порядку b относительно α, есть элемент A, т. е.

(2) $(\forall c)((c \in \alpha b) \rightarrow (c \in A))$.

И далее мы заявим следующее: возьмем индивид a такой, что $a > \alpha b$, и при этом все элементы A находятся между a и b, т. е.

(3) $(\forall c)((c \in A) \rightarrow (a > \alpha c) \wedge (c > \alpha b))$.

Тем самым, как кажется, мы мыслим бесконечно протяженный интервал $\{a, b, \alpha\}$. Однако из (1) – (3) получим:

$\vdash (a > \alpha b) \rightarrow (a \in A)$,

$\vdash (a > \alpha b)$,

$\vdash (a \in A)$,

$(\forall c)((c \in A) \rightarrow (a > \alpha c)) \wedge (a \rightarrow c) \vdash ((a \in A) \rightarrow (a > \alpha a))$,

(4) $\vdash (a > \alpha a)$, что неверно. Чтобы избежать такого следствия, надо либо признать, что постулирование a не есть выбор индивида, либо признать, что между индивидами a и b не может быть заключен ряд, не имеющий конца (и начала).

§ 23. Скорость

Скорость процесса A в конечном по протяженности временном интервале $\{t^1, t^2\}$ есть число m последовательных попарно соприкасающихся изменений этого процесса в этом временном интервале.

Очевидно, что $m \geqslant 1$ Если $m = 0$, то изменения не происходят, и процесс не существует. Выражение «скорость процесса A в $\{t^1, t^2\}$ равна 0» есть лишь замена выражения «процесс A не происходит

не существует)». Сказанное есть частный случай применения правил для величин.

Величина $\{t^1, t^2\}$ больше или равна минимальной, она больше нуля, иначе процесса нет. И она конечна, иначе подсчет числа изменений процесса не заканчивается. Если процесс A сам заканчивается в $\{t^1, t^2\}$, то это очевидно. Если A бесконечен, и при этом $\{t^1, t^2\}$ бесконечен (т. е. t^2 не наступает), то число m получить нельзя, и понятие скорости теряет смысл. Так что число изменений в $\{t^1, t^2\}$, каким бы большим оно не было, всегда конечно. Другими словами: поскольку $\{t^1, t^2\}$ конечен, а на каждое изменение процесса требуется время, которое не меньше минимального и больше нуля, то класс изменений, образующих непрерывный ряд в $\{t^1, t^2\}$, является конечным. Заметим, что время, требующееся на каждое изменение, есть величина фиксированная. Оно не может изменяться, о чем уже говорилось выше.

Более узкое понятие скорости получается так:

1) выбираются однородные изменения данного процесса (т. е. изменения, относящиеся к некоторому классу B);

2) интервал $\{t^1, t^2\}$ разбивается на однородные и равные части, относящиеся к некоторому классу C;

3) в качестве скорости A рассматривается число изменений класса B за интервал времени класса C.

Наконец, выбираются стандартные единицы изменения. Но все это не меняет логическую основу дела: скорость процесса есть число изменений этого процесса за некоторое время.

Частный случай процесса есть перемещение тела (перемена места тела в пространстве). Здесь упомянутый выше класс B образуют перемещения на одинаковое расстояние. Имеются стандартные единицы расстояния, когда рассматривают величину скорости перемещения тела как частное от деления величины расстояния, пройденного телом, на величину времени, затраченного на это, то тем самым в неявной форме проделывают сказанное выше: число m одинаковых последовательных перемещений тела за время n и есть величина расстояния, пройденного телом за это время.

Из определения скорости получаются такие следствия. Скорость всякого процесса конечна. Это утверждение справедливо в силу таких соображений: на каждое изменение процесса требуется время k, которое больше нуля и не меньше минимального; оно равно или меньше n, а n/k есть конечная величина.

Скорость всякого процесса не может быть больше скорости для случая, когда на каждое изменение процесса уходит минимальное время, и изменения процесса образуют непрерывный ряд. В этом случае число m будет максимальным. Очевидно также, что если $m = 1$,

то это будет нижний предел скорости, — скорость процесса не может быть меньше $1/n$.

Полученное суждение можно записать так:

$T1.\ (\forall x)(\forall \alpha)(\exists \beta)(\beta \geqslant \alpha)$,

где x — переменная процессов, а α и β — переменные для скоростей x.

Получаются также следствия, которые мы приведем в форме для частного случая перемещения (обобщить на любые процессы это можно путем простой перефразировки).

Возьмем утверждение: для всякой скорости перемещения тел в общем — процесса) x имеется (возможна) скорость перемещения тел y такая, что $y > x$. Что означает это утверждение, если сопоставить его с определением скорости? А то, что если тело A проходит расстояние s за время t^1, то возможно такое перемещение тела B (B может быть, в частности, A), что это же расстояние s тело B пройдет за время t^2, и при этом $t^2 < t^1$. И так без конца. Значит время, затрачиваемое на прохождение s, может быть как угодно мало. Но это противоречит утверждению, согласно которому время на любое изменение не может быть меньше минимального. Значит, когда время достигает минимального, то и скорость перемещения тел будет максимальной. Утверждение, приведенное в начале абзаца, ошибочно. Правильным будет утверждение: существует такая скорость перемещения, которая больше любой скорости перемещения, — максимальная скорость. Если a и b суть индивидные переменные, а q — скорость, то

$T2.\ \vdash (\exists a)(\forall b)(a \geqslant qb)$.

Это утверждение есть следствие утверждения о существовании минимального времени, т. е.

$$\vdash (\exists \alpha)(\forall \beta)(l\alpha \leqslant l\beta) \rightarrow (\exists a)(\forall b)(a \geqslant qb).$$

Утверждение $T2$ получается из сравнения скоростей любых двух процессов x и y: берется конечное время n; за это время число изменений любого из них не может быть больше числа изменений m таких, что на каждое уходит минимальное время; так что какой бы ни была скорость другого, она не может быть больше m/n.

Утверждение о существовании скорости y, превышающей скорость x, можно представить даже так, что за одно и то же время в случае y тело продвинется дальше, чем в случае x. Однако такое понимание сводится к рассмотренному ранее: берем любой отрезок пути, пройденного телом в случае x, и сопоставляем его с тем же отрезком в случае y; получим прохождение одного и того же расстояния за разное время, причем уменьшение времени и здесь невозможно меньше минимума.

Скорость всегда относительна в таком смысле: скорость есть всегда скорость некоторого процесса, а процесс есть всегда упорядоченный относительно некоторого α ряд.

Представим себе такую ситуацию. Наблюдатель A фиксирует некоторое событие x во время t^1 в области пространства s^1, а наблюдатель B фиксирует некоторое событие y во время t^2 после t^1 в области пространства s^2 такой, что s^1 и s^2 суть разные места (в сильном смысле). Пусть t есть временной интервал между t^1 и t^2, а s — расстояние между s^1 и s^2 (относительно некоторого α). Разделив s на t, мы не получим еще тем самым величину некоторой скорости, т. е. скорости некоторого эмпирического процесса, так как здесь еще не указано, о каком именно процессе идет речь. Абстрактно можно допустить, что здесь имел место какой-то процесс W. И абстрактно же можно допустить любую величину s и любую величину t (больше нуля, конечно), так что получим, что скорость W не имеет границ (может быть как угодно большой и как угодно малой). Однако не так дело обстоит эмпирически.

Эмпирически же либо произошло перемещение тела a из s^1 (состояние x) в s^2 (состояние y), либо наблюдатель переместился из s^1 в s^2, либо наблюдатель зафиксировал x в s^1 и затем y в s^2, либо наблюдатель A сообщил наблюдателю B о том, что он зафиксировал x в s^1 в t^1, либо некто C наблюдает поведение A и B и т. п. И во всех случаях должен быть указан некоторый эмпирический процесс, для которого имеют силу рассмотренные выше положения: невозможность временных интервалов и расстояний, которые меньше минимального, и, как следствие, невозможность перемещений со скоростью, превышающей максимальную и уступающей минимальной.

В рассматриваемой абстрактной ситуации должен быть помимо всего прочего допущен такой процесс z, что x и y суть элементы этого процесса, y превосходит по временному порядку x, время на каждый элемент z не меньше минимального. И тогда получим такой результат. Если для этого z получается вывод «Скорость z во временном интервале t больше максимальной», то либо x и y не являются элементами одного и того же процесса z, либо допущены какие-то ошибки в рассуждении при получении указанного вывода.

Подчеркиваем, что у нас постоянно речь идет не о некоторой конкретной величине скорости, а о выражениях «скорость максимальна», «скорость минимальна» и т. д. и об утверждениях с этими выражениями «скорость z больше максимальной», «скорость z меньше минимальной» и т. п.

Мы можем получить еще одно интересное утверждение для скорости. Будем говорить, что тело A перемещается непрерывно во временном интервале $\{t^1, t^2, \alpha\}$ по ряду упорядоченных точек относительно β,

если и только если выполняется следующее: для любой пары времен t_1 и t_2 такой, что $t_1 \parallel \alpha t_2$, $t^1 \geqslant \alpha t_1$ и $t_2 \leqslant \alpha t^2$, тело A находится в точке s^1 в t_1 и в точке s^2 в t_2, причем $s^2 > \beta s^1$. Из самого определения следует, что за минимальное время тело A проходит расстояние не меньше минимального. А значит и за время $\{t^1, t^2, \alpha\}$ тело A проходит расстояние не меньше минимального. Если считать минимальной скоростью перемещение тела A во время $\{t^1, t^2, \alpha\}$ частное от деления величины этого времени на минимальное расстояние, проходимое за это время, то очевидно, что если тело A движется непрерывно, то скорость его не больше минимальной.

§ 24. Парадоксы Зенона

Существует мнение, что парадоксы Зенона до сих пор не разрешены. И это действительно так, ибо, разрешая «парадоксы Зенона», различные авторы под этим названием решают какие-то свои разнообразные проблемы, а не действительные парадоксы, которые либо тривиальны, либо не существуют вообще.

Здесь не представляется возможным проанализировать эти парадоксы подробно. Ограничимся лишь кратким замечанием по поводу парадокса «Ахиллес и черепаха». Парадокс формулируют так: Ахиллес и черепаха движутся в одном направлении; Ахиллес отстает от черепахи на расстояние s^1; скорость движения Ахиллеса превосходит скорость движения черепахи; когда Ахиллес пробежит расстояние s^1, черепаха за это время проползет расстояние s^2, и Ахиллес должен будет преодолеть s^2; когда Ахиллес сделает это, черепаха за это время проползет расстояние s^3, и т. д. без конца для любого s^i; отсюда делают вывод, что Ахиллес не догонит черепаху.

Однако вывод этот неправомерен: из изложенных посылок он логически никак не следует. И всякие ссылки на математику и физику при попытках разрешить парадокс лишены смысла, ибо вывод получен не по правилам логики, а на основе каких-то психологических и языковых ассоциаций. Чтобы получить вывод «Ахиллес не догонит черепаху», задуманные условия надо переформулировать так: пока черепаха не преодолела расстояние s^i, Ахиллес не должен преодолевать расстояние, превышающее si^{i-1}. Это условие можно наглядно представить себе так: Ахиллес и черепаха скреплены стержнем, который может сжиматься сколь угодно, но никогда не превращается в ноль (не исчезает). При этом условии Ахиллес действительно не догонит черепаху. Но это лишь в случае абстрактного процесса. Для эмпирического же процесса даже при указанных условиях наступает момент, когда Ахиллес вступает в соприкосновение с черепахой, — интервал между ними

достигает минимального (и «стержень» между ними становится таким, что между ними нельзя уже поместить никакой индивид). Вспомним также о том, что сокращение интервала между Ахиллесом и черепахой происходит «скачками», и если им при этом ничто не препятствует, интервал может быть сокращен до минимального.

§ 25. Кванты пространства, времени или движения

Выше (§ 22) мы уже говорили о том, что «сближение» a и b в случае интервала $\{a, b, \alpha\}$ или выбор интервала $\{c, d, \alpha\}$, который меньше $\{a, b, \alpha\}$, совершается скачкообразно. Это означает, вообще говоря, что если два интервала x и y различны по протяженности, то разница их величин не может быть меньше некоторой минимальной величины, т. е. минимальной протяженности некоторого индивида. Соответственно, если два индивида x и y имеют различные протяженности, разность их не может быть меньше минимальной.

Таким образом, если упорядочить все тела и расстояния по длинам, то получится иерархия длин таких, что для каждой пары из них x и y будет иметь место: либо $x = y$, либо одна из x и y больше другой на минимальную длину. Аналогично для продолжительностей существования индивидов и временных интервалов.

Таким образом, пространство и время имеют в некотором роде квантовую природу, но не в том смысле, что они буквально состоят из квантов пространства и времени, а в том смысле, что предметы по пространственной и временной протяженности различаются в конечном счете скачкообразно, квантами.

§ 26. Относительность движения

Говоря об относительности движения, надо различать два различных вопроса:

1) фиксирование пространственных положений тела относительно некоторого способа установления пространственного положения тел;

2) сравнение движения различных тел.

В первом случае в способе установления пространственного положения тел предполагается некоторое тело, относительно которого фиксируется положение тела и ряд положений во времени, позволяющий говорить о перемещении тела. При этом возможны различные способы. Например, перемещение тела A по окружности можно фиксировать относительно центра окружности B против часовой стрелки или относительно тела C, расположенного на окружности, по часовой стрелке. Во втором случае движение каждого тела должно быть взято с тем способом

установления пространственного порядка, относительно которого оно фиксируется независимо от движений других тел. Если это условие не выполнено, бессмысленно говорить о сравнительном движении различных тел. Таким образом, логически корректно говорить о том, как движется одно тело A относительно другого тела B, надо сравнивать движение A относительно некоторого способа x и движение B относительно некоторого способа y.

Возьмем выражение «тело A приближается к телу B». Кажется очевидным, что из него логически следует выражение «тело B приближается к телу A». Однако эта видимость ошибочна. Чтобы более строго говорить на эту тему, надо взять выражение «тело A приближается к телу B относительно x», где x фиксирует некоторый способ установления пространственного порядка. При этом обнаруживается, что наше выражение употребляется по крайней мере в таких различных смыслах:

1) как замена совокупности выражений «тело B покоится относительно x», «расстояние между A и B относительно x сокращается»;

2) как замена совокупности выражений «тело A движется относительно x» и «расстояние между A и B относительно x сокращается»;

3) как замена выражения «расстояние между A и B относительно x сокращается».

В первом случае из выражения «тело A приближается к телу B относительно x» логически следует выражение «тело B не приближается к телу A относительно x», и, значит, не следует выражение «тело B приближается к телу A относительно x». Во втором случае из выражения «тело A приближается к телу B относительно x» логически не следует выражение «тело B приближается к телу A относительно x», хотя оно не исключается (как в первом случае). Лишь в третьем случае из выражения «тело A приближается к телу B относительно x» следует выражение «тело B приближается к телу A относительно x».

Обратимся теперь к вопросу о движении одного тела вокруг другого. Здесь надо также различать два случая:

1) движение одного тела вокруг другого, когда это другое есть точка отсчета пространственных положений тел (т. е. входит в способ установления пространственного положения тел);

2) движение одного тела вокруг другого, когда движение тел фиксируется взаимно независимо относительно какого-то способа, и ни одно из этих тел не учитывается в этом способе.

Возьмем утверждение «Солнце движется вокруг Земли» (или «Земля движется вокруг Солнца»). Это утверждение не есть утверждение типа «A движется вокруг B относительно x», хотя и кажется на первый взгляд таковым. На самом деле здесь Земля играет роль точки отсчета

пространственного положения Солнца (или, соответственно, Солнце есть точка отсчета пространственного положения Земли). Способ фиксирования пространственного положения Солнца относительно Земли при этом есть x (он общеизвестен, и мы о нем говорить не будем), а Земли относительно Солнца есть y. При этом мы имеем дело с утверждением «Солнце движется так-то относительно x», или, соответственно, «Земля движется так-то относительно y». Никакой логической связи между ними нет, т. е. из одного из них не следует как само другое, так и отрицание другого. Никакого логического противоречия между ними нет.

Иначе обстоит дело в том случае, когда рассматривается сравнительное движение двух тел A и B при том условии, когда движение каждого из них фиксируется независимо от фиксирования движения другого относительно некоторого способа x. Очевидно, при этом как A, так и B не входят в x. В отношении Солнца и Земли здесь должен быть дан какой-то способ x, не содержащий ссылки на Солнце и Землю как на точки отсчета пространственного положения тел.

Возьмем, далее, выражение «тело A движется вокруг тела B относительно x». Разумеется, при этом предполагается некоторый временной интервал. Но ради упрощения записи мы ссылку на него будем опускать, поскольку он во всех выражениях один и тот же. Возможны различные экспликации этого выражения, и в частности, — такая.

Пусть $\alpha^1, \alpha^2, \ldots$ суть последовательные положения тела в пространстве относительно x во время соответственно $t^1, t^2, \ldots$ во временном интервале t. Пространственной областью нахождения A относительно x в t будем называть область пространства такую, что все $\alpha^1, \alpha^2, \ldots$ суть либо граничные точки этой области пространства, либо находятся внутри нее (относительно x). Аналогично для B ($\beta^1, \beta^2, \ldots$ суть положения B относительно x во время $t^1, t^2, \ldots$ в t). Пусть V есть пространственная область нахождения A относительно x в t, а W — нахождения B относительно того же x, в то же время t. Будем говорить, что тело A движется вокруг тела B относительно x в t, если и только если W находится внутри V, и для любого α^i и любого β^j найдется такое α^k, что β^j находится между α^i и α^k относительно x. В случае других экспликаций определяющая часть данного выражения так или иначе должна получаться как следствие. Частный случай приведенной экспликации таков: тело A движется вокруг тела B относительно x, если и только если траектория A относительно x есть линия, такая что B находится внутри ее относительно x.

Согласно определению выражения «находится внутри» из приведенного выше определения получается следствие: если W находится внутри V, то V не находится внутри W относительно того же x в то

же самое время. А из него следует: если A движется вокруг B относительно x в t, то B не движется вокруг A относительно того же x в то же время t.

При этом не исключается то, что B может двигаться вокруг A относительно другого способа, допустим — y (то, что это возможно в другое время, очевидно). Проделаем теперь такую операцию: определим выражение «тело a движется вокруг тела b относительно z», где a и b — переменные для терминов любых тел. Определим так: тело a движется вокруг тела b относительно z, если и только если найдется какой-то способ фиксирования пространственного положения тел c такой, что a движется вокруг b относительно c (где c — переменная для способов установления пространственного положения тел). Поскольку A и B суть индивиды из области значения a и b, а x и y — из области значения c, то получим в результате: 1) A движется вокруг B относительно x, значит A движется вокруг B относительно z; 2) B движется вокруг A относительно y, значит B движется вокруг A относительно z. Таким образом, A и B движутся друг вокруг друга относительно одного и того же z.

Однако по правилам определения языковых выражений мы определили не выражение z само по себе, а выражение «тело a движется вокруг тела b» как целое. И вне этого целого z никакого смысла не имеет. Выражение z не есть обобщение x и y, хотя и кажется таким. Так что выражения «тело A движется вокруг B относительно z» и «тело B движется вокруг A относительно z» ошибочно истолковывать так, будто A и B движутся друг вокруг друга относительно одного и того же способа установления пространственного порядка. Первое из них означает, что A движется вокруг B относительно какого-то способа установления пространственного порядка, а второе означает, что B движется вокруг A относительно какого-то другого способа. Но из этого не следует, что этот способ один и тот же в обоих случаях.

Примем, далее, определение $Д1$: Тело a непрерывно удаляется от тела b относительно α во временном интервале t со скоростью v, если и только если для любых двух моментов времени x и y в t имеет силу следующее: если y позже x, то $[ab\alpha y] = [ab\alpha x] + v \cdot [xy]$, где $[ab\alpha y]$ и $[ab\alpha x]$ суть величины интервала между a и b относительно α в y и, соответственно, в x, $[xy]$ есть величина интервала времени между x и y.

Из $Д1$ следует утверждение X^1: если $[ab\alpha z] = [ba\alpha z]$, где z есть любой из моментов времени в t, и a удаляется от b относительно α в t со скоростью v, то b удаляется от a относительно α в t с той же скоростью v. Но из $Д1$ не следует утверждение X^2: если a удаляется от b относительно α в t со скоростью v, то b удаляется от a относительно α со скоростью v. Это утверждение X^2 является внелогическим.

Если принять утверждение $X^3 : [ab\alpha z] = [ba\alpha z]$, то X^2 будет логическим следствием из X^1 и X^3. Утверждение X^2 также является внелогическим. Оно не всегда верно. Например, оно не всегда верно для случая, когда расстояние между a и b определяется движением по окружности по часовой стрелке, причем отсчет начинается с того предмета, который назван первым.

Из $Д1$, далее, следует утверждение $У^1$: если $[ab\alpha z] + [bc\alpha z] = [ac\alpha z]$, a удаляется от b относительно α в t со скоростью v^1, а b удаляется от c относительно α в t со скоростью v^2, то a удаляется от c относительно α в t со скоростью $v^1 + v^2$. Но из $Д1$ не следует утверждение $У^2$: если a удаляется от b относительно α в t со скоростью v^1, а b удаляется от c относительно α в t со скоростью v^2, то a удаляется от c относительно α в t со скоростью $v^1 + v^2$. Утверждение $У^2$ является внелогическим.

Если принять утверждение $У^3 : [ab\alpha z] + [bc\alpha z] = [ac\alpha z]$, то $У^2$ будет логическим следствием $У^1$ и $У^3$, т. е. правило сложения скоростей $У^2$ будет следствием правила сложения расстояний $У^3$. Утверждение $У^3$ также является внелогическим и не всегда верно. Так, оно неверно для точек a, b, c на окружности, расположенных в указанном порядке, если отсчет расстояний вести указанным выше методом.

Примем, далее, определение $Д2$: Тело a непрерывно удаляется от тела b относительно α во временном интервале t со скоростью v, если и только если для любых моментов времени x и y в интервале t имеет силу следующее: если c тождественен b по порядку относительно α в x, и при этом c покоится относительно α, то $[ac\alpha y] = [ab\alpha x] + v \cdot [xy]$. Очевидно, случай $Д2$ является более общим, чем $Д1$.

Теперь можно рассматривать такие случаи:

1) a удаляется от места b со скоростью v^1, b удаляется от c со скоростью v^2;

2) a удаляется от b со скоростью v^1, b удаляется от места c со скоростью v^2;

3) a удаляется от места b со скоростью v^1, b удаляется от места c со скоростью v^2.

В частности, можно чисто логически установить, что в случае 1 тело a удаляется от b со скоростью $v^1 - v^2$. Очевидно, логически невозможно, чтобы v^2 была больше v^1.

Рассмотренные случаи весьма характерны. Утверждения X^2, X^3, Y^2, Y^3 кажутся логически очевидными, а утверждение существования максимальной скорости кажется чисто физическим допущением. На самом деле первые не являются логически истинными, а вторые есть логическое следствие определенных языковых выражений в рам-

ках логики. Такое расхождение между кажущимся и реальным статусом утверждений не есть исключение из правила, в чем мы имели возможность убедиться.

Имеются логические границы для принятия допущений типа X^2, X^3, Y^2, Y^3. Так, если принятие Y^2 или Y^3 имеет следствием утверждение Z: «Скорость $v^1 + v^2$ больше максимальной», то имеет место по крайней мере одна из трех возможностей:

1) неверно, что a удаляется от b со скоростью v^1;
2) неверно, что b удаляется от c со скоростью v^2;
3) неверны Y^2 и Y^3 для данных тел.

Одним словом, физический факт, указанный в Z, невозможен логически и, следовательно, невозможен фактически.

§ 27. О существовании и перемещении скоплений

Для скоплений эмпирических тел возможны по крайней мере четыре различные предиката существования E^1, E^2, E^3, E^4, определяемые имплицитно такими утверждениями (A есть индивидуальный термин скопления, a есть переменная для терминов эмпирических индивидов, b есть переменная для терминов заданных классов, c есть переменная для терминов скоплений):

1) $E^1(A) \dashv\vdash (\forall a)E(a \downarrow (a \in A))$;
2) $\neg E^1(A) \dashv\vdash (\exists a) \neg E(a \downarrow (a \in A))$;
3) $E^2(A) \dashv\vdash (\forall b)(\exists a)E((a \downarrow (a \in b) \wedge (a \in A)))$;
4) $\neg E^2(A) \dashv\vdash (\exists b)(\forall a) \neg E((a \downarrow (a \in b) \wedge (a \in A)))$;
5) $E^3(A) \dashv\vdash (\exists c)(E^1(c) \wedge (c \subset A))$;
6) $\neg E^3(A) \dashv\vdash (\forall c)(\neg E^1(c) \wedge (c \subset A))$;
7) $E^4(A) \dashv\vdash (\exists c)(E^2(c) \wedge (c \subset A))$;
8) $\neg E^4(A) \dashv\vdash (\forall c)(\neg E^2(c) \wedge (c \subset A))$.

Длительность существования A в смысле E^1 равна наименьшей из длительностей существования тел, входящих в A. Согласно (3) и (4) допускается, что A существует в смысле E^2, хотя какие-то входящие в него тела заменяются телами того же рода. В этом смысле продолжительность существования скопления может превышать продолжительность существования его элементов. Согласно (5–8) продолжительность существования скопления определяется продолжительностью существования какой-то его части. Например, человек существует в смысле (3) и (4), хотя отдельные клетки его тела постоянно заменяются новыми, и существует в смысле (5–8) после ампутации ноги.

Если длительность существования элементов скопления близка к минимальной, то время существования скопления и его элементов совпадут. Так что к таким скоплениям неприменимы понятия генезиса, эволюции, развития и т. п., ибо они возникают и уничтожаются «сразу» со всеми их элементами, причем — независимо от того, какие связи и отношения имеют место между элементами скопления. Очевидно также, что бессмысленно говорить о причинных и других эмпирических связях между элементами таких скоплений.

Пусть, далее, b^1 есть положение тела a во время t^1 относительно α, а b^2 — положение A во время t^2 после t^1 относительно α. Говоря о расстоянии, на которое переместилось тело a относительно α во временном интервале $\{t^1, t^2\}$, мы будем иметь в виду пространственный интервал $\{b^1, b^2, \alpha\}$.

Если речь идет о скоплении тел, то необходимо принять особое соглашение о том, что считать расстоянием, на которое переместилось это скопление. Здесь уместно такое определение: расстоянием, на которое переместилось скопление A относительно α за время t, считается наименьшее из расстояний, на которые переместились относительно α за время t тела, входящие в A. Из этого следует: скорость перемещения A равна наименьшей из скоростей перемещения тел, входящих в A. Если размеры элементов A и расстояния между ними близки к минимальным, то скорость перемещения A равна скорости перемещения его элементов. В тех случаях, когда скорости движения тел различимы, практически принимаются соглашения определять расстояние, на которое переместилось A, и скорость перемещения лишь по некоторому скоплению В такому, что $B \subset A$ (например, рассматривая передвижение дивизии, не принимают во внимание отдельных отставших солдат и даже целые подразделения).

§ 28. Луч

Пусть имеется тело A и на некотором расстоянии от него имеется тело B. В A или благодаря ему происходит изменение α. Вследствие этого через некоторое время в B происходит изменение β. Что происходит в это время между A и B? Логически мыслимы такие возможности:

1) от A к B перемещается какое-то тело (и α есть начало этого движения, β — конец, встреча с B);

2) происходит волновой процесс в среде между A и B;

3) какая-то комбинация из (1) и (2).

Но мыслима еще по крайней мере одна возможность, отличная от (1–3). И она в том или ином виде фигурировала при объяснении явлений

микромира, — пример в пользу тезиса, согласно которому научное творчество с языковой точки зрения реализует лишь логически мыслимые возможности и не может выйти за их пределы.

Пусть эмпирические тела или скопления эмпирических тел a^i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ принадлежат к классу a (или все суть a). Тело a^1 перемещается на некоторое расстояние x^1 относительно α (скажем, в направлении β); t_1^1 есть время начала перемещения a^1, а t_1^2 — время окончания перемещения a^1; расстояние x^1 конечно, интервал времени $\{t_1^1, t_1^2\}$ конечен; в t_1^2 тело a^1 достигает тела a^2, вступает с ним в соприкосновение и воздействует на него; $\{t_2^0, t_2^1\}$ есть интервал времени, в течение которого происходит воздействие; в результате воздействия a^1 на a^2 тело a^2 начинает перемещаться в том же направлении β (относительно того же α); тело a^2 начинает перемещение в t_2^1, оканчивает в t_2^2, перемещается на расстояние x^2, соприкасается с a^3, воздействует на него, на воздействие уходит время $\{t_3^0, t_3^1\}$ и т. д. для всех тел a^i и a^{i+1} данного класса a. Указанные перемещения и воздействия образуют непрерывный, упорядоченный во времени ряд.

Примем определение: указанный выше упорядоченный ряд H перемещений тел (скоплений тел) и воздействий будем называть эмпирическим лучом. Будем считать положение a^1 в t_1^1 началом луча, а положение a^n в t_n^2 — концом. Протяженность интервала между началом и концом луча есть протяженность луча. Интервал $\{t_1^1, t_n^2\}$ будем считать временем существования эмпирического луча. Простой случай луча — одно перемещение. Элементарный луч — луч, в котором все a^i суть эмпирические тела, не расчленяемые на части (т. е. размеры которых близки к минимальным). Возможность, о которой мы говорили в начале параграфа, есть луч.

Поскольку протяженность луча x и время существования его y конечны, то x/y (математическая или абстрактная скорость луча) есть величина конечная.

Об эмпирической скорости луча можно говорить в разных смыслах, в частности, — таких:

1) рассматривать в качестве скорости луча число однородных последовательных перемещений в $\{t_1^1, t_n^2\}$;

2) выбрать какой-то стандартный процесс в $\{t_1^1, t_n^2\}$ и его скорость рассматривать как скорость луча;

3) рассматривать $a^1, a^2, \ldots, a^n$ как один и тот же a, а перемещения их — как перемещение одного этого a; скорость такого перемещения рассматривать как скорость луча.

Если тела a^i никак не различаются, то указанный в пункте 3 способ может превратиться вообще в способ понимания данного слож-

ного явления. При этом последовательность перемещений различных тел одного класса воспринимается как перемещение одного тела. Если размеры тел и интервалы времени близки к минимальным, то условия для такой иллюзии оказываются наиболее благоприятными. Если практически невозможно установить, что a^i и a^{i+1} суть разные тела, то в понимании луча как перемещения одного a нельзя обнаружить никакой ошибки. Если a^i суть скопления тел, размеры которых и расстояния которых близки к минимальным, то в указанных условиях к сказанному присоединяется то, что a^i воспринимается не как скопление тел, а как одно элементарное тело. Добавим к этому соединение двух и более лучей в одно сложное явление. Так что ничего логически удивительного не будет в том, что такое явление будет обнаруживать свойства, которые кажутся необычными сравнительно со случаями явного перемещения одного тела.

Обращаем внимание на то, что в определении луча не требуется определения волны и корпускулы (см. ниже). Это — иная точка зрения на эмпирические тела и их перемещения. Соответствующие наблюдаемые явления могут быть описаны в разной терминологии, причем не исключена возможность, что эти описания будут эквивалентны с какой-то точки зрения.

§ 29. Мир в целом

Мир (Вселенная) есть скопление эмпирических индивидов, в которое включаются все эмпирические индивиды, т. е. если x есть переменная для эмпирических индивидов, то

$$\vdash (\forall x)(x \in \text{Мир}).$$

Из определения следует, что Мир есть эмпирический индивид. Из определения также следует единственность Мира в смысле такого утверждения

$$\vdash (\forall x)(\forall y)((x \rightharpoonup \text{Мир}) \wedge (y \rightharpoonup \text{Мир})) \rightarrow (x \rightleftharpoons y)),$$

где x и y суть индивидные переменные (т. е. если x есть Мир и y есть Мир, то термины x и y тождественны по значению или x и y суть один и тот же индивид).

Из определения также следует:

$$\vdash E(\text{Мир}) \equiv (\exists x)E(x),$$

$$\vdash \neg E(\text{Мир}) \equiv (\forall x) \neg E(x),$$

т. е. Мир существует, если и только если существует хотя бы один эмпирический индивид, и Мир не существует, если и только если не существует ни один эмпирический индивид.

Мир есть скопление индивидов, и к нему (как ко всякому скоплению) применимы предикаты, определенные для скоплений. Но здесь нужно соблюдать осторожность, связанную с особенностью определения этого скопления и с двусмысленностью языковых выражений со словами «возникает», «бесконечен» и т. п.

Возьмем выражение «Мир не возник во времени» (или «Мир не имеет начала во времени», «Мир вечен в прошлом» и т. п.). Оно двусмысленно. Во-первых, его можно понимать как отрицание утверждения «Мир возник во времени», которое есть сокращение для

$$\neg E(\text{Мир}) \Rightarrow E(\text{Мир})$$

и в котором Мир берется просто как эмпирический индивид. Но чтобы принять или отвергнуть такое утверждение, необходимо иметь точку отсчета времени — некоторое эмпирическое событие a, иметь метки времени — эмпирические события $b^1, b^2, \ldots$, иметь возможность наблюдать состояние $\downarrow \neg E(\text{Мир})$, причем индивиды a, $b^1, b^2, \ldots$ не должны включаться в Мир. *А* это исключено по определению. Если же a, $b^1, b^2, \ldots$ включаются в Мир, то из определений и из $E(a)$, $E(b^1)$, $E(b^2), \ldots$ получим, что $E(\text{Мир})$, т. е. состояние $\downarrow \neg E(\text{Мир})$ невозможно наблюдать в принципе. Таким образом, в рассматриваемом смысле наше утверждение неопределенно, т. е. неверно, что «Мир возник», и неверно, что «Мир не возник».

Таким образом, мы имеем нечто противоположное кантовским антиномиям: отрицание обоих противоположных суждений. Но здесь это не ведет к противоречию, поскольку имеется третья возможность — неопределенность.

Второй смысл рассматриваемого утверждения заключается в следующем. Мир рассматривается как процесс, т. е. как ряд различных состояний во времени. При этом наше утверждение означает, что этот ряд не имеет начального элемента, т. е.

$$(\forall x)(\exists y)(x > \alpha y),$$

где x и y суть переменные для состояний Мира, а α —способ упорядочивания их во времени относительно некоторого события, принадлежащего к Миру (здесь это не запрещается).

Оставляя без внимания вопрос о том, можно или нет проверить это утверждение практически, с чисто логической точки зрения оно осмысленно и не вступает в конфликт с принятыми определениями. В частности, из того, что Мир не имеет начала во времени (во втором смысле), не следует невозможность его существования.

Аналогично нельзя принять и отвергнуть утверждение о том, что Мир не перемещается в пространстве, если рассматривать просто Мир

как индивид, так как невозможны тела, относительно которых фиксируются перемещение или покой Мира и которые не включались бы в Мир.

Правила предицирования для субъектов с выражениями «Мир в пространстве» и «Мир во времени» одинаковы с правилами для субъектов с выражениями «пространство» и «время». Так что практически эти выражения употребляются как синонимы. Эксплицировать их можно разными способами, в частности — так.

Мир актуально (потенциально) конечен в пространстве относительно класса способов установления пространственного порядка A, если и только если $(\forall x)(\exists a)(\forall b)((x \in A) \rightarrow (a \geqslant xb))$, где a и b суть переменные для эмпирических индивидов, а x — для способов пространственного порядка (соответственно $(\forall x)(Ma)(\forall b)\ ((x \in A) \rightarrow (a \geqslant xb))$. Мир актуально (потенциально) бесконечен в пространстве относительно A, если и только если $(\forall x)(\forall a)(\exists b)((x \in A) \rightarrow (b > xa))$ (соответственно $(\forall x)(\forall a)(Mb)((x \in A) \rightarrow (b > xa))$). Логически не исключено, что для некоторого A Мир не конечен и не бесконечен. Мир конечен (бесконечен) во времени в прошлом относительно β, если и только если $(\exists x)(\forall y)(x \leqslant \beta y)$, (соответственно $(\forall x)(\exists y)(y < \beta x)$), где β есть способ установления временного порядка, а x и y суть переменные для эмпирических изменений. Мир конечен (бесконечен) во времени в будущем относительно β, если и только если $(Mx)(\forall y)(y \leqslant \beta x)$ (соответственно $(\forall x)(My)(y > \beta x)$). Выражения «Мир потенциально конечен (бесконечен) в прошлом» и «Мир актуально конечен (бесконечен) в будущем» лишены смысла.

Общим для всех возможных экспликаций рассматриваемых утверждений является то, что они не являются логически истинными и логически ложными, — они независимы от положений логики и логически выполнимы. Логически невыполнимы лишь их противоречивые комбинации.

Из определений, приведенных выше, следует, что утверждение «Мир является конечным и не является бесконечным в пространстве относительно некоторого A» логически выполнимо.

Эквивалентными приведенным выше определениям являются такие:

1) Мир экзистенциально (потенциально) конечен в пространстве относительно A, если и только если существует (возможна) такая пространственная структура B, что любая другая пространственная структура C есть собственная подструктура B относительно A;

2) Мир экзистенциально (потенциально) бесконечен в пространстве относительно A, если и только если для всякой пространственной структуры B существует (возможна) пространственная структура C такая, что B есть собственная подструктура C относительно A.

Эквивалентными этим определениям являются такие, которые получаются из (1) и (2) путем замены в определяющей части выражений после слов «структура B» такими выражениями:

1) что любой эмпирический индивид находится внутри B относительно A или есть граничная точка B;

2) существует (возможен) эмпирический индивид, который не находится внутри B относительно A и не есть граничная точка B.

Бесконечность и конечность Мира в пространстве можно определить через движение тела. Но эти определения будут более узкими. Кроме того, они требуют еще целой системы терминов, которых в нашем распоряжении здесь еще нет, т. е. они логически более сложны.

Конечность и бесконечность пространства и времени имеют определяющую часть такую же, как и конечность и бесконечность Мира в пространстве и времени. И в этом смысле выражения «пространство (время) конечно (бесконечно)» тождественны соответственно выражениям «Мир конечен (бесконечен) в пространстве (во времени)».

§ 30. Эмпирическая геометрия

Примем следующие сокращения:

1) ЭТ — эмпирическая точка;
2) ЭЛ — эмпирическая линия;
3) ЭП — эмпирическая поверхность;
4) ТЭ — эмпирическое тело.

*Д*1. Определение эмпирической точки: ЭТ есть эмпирический индивид, имеющий минимальную пространственную протяженность относительно любого способа установления пространственного порядка.

Всякая ЭТ имеет протяженность. Эта протяженность больше нуля, но минимальная (самая маленькая). Какие конкретно предметы можно считать ЭТ, есть вопрос практического соглашения, зависящего от обстоятельств внелогического характера (подобно тому, как в самом допущении материальных точек в физике не содержится указания на то, какие именно физические тела можно считать материальными точками).

В *Д*1 определен термин «ЭТ». И хотя в определяющей части фигурирует ссылка на способы установления пространственного порядка, для употребления самого термина «ЭТ» это значения не имеет: здесь эти способы безразличны. И в этом смысле можно сказать, что ЭТ нольмерна.

В дальнейшем буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ будем употреблять как обозначения каких-то классов способов установления пространственного порядка.

Точно также будут предполагаться любые (или безразлично какие) классы такого рода. Но здесь безразличие к конкретности этих классов будет иным, поскольку эти символы будут фигурировать в определяемой и определяющей частях определений.

*Д*2. Определение эмпирической линии:

1) ЭТ есть ЭЛ относительно α;

2) упорядоченный относительно α непрерывный ряд ЭТ есть ЭЛ относительно α;

3) нечто есть ЭЛ относительно α только в силу (1) и (2).

Всякая ЭТ есть ЭЛ относительно любого способа установления пространственного порядка, но не всякая ЭЛ есть ЭТ, что очевидно, например, в случае упорядоченного ряда из двух и более ЭТ. Из *Д*2 следует, что если две ЭТ в данной ЭЛ являются соседними, то они соприкасаются.

Обращаем внимание на следующее важное обстоятельство: в *Д*1 определено выражение ЭТ, а в *Д*2 — выражение «ЭЛ относительно α». Это дополнение «относительно α» появляется здесь вследствие того, что в пункте (2) определения *Д*2 речь идет об упорядоченном ряде ЭТ, что предполагает заданный класс способов установления порядка. И в этом смысле ЭЛ одномерна.

*Д*3. Длина ЭЛ есть число ЭТ, входящих в нее.

*Д*4. ЭЛ a есть отрезок ЭЛ b, если и только если каждая ЭТ, входящая в a, есть ЭТ, входящая в b.

*Д*5. Расстояние между ЭТ a и b относительно α есть число ЭТ между a и b на ЭЛ относительно α, содержащей a и b.

*Д*6. Кратчайшая ЭЛ между ЭТ a и ЭТ b есть такая ЭЛ между a и b, которая не длиннее всех других возможных между a и b ЭЛ.

*Д*7. ЭЛ A есть прямая ЭЛ, если и только если для любых несоседних двух ее точек a и b имеет силу следующее: отрезок ЭЛ A между a и b есть кратчайшая ЭЛ между a и b.

*Д*8. Кратчайшее расстояние между двумя ЭТ есть длина кратчайшей ЭЛ между ними или минимально (ЭТ соприкасаются).

*Д*9. ЭЛ A прилегает к ЭЛ B относительно β, если и только если каждая точка A соприкасается по крайней мере с одной точкой B относительно β.

*Д*10. ЭЛ A и B суть прилегающие ЭЛ, если и только если A прилегает к B или B прилегает к A (или и то, и другое).

*Д*11. Две ЭЛ различны, если и только если по крайней мере одна ЭТ не является у них общей.

*Д*12. Определение эмпирической поверхности:

1) ЭЛ относительно α есть ЭП относительно пары классов (α, β) способов установления пространственного порядка;

2) упорядоченный относительно β непрерывный ряд прилегающих ЭЛ, каждая из которых есть ЭЛ относительно α, есть ЭП относительно (α, β);

3) нечто есть ЭП относительно (α, β) только в силу (1) и (2).

Всякая ЭЛ есть ЭП, но не наоборот. В определении *Д*12 определяется не выражение «ЭП», а выражение «ЭП относительно (α, β)». Добавление β связано с тем, что предполагается не только упорядоченность ЭТ в ЭЛ, но и упорядоченность ЭЛ в ЭП. И в этом смысле ЭП двухмерна.

*Д*13. ЭП A прилегает к ЭП B относительно γ, если и только если каждая ЭТ, входящая в A, соприкасается по крайней мере с одной ЭТ, входящей в B, относительно γ.

*Д*14. Две ЭП A и B суть прилегающие относительно γ ЭП, если и только если A прилегает к B или B прилегает к A относительно γ.

*Д*15. ЭЛ лежит на ЭП, если и только если все ЭТ этой ЭЛ суть ЭТ этой ЭП.

*Д*16. Площадь ЭП есть число ЭТ, входящих в нее.

*Д*17. Плоскость есть ЭП такая, что кратчайшая ЭЛ между любыми двумя ее ЭТ лежит на этой ЭП.

*Д*18. Определение эмпирического тела:

1) ЭП относительно (α, β) есть ТЭ относительно тройки (α, β, γ) способов установления пространственного порядка;

2) упорядоченный относительно γ непрерывный ряд прилегающих относительно γ ЭП относительно (α, β) есть ТЭ относительно (α, β, γ);

3) нечто есть ТЭ относительно (α, β, γ) лишь в силу 1 и 2.

Как видим, «ТЭ» определяется как «ТЭ относительно (α, β, γ)», т. е. относительно трех классов способов установления пространственного порядка. Здесь γ добавляется потому, что рассматривается упорядоченный относительно γ ряд ЭП, которые сами уже двухмерны. И в этом смысле ТЭ трехмерно. Всякая ЭП есть ТЭ, но не наоборот.

*Д*19. Два ТЭ суть прилегающие относительно δ ТЭ, если и только если одна ЭП одного из них прилегает к какой-либо ЭП другого относительно δ.

Рассмотрим теперь упорядоченный относительно δ непрерывный ряд прилегающих относительно δ ТЭ относительно (α, β, γ). Поскольку на классы способов установления порядка α, β, γ никаких ограничений не наложено, то вместо них можно взять α^*, β^*, γ^*, представляющие соответственно объединения каждого из α, β, γ с δ. В таком слу-

чае рассматриваемый ряд ТЭ будет ТЭ относительно $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$, т. е. также будет ТЭ независимо от числа членов этого ряда. И четырехместность логически сводится к трехместности. Аналогично сводится к трехместности пятимерность (через четырехместность), шестиместность и т. д., — вообще $(n+1)$-мерность сводится к n-мерности и в конечном счете к трехмерности.

Аналогичное сведение ТЭ к ЭП, ЭП к ЭЛ, ЭЛ к ЭТ невозможно потому, что согласно определениям не всякое ТЭ есть ЭП, не всякая ЭП есть ЭЛ, не всякая ЭЛ есть ЭТ.

В основе смутной уверенности людей в том, что Мир является трехмерным в пространстве, лежат неявные соглашения относительно смысла упомянутых языковых выражений. Свои собственные соглашения люди воспринимают как принудительную силу самого Мира. Слова господствуют над сознанием людей в гораздо большей степени, чем это принято думать.

Возьмем две ЭЛ A и B. Пусть ЭТ a принадлежит A и B. Пусть ЭТ b входит в A, предшествует a и соприкасается с ней. Пусть ЭТ c входит в A, следует за a и соприкасается с ней. Таким образом, a находится между b и c. Примем определение:

*Д*20. ЭЛ A и B пересекаются в ЭТ a, если и только если выполнено указанное выше условие, и при этом b и c не входят в B.

Можно показать, что ЭТ, входящие в B и соседние с a, также не входят в A.

*Д*21. Две ЭЛ пересекаются, если и только если они пересекаются в какой-то ЭТ.

Пусть, далее, a и b есть любая пара ЭТ таких, что:

1) они обе входят в ЭЛ A;

2) они соприкасаются;

3) b превосходит по порядку a (т. е. следует за ней; способ отсчета порядка предполагается, конечно). Аналогично пусть c и d есть любая пара ЭТ таких, что: 1) обе входят в ЭЛ B; 2) соприкасаются;

4) d превосходит по порядку c (относительно того же способа).

*Д*22. ЭЛ A и B параллельны, если и только если кратчайшее расстояние между a и c равно кратчайшему расстоянию между b и d.

*Т*1. Имеет силу такая теорема о параллельных: если ЭЛ A и B параллельны, то они не пересекаются.

Доказательство теоремы о параллельных. Пусть A и B параллельны и пересекаются в ЭТ a^1. Берем a^1 как ЭТ, входящую в A. Берем ЭТ b^1, входящую в B и соприкасающуюся с a^1. Кратчайшее расстояние между a^1 и b^1 минимально. Берем далее, ЭТ a^2, которая входит в A, следует за a^1 и соприкасается с a^1. Берем ЭТ b^2, которая входит в B,

следует за b^1 и соприкасается с b^1. Кратчайшее расстояние между b^2 и a^2 равно таковому между b^1 и a^1, т. е. минимально. Следовательно, b^2 и a^2 соприкасаются. Но это означает, что относительно какого-то способа b^2 превосходит по порядку a^2, b^1 превосходит a^1. Возьмем теперь ЭТ a_1, предшествующую a^1 на A, и b_1, предшествующую a^1 на B. Расстояние между ними не меньше минимального, ибо они не совпадают (по определению пересечения). Следовательно, найдется какой-то способ, относительно которого a_1 превосходит b_1 или b_1 превосходит a_1 по порядку. Но для a^1 это не выполняется, так как для любого способа a^1 не превосходит a^1 по порядку. Таким образом, A и B не параллельны, и наше допущение ошибочно.

Вопрос о соотношении эвклидовой и неэвклидовой геометрий и об отношении их к эмпирической геометрии мы решаем путем введения понятия квазипараллельных линий, отличного от понятия параллельных. По крайней мере в одном случае квазипараллельные параллельны. Это — когда они суть прямые на плоскости. В общем же случае из того, что линии квазипараллельны, не следует, что они параллельны, и, следовательно, не следует, что они не пересекаются. Возможность их пересечения не исключается. Рассмотрим в этой связи один простейший (но самый характерный с идейной точки зрения) случай.

*Д*23. ЭЛ A есть квазипрямая на ЭП W, если и только если для любых двух ее несоседних точек a и b имеет силу следующее: отрезок ЭЛ A между a и b короче всех прочих отрезков ЭЛ между a и b, входящих в эту ЭП.

Пусть A и B суть обе квазипрямые на ЭП W, имеющие только одну общую ЭТ. Пусть эта ЭТ есть a. Пусть c и d суть любые ЭТ, принадлежащие к B и такие, что a превосходит по порядку c, а d превосходит по порядку a, т. е. a лежит между c и d. Пусть e есть любая ЭТ, принадлежащая A.

*Д*24. Будем называть A перпендикуляром к B на ЭП W, если и только если выполняется следующее: если отрезки B между c и a и между d и a равны, то равны отрезки квазипрямых на ЭП W между e и c и между e и d.

К этому простейшему случаю можно свести все прочие случаи определения перпендикуляра.

*Д*25. Две ЭЛ A и B на ЭП W будем называть квазипараллельными на ЭП W, если и только если любой перпендикуляр к одной из них на ЭП W есть перпендикуляр к другой из них на той же ЭП W.

Пусть C^1 и C^2 суть перпендикуляры к квазипрямым A и B на ЭП W. Пусть (a^1b^1) и (a^2b^2) суть отрезки этих перпендикуляров та-

кие, что a^1 и a^2 суть ЭТ, принадлежащие к A, а b^1 и b^2 — к B. Из того, что A и B квазипараллельны на ЭП W, не следует, что отрезки (a^1b^1) и (a^2b^2) равны. Не следует также и то, что равны кратчайшие расстояния между a^1 и b^1 и между a^2 и b^2. Если даже допустить, что отрезки (a^1b^1) и (a^2b^2) равны, из этого не следует, что A и B не пересекаются. Возьмем, например, параллельные прямые A и B на плоскости W и изогнем плоскость так, чтобы A и B пересеклись в точке a. Поверхность перестанет быть плоскостью, но останется поверхностью W. Линии A и B останутся квазипараллельными. Упомянутые отрезки останутся равными.

Одним словом, если осуществить достаточно строго логическую экспликацию языковых выражений, то обнаружится многосмысленность слова «параллельные». С устранением этой многосмысленности исчезает и мистика, порожденная философией в связи с неевклидовой геометрией. Эмпирическая геометрия есть логическое средство такой экспликации понятий.

*Д*26. Эмпирическая фигура (ЭФ):

1) ЭЛ есть ЭФ;
2) скопление попарно пересекающихся ЭЛ есть ЭФ;
3) нечто есть ЭФ лишь в силу (1) и (2).

Дальнейшие определения касаются конкретных видов ЭФ и их свойств. Мы ограничимся далее лишь двумя замечаниями, дающими некоторые перспективные пояснения на этот счет.

Возьмем две прямые A и B, лежащие на одной и той же плоскости. Пусть они пересекаются в одной и только одной точке a (a есть единственная общая их точка). Пусть a есть начальная точка как A, так и B. Такие две линии A и B образуют ЭФ, называемую углом между прямыми на плоскости. Величины таких углов до какого-то установленного соглашением предела можно определять числом $n^0 + n^1 + \ldots + n^m$, где n^0 есть число точек A, соприкасающихся с точками B, n^1 — число точек A, отстоящих от ближайших точек B на одну точку, ..., n^m — число точек A, отстоящих от ближайших точек B на точек m. Величины прочих углов можно определять как суммы указанных выше чисел.

В изложенной геометрии все конечные линии соизмеримы. Например, диагональ квадрата всегда имеет конечную длину, выражаемую целым числом (т. е. числом точек, которые уже не делятся на части). Так что это число не есть число $a\sqrt{2}$, где a есть длина стороны квадрата. Это имеет место лишь в математической (абстрактной) геометрии. Здесь это число есть $a\alpha$, где $\alpha = f(a)$ и тип f подбирается в зависимости от обстоятельств так, чтобы $a\alpha$ было целым числом в пределах от a до $a\sqrt{2}$. Если число точек в a равно двум, то $\alpha = 1$. Если число

точек в a бесконечно, то $\alpha = \sqrt{2}$. Но такой квадрат из ЭЛ не существует эмпирически. Ничего противоестественного в сказанном нет. Если, например, в качестве ЭТ рассматривать элементарные частицы физики, то длины ЭЛ, входящих в ЭФ, будут выражены в таких гигантских числах, что математические неточности эмпирической геометрии не будут играть никакой практической роли.

Эмпирическая геометрия существенно отличается от абстрактной (математической) геометрии. Но они не вступают в конфликт, поскольку отношение их регулируется особыми правилами интерпретации абстрактных объектов, фигурирующих в математической геометрии. В частности, математические точки на математической линии нельзя интерпретировать как ЭТ на ЭЛ, поскольку конечный отрезок математической линии содержит бесконечное число точек, а конечный отрезок ЭЛ содержит конечное число ЭТ. Здесь правомерна лишь такая интерпретация: каждой точке математической линии может быть поставлена в соответствие по крайней мере одна точка материальной линии. При этом не исключено, что разным математическим точкам ставится в соответствие одна и та же ЭТ, а одной математической точке ставятся в соответствие две соседние ЭТ.

§ 31. Эмпирические связи

Высказывания, субъекты которых суть термины эмпирических предметов и которые не являются логически истинными и логически неистинными, суть эмпирические высказывания. Если x есть эмпирические высказывания, то предмет, обозначаемый термином sx, есть эмпирическое состояние. Связь эмпирических состояний есть эмпирическая связь.

Пусть x есть высказывание о связи состояний a и b, y — о связи a и c, z — о связи c и b. Связь a и b будем называть опосредованной во времени (в пространстве) относительно α, если и только если найдется такое состояние c, что

$$\vdash (y \wedge z \rightarrow x),$$

и при этом c находится между a и b относительно α. Состояние c есть посредник связи a и b. Определение неопосредованной связи получается из приведенного путем записи отрицания перед словом «найдется».

Очевидно, если временной (пространственный) интервал между a и b равен минимальному относительно α, то связь a и b является неопосредованной во времени (в пространстве) относительно α. Так что процесс нахождения посредников не является бесконечным.

Процесс нахождения посредников не бесконечен и в случае изменения способа установления порядка. Пусть время между a и b равно t.

Найдя посредника c между a и b, мы можем найти посредника между c и a лишь при условии, если время между ними больше минимального. Это время меньше t. Поскольку t конечно, а уменьшение его при нахождении посредников происходит скачкообразно, то, продолжая процесс, мы придем к интервалу, который уже не может быть уменьшен.

Процесс нахождения посредников $c^1, \ldots, c^n$ между a и b имеет принципиальный предел такой, что $a, c^1, \ldots, c^n, b$ образуют непрерывный ряд относительно α.

§ 32. Предикаты тенденций

В языковой практике часто встречаются предикаты, знание логических свойств которых важно для анализа высказываний о связях, — предикаты тенденций. Поясним на примерах, о чем идет речь.

Пусть наблюдается беспорядочное движение большого числа частиц a в некоторой области пространства b. При этом замечается, что время от времени какие-то частицы a образуют некоторые регулярные («правильные», упорядоченные) скопления. Эти скопления недолговечны и не охватывают все частицы, так что нельзя сказать, будто происходит упорядочивание частиц a в области b. Говорят нечто более «слабое», а именно — что имеет место некоторая тенденция к упорядочиванию.

Другой пример. Мы ожидаем (по опыту и по всем данным) повышения температуры в области a. И она действительно повышается, но не так быстро и не так высоко, как мы ожидали. Предполагается при этом, что какое-то обстоятельство препятствует повышению температуры или даже способствует понижению. В таком случае говорят, что имеется тенденция к понижению температуры в a (хотя температура на самом деле повышается).

Случаи и условия употребления таких предикатов тенденций разнообразны. Здесь возможно и происходит на самом деле измерение степени тенденций, в частности, говорят о сильной, умеренной, слабой, ярко выраженной, едва заметной и т. п. тенденции. Мы констатируем существование таких предикатов как факт и рассмотрим их некоторые свойства.

Введем особый терминообразующий оператор тенденции t. Примем такое правило: если P есть предикат, то tP есть предикат. Примем также утверждение:

$$\vdash P(a) \to tP(a).$$

Из него следует:

$$\vdash \sim tP(a) \to \sim P(a).$$

Для любого предиката P имеет силу закон противоречия

$$\vdash \sim (P(a) \wedge \sim P(a)),$$

а утверждение $P(a) \wedge \sim P(a)$ не может быть истинно (логически неистинно, противоречиво). Но утверждение

$$\vdash \sim (tP(a) \wedge \sim P(a))$$

не есть правило *логики*, а утверждение

$$tP(a) \wedge \sim P(a)$$

логически выполнимо (может быть истинным). Например, конъюнкция утверждений «Неверно, что температура a увеличивается» и «Температура a имеет тенденцию к увеличению» может быть истинной.

Интересно также отметить, что признаки P и Q могут исключать друг друга, т. е. может быть верно

$$P(a) \rightarrow \sim Q(a).$$

а признаки tP и tQ нет. Если P и Q исключают друг друга, то $P(a) \wedge Q(a)$ есть противоречие. Но $tP(a) \wedge tQ(a)$ может быть истинным. Так что одному и тому же предмету в одно и то же время могут быть присущи взаимоисключающие (и в том числе — противоположные) тенденции. Так, величина некоторого предмета a может одновременно иметь тенденцию к увеличению и к уменьшению. И в этом нет никакого логического противоречия. Тело a может одновременно иметь тенденцию двигаться в направлении b и тенденцию двигаться в другом направлении c. Причем утверждения «a движется в направлении b» и «a движется в направлении c» могут оба оказаться неистинными, так как тело a движется в третьем направлении d. Так что возможны такие ситуации, когда истинно

$$\sim P^1(a) \wedge \sim P^2(a) \wedge P^3(a) \wedge tP^1(a) \wedge tP^2(a)$$

и другие более сложные случаи, дающие богатый материал для разного рода словесных манипуляций.

Если высказывание x таково, что

$$x \rightarrow (tP(a) \rightarrow Q(a)),$$

то sx есть условие реализации тенденции P, а Q есть реализация tP. Причем Q не всегда совпадает с P. И даже возможны случаи, когда они несовместимы, т. е. $\sim (P(a) \wedge Q(a))$

Пусть A есть высказывание о том, что имеет место (существует) тенденция T некоторого предмета. Из сравнения состояний этого предмета в некоторое время и в другое время после этого можно получить

высказывания B и C о том, что проявление тенденции T усиливается или, соответственно, ослабляется. Если $X \to A$, то $\downarrow X$ называется состоянием, порождающим T. Если $Y \to B$, то $\downarrow Y$ называется состоянием, способствующим проявлению T. Если $Z \to C$, то $\downarrow Z$ называется состоянием, препятствующим проявлению T. Реальное состояние предмета обусловливается совместным действием состояний, порождающих тенденции, а также способствующих и препятствующих проявлению этих тенденций. И во избежание недоразумений в таких случаях нужна достаточно разнообразная и четко дифференцированная терминология, чтобы учесть всевозможные варианты и различия языковых ситуаций.

§ 33. Парадоксы связей

Встречаются высказывания,

1) $x \to (Ra)z$,
2) $y \to (Ra)v$,

которые на первый взгляд обладают следующим свойством. По правилам логики из них получается

3) $x \wedge y \to (Ra)(z \wedge v)$,

но при этом высказывание $x \wedge y$ может быть истинным, а $z \wedge v$ нет, т. е. истинно $\sim (z \wedge v)$. Например, (1) есть «Если к телу A приложить силу B, то A сдвинется в направлении C на расстояние α», а (2) есть «Если к телу A приложить силу D, то A сдвинется в направлении E на расстояние β»; к телу A можно проложить одновременно силу B и силу D, но одновременно сдвинуться в направлении C и E (например, вправо и влево) тело не может. Сложившаяся ситуация воспринимается как парадоксальная (один из вариантов парадоксов связей).

Ничего парадоксального, однако, в рассмотренной ситуации не останется, если восстановить достаточно полную логическую ее картину. На самом деле в формулировке (1), (2) и (3) опущено указание на условия, при которых они принимаются как истинные. Причем эти условия различны. Пусть ω^1 суть условия для (1), ω^2 — условия для (2), ω^3 — условия для (3). Условия ω^1 могут включать в себя $\sim y$ или такое z, из которого следует $\sim y$, т. е. $\omega^1 \to \sim y$. Условия ω^2 могут предполагать $\sim x$, т. е. $\omega^2 \to \sim x$. Например, ω^1 предполагает, что к A не прилагается сила D, ω^2 предполагает, что к A не прилагается сила B. Возьмем простейший случай: ω^1 есть $\omega^3 \wedge \sim y$; ω^2 есть $\omega^1 \wedge \sim x$.

Наличие ω^3 во всех трех ω^1, ω^2 и ω^3 необходимо для того, чтобы было возможно рассуждение. В таком случае мы имеем:

1) $x \wedge \sim y \rightarrow (Ra)z$;
2) $\sim x \wedge y \rightarrow (Ra)v$;
3) $x \wedge \sim y \wedge \sim x \wedge y \rightarrow (Ra)(z \wedge v)$

(при условии для всех трех). Но $x \wedge \sim y \wedge \sim x \wedge y$ есть противоречие, и парадоксальность (3) исчезает. Теперь, чтобы установить, какое следствие будет вытекать из $x \wedge y$ (в частности, какое положение займет тело A, если к нему сразу приложить силы B и D), необходимо либо дополнительное эмпирическое исследование, дающее,

4) $x \wedge y \rightarrow (Ra)\omega$,

либо особое правило оперирования с z и v, позволяющее дедуктивно получить ω (например, правило параллелограмма сил).

Разрешением парадоксальности рассматриваемой ситуации является употребление предикатов тенденций. Например, вместо выражения «если к телу A приложить силу B, то A сдвинется в направлении C на расстояние α (при условии, что никакие другие силы не действуют на A)» употребляется более краткое «если к телу A приложить силу B, то A будет иметь тенденцию двигаться в направлении C на расстояние α». В этом случае какие бы силы ни действовали на A и куда бы оно ни сдвинулось, наше высказывание будет фиксировать не фактическое положение дел, а долю участия силы B в нем. При этом наши высказывания примут вид

1) $x \rightarrow (Ra)z^*$;
2) $y \rightarrow (Ra)v^*$,

где в z^* и v^* говорится не о реальных положениях, а о тенденциях. В таком случае будет верно

3) $x \wedge y \rightarrow (Ra)(z^* \wedge v^*)$,

поскольку $z^* \wedge v^*$ не есть противоречие. Наличие противоположных тенденций не есть логическое противоречие. Как реализуется тенденции z^* и v^* совместно, должен установить опять-таки опыт или специально выработанное на основе опыта правило.

Другой вариант парадокса связей получается при рассмотрении воздействия одного предмета на другой через различные посредники (по различным «каналам») в случаях, когда результат воздействия через один из посредников исключает результат воздействия через другой.

§ 34. Условные предикаты

Некоторые предикаты обладают свойствами, которые легко объяснимы, если их рассматривать как предикаты, вводимые такими определениями:

1) $P(a) \equiv Df \cdot (x \to (Rx)Q(a))$,

где x есть некоторое высказывание, координированное с $Q(a)$ так, что

2) $\vdash Q(a) \to x$.

Например, предикат «растворим в воде» можно представить как предикат, определяемый по такой схеме: «a растворим в воде» $\equiv Df \cdot$ «Если a поместить в сосуд с водой, то a растворяется в воде». Здесь высказывание «a растворяется в воде» истинно при этом условии, что a помещен в сосуд с водой. Так что если оно истинно, то истинно «a помещен в сосуд с водой».

Обычно такие предикаты P вводятся как словесные модификации Q, и их незначительные внешние различия дают базу для смешения терминов. Мы введем особый оператор условности c для таких предикатов. Правило построения терминов с ним: если Q есть предикат, то cQ есть предикат

Рассматриваемые предикаты имеют свойства, сходные с предикатами тенденций. Так, высказывания $x \to (Rx)$, $Q(a)$ и $\sim x$ совместимы, так что может быть истинно

3) $(x \to (Rx)Q(a)) \wedge \sim x$.

Заменяем по определению (1) первое на $cQ(a)$. Получим

4) $cQ(a) \wedge \sim x$.

Но согласно (2) имеем

5) $\vdash \sim x \to \sim Q(a)$.

Из (4) и (5) имеем

6) $cQ(a) \wedge \sim Q(a)$.

Так что если истинно (3), то истинно и (6).

Но если предикаты Q^1 и Q^2 исключают друг друга, то несовместимы и предикаты Q^1 и cQ^2. Если

$$Q^1(a) \to \sim Q^2(a),$$

то получим:

$$(x \to (Rx)Q^1(a)) \to (x \to (Rx) \sim Q^2(a)),$$

$$cQ^1(a) \to \sim cQ^2(a).$$

§ 35. Воздействие

Связи различаются, в свою очередь, по логическим типам. Рассмотрим некоторые из них (наиболее важные с известной точки зрения).

Пусть α есть,

$$P^1(a) \Rightarrow P^2(a),$$

а β есть

$$Q^1(a) \Rightarrow Q^2(a),$$

Будем говорить, что a оказывает воздействие или воздействует на b (a b испытывает воздействие a), если и только если,

$$\alpha \rightarrow (Ra)\beta,$$

где R есть временное отношение «после этого», а интервал времени между $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$ конечен. Это отношение транзитивно. Временное отношение $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$, иначе говоря, таково, что,

$$\downarrow \beta > t \downarrow \alpha,$$

где t есть способ установления временного порядка, $a >$ читается как «позже» или «после этого». Будем также говорить, что β есть результат воздействия α.

Пусть γ^i есть

$$T^{i1}(c^i) \Rightarrow T^{i2}(c^i),$$

где c^i есть индивидная переменная ($i = 1, 2, \dots$). Воздействие a на b будем называть непосредственным относительно класса A, если и только если,

$$(\neg \exists c^i)((c^i \in A) \wedge (\alpha \rightarrow (R\alpha)\gamma^i) \wedge (\gamma^i \rightarrow (R\gamma^i)\beta)),$$

и опосредованным, если и только если.

$$(\exists c^1) \dots (\exists c^n)((c^1 \in A) \wedge \dots \wedge (c^n \in A)) \wedge$$
$$\wedge (\alpha \rightarrow (R\alpha)\gamma^1) \wedge \dots \wedge (\gamma^n \rightarrow (R\gamma^n)\beta))).$$

Индивиды $c^1, \dots, c^n$ суть посредники воздействия a на b. В случае $n \geqslant 1$ будем $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ называть механизмом воздействия a на b.

Имеются случаи, для которых воздействие a на b непосредственно и очевидно. Для других случаев оно осуществляется через посредников и выясняется путем нахождения последних. Из изложенного выше можно вывести некоторые общелогические следствия для таких случаев.

Очевидно, события $\downarrow \alpha$, $\downarrow \gamma^1, \dots, \downarrow \gamma^n$, $\downarrow \beta$ образуют упорядоченный во времени ряд. Если этот ряд непрерывен (т. е. все его соседние

события соприкасаются во времени), то число $\downarrow \gamma^1, \ldots, \downarrow \gamma^n$ конечно. В самом деле, интервал времени между $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$ (обозначим t) конечен, длительность всех событий $\downarrow \gamma^1, \ldots, \downarrow \gamma^n$ и интервалов между $\downarrow \alpha, \downarrow \gamma^1, \ldots, \downarrow \gamma^n, \downarrow \beta$ не меньше некоторого минимума, так что в t может разместиться лишь конечное число событий.

И только в случае абстрактных событии, для которых допускаются сколь угодно малая длительность и сколь угодно малые интервалы между событиями, наше утверждение неверно: для них если ряд событий между $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$ непрерывен, то число событий, опосредствующих их и образующих механизм воздействия, бесконечно.

Таким образом, если $\alpha \rightarrow (R\alpha)\beta$, и мы хотим полностью восстановить механизм воздействия a на b, то мы должны отыскать множество $\downarrow \gamma^1, \ldots, \downarrow \gamma^n$ таких, как указано выше, причем это множество конечно, а ряд $\downarrow \alpha, \downarrow \gamma^1, \ldots, \downarrow \gamma^n, \downarrow \beta$ непрерывен во времени. Таким образом, процесс этот не бесконечен, он оканчивается, что соответствует практике познания.

Но воздействие a на b можно рассматривать как цепь событий в пространстве. Иллюзия, будто с этой точки зрения процесс отыскания посредников бесконечен, возникает за счет неопределенности терминов и задачи.

Как бы ни были расположены пространственные области, в которых происходят события, последние так или иначе должны быть выбраны как события, образующие временной ряд между $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$. А при этом вступает в силу следующее обстоятельство. Сумма длительностей событий между $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$ и интервалов между ними не должна превышать интервала t, а это означает число посредствующих событий конечно (как выше). Если же эта сумма превышает t, значит выбран ряд событий такой, в котором a не воздействует на b, скажем — ряд, попадающий мимо цели.

Обращаем внимание на то, что мы не рассматриваем воздействие a на b как перемещение некоторого эмпирического тела c, и существование максимальной скорости перемещения здесь совершенно ни при чем (а обычно именно на это ссылаются, говоря о существовании событий, не связанных эмпирически, в частности — причинно). Воздействие a на b посредством перемещения c есть частный случай. И для этого случая действительно верно такое рассуждение: если изменение b есть следствие того, что c от a достигает b, и только этого обстоятельства, то время между $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$ не должно быть меньше времени, которое требуется для c на преодоление расстояния между a и b.

Скорость распространения воздействия a на b в пространстве равна частному от деления расстояния между областями пространства, в которых происходят $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$, на t. А здесь получить такой же

логический эффект, как для скорости перемещения при имеющихся у нас предпосылках, нельзя.

Вопрос о том, в какой мере возможно в рамках логики рассмотреть проблемы, касающиеся эффекта воздействия данного события $\downarrow \alpha$ на окружающие предметы, распространения этого воздействия, затухание его и т. д., мы здесь не затрагиваем. Но думается, что при более тщательном (чем у нас) анализе здесь кое-что сделать возможно. Во всяком случае это довольно любопытное дело.

Рассмотрим, далее, понятие взаимодействия. При этом имеется в виду то, что a воздействует на b, а b — на a. Однако в такой формулировке не видны некоторые важные логические детали.

Если $\downarrow \alpha$ и $\downarrow \beta$ суть индивидуальные события, то

$$(\alpha \rightarrow (R\alpha)\beta) \vdash \sim(\beta \rightarrow (R(\beta)\alpha),$$

поскольку $s\alpha$ неповторимо (на прошлое воздействовать нельзя). Если b обратно воздействует на a, то имеет место,

$$\beta \rightarrow (R\beta)\alpha^*,$$

где α^* есть,

$$P^3(a) \Rightarrow P^4(a),$$

причем α^* происходит после $\downarrow \beta$, а значит (в силу транзитивности R) и после $\downarrow \alpha$. Иллюзия одновременного воздействия a на b и b на a, в котором имеет место то же самое воздействие, создается за счет употребления общих терминов событий. Например, возьмем утверждение «Увеличение a ведет к увеличению b, а увеличение b, в свою очередь, ведет к увеличению a в то же самое время». Здесь «Увеличение a» есть общий термин такой, что как α, так и α^* могут быть частными его случаями; выражение «увеличение b» может означать β как результат воздействия a на b и некоторое β^*, которое есть изменение b, исходящее из иного источника.

Выше мы рассмотрели простой случай воздействия предмета a на предмет b. Сложный случай есть соединение простых по такой схеме: пусть $\alpha^1 \Rightarrow \alpha^2$, $\alpha^2 \Rightarrow \alpha^3, \ldots, \alpha^n \Rightarrow \alpha^{n+1}, \ldots$ есть последовательная смена состояний a, а $\beta^1 \Rightarrow \beta^2$, $\beta^2 \Rightarrow \beta^3, \ldots, \beta^n \Rightarrow \beta^{n+1}, \ldots$ — последовательная смена состояний b, причем вторая есть результат воздействия первой; каждому состоянию β^s соответствует состояние α^s. По определению состояние β^s наступает после того, как наступило состояние α^s. Интервал времени между ними не меньше минимального. Так что имеют силу следующие принципы «запаздывания» (которые являются, однако, чисто логическими):

1) результат воздействия a на b обнаруживается не сразу;

2) если изменения a прекращаются, то еще некоторое время после этого продолжается изменение b, являющееся результатом воздействия a.

Используя введенные термины, можно осуществить экспликацию терминов сил, масс и т. п. Пусть a и b суть индивидные переменные, Q — предикат некоторого изменения или некоторой тенденции изменения, P — предикат, выбираемый специально для введения рассматриваемых выражений. Термины сил можно ввести как сокращения для выражений $a \downarrow (\exists b)(x \wedge y \wedge P(b))$, где x есть высказывание «a воздействует на b», а y есть высказываний «$sQ(b)$ есть следствие sx». В зависимости от вида P и Q определяется вид силы (например, P может быть вес тела, а Q — сдвиг тела на какое-то расстояние). Выражение «к b приложена сила α» будет при этом сокращением для $(\exists a)(x \wedge y \wedge P(b))$. Таким образом, сила есть предмет, который определенным образом воздействует на другой предмет, обладающий некоторым заданным признаком. Термины масс эксплицируются по схеме: выражение «a имеет массу α» есть сокращение для выражения «если к a приложить силу β, то $P(a)$; если же к a сила β не приложена (в том числе — если ее величина меньше β), то $\neg P(a)$». От вида P зависит вид массы и ее величина.

Воздействие a на b длится всегда конечное время. Оно может длиться минимальное время (минимальное воздействие) и быть непрерывным во времени рядом таких минимальных воздействий. Результатом воздействия всегда является изменение каких-то индивидов, входящих в b как в скопление, — смещение в пространстве, распад, возникновение и т. п. Воздействия c этой точки зрения различаются по скорости соответствующих процессов (например, перемещение c минимальной или максимальной скоростью). Все это — возможные направления разработки соответствующей терминологии.

Предикаты прерывности и непрерывности для воздействия определяются иначе, чем для рассмотренных ранее логических типов предметов:

1) Энка индивидов $(a^1, \ldots, a^n)$ (где $n \geqslant 1$) воздействует на b в t непрерывно, если и только если для любого интервала времени t', входящего в t (являющегося частью t), имеет силу то, что по крайней мере один из $a^1, \ldots, a^n$ воздействует на b в t', или t' минимален.

2) Энка индивидов $(a^1, \ldots, a^n)$ (где $n \geqslant 1$) воздействует на b в t прерывно, если и только если для некоторого t', входящего в t, имеет силу то, что ни один из $a^1, \ldots, a^n$ не воздействует на b в t', и t' больше минимального.

§ 36. Причина

Выражение «a есть причина b» употребляется во многих различных смыслах, например, в таких:

1) «a есть причина b» $\dashv\vdash$ «Если не-a, то не-b; наступает a; вслед за этим наступает b»;

2) «a есть причина b» $\dashv\vdash$ «Если наступает a, то вслед за этим наступает b»;

3) «a есть причина b» $\dashv\vdash$ «Если бы не было a, то не было бы b; имеет место b»;

4) «a есть причина b» $\dashv\vdash$ «a и затем b; не будь a, не было бы и b».

Кроме того, говоря о причине, имеют в виду ответ на вопросы типа «Что является причиной события (состояния и т. п.) a?» И на этот вопрос отвечают различно, в частности, так:

1) причиной состояния (явления, события) a является все то, что порождает a (что ведет к возникновению a);

2) причиной a является то, без чего не может существовать a;

3) причиной a являются те особые условия, которые отличают возникновение от возникновения других состояний, и т. п.

Ниже мы сформулируем несколько положений, относящихся к проблеме причинности или, точнее, к совокупности проблем, к которым так или иначе причастно слово «причина».

Тщетно искать некое «единственно правильное» понимание причины. Его пока просто нет. Имеются разные словоупотребления и только. Имеются различные познавательные ситуации, нуждающиеся для своего фиксирования в строгой терминологии, учитывающей упомянутые различия. Так, встречается отношение состояний такое, что

$$x \to (Rx)y,$$

и такое, что

$$x \wedge (Rx)y \wedge (\sim x \to (R \sim x) \sim y),$$

где R означает «затем», «после» и т. п. В качестве сокращения для первого можно ввести выражение

$$\downarrow xC^1 \downarrow y,$$

а в качестве сокращения для второго — выражение

$$\downarrow xC^2 \downarrow y.$$

Здесь C^1 и C^2 суть особые двухместные предикаты. И ни один из них не лучше и не хуже другого в качестве средства экспликации термина

«причина». Если уж непременно здесь нужно это слово использовать, то можно вводить какие-то ограничения типа «позитивная причина», «негативная причина», «полная причина» и т. п.

Далее, если даже принять только одно строго определенное употребление слова «причина», это еще не дает никаких гарантий в том отношении, что исследователи при установлении причин одних и тех же явлений будут находить одни и те же причины. Так, если мы приняли в качестве экспликации слова «причина» знак C^2, то это не исключает возможности построения высказываний $\downarrow xC^2 \downarrow y$ и $\downarrow zC^2 \downarrow y$ при отыскании причины $\downarrow y$. Одно другому не противоречит, и согласно определению, $\downarrow x$ в качестве причины $\downarrow y$ не лучше и не хуже, чем $\downarrow z$, и наоборот.

Можно, конечно, условиться считать причиной некоторого состояния $\downarrow y$ такое состояние, которое единственно является причиной $\downarrow y$ (т. е. никакое другое состояние, отличное от него, причиной $\downarrow y$ не является). Но это — лишь общие ни к чему не обязывающие разговоры. Одно дело — определение слова «причина» и другое дело — отыскание причин конкретных состояний. Когда в практике познания приходят к единодушному согласию считать причиной некоторого явления a определенное явление b, то это делается не в силу определения слова «причина» (никакое определение такого рода не может содержать указание на единственность причины, ибо не может дать гарантий этой единственности), а как неявное соглашение считать именно b причиной a, поскольку соотношение a и b удовлетворяет определению слова «причина» и удовлетворяет некоторым другим требованиям, не входящих в это определение (например, в некоторых само собой разумеющихся условиях наступление b всегда ведет к a, а ненаступление b не ведет к a при тех же условиях; причем другие явления не ведут к наступлению a).

Выше мы говорили о слове «причина» как о части предиката «...причина...». Но оно употребляется и как субъект, точнее — как часть субъектов типа «причина события», «причина sx», «причина того, что x» и т. п. В этой своей роли оно определяется как производное от предиката «причина» следующим образом (буквы x и y суть переменные для терминов состояний): «Причина x»$\equiv Df\cdot$ «Состояние $\downarrow y$ такое, что $\downarrow y$ есть причина $\downarrow x$» (т. е. причина некоторого состояния есть другое состояние такое, которое является его причиной). Упомянутое в предшествующем параграфе соглашение есть неявное определение такого рода, содержащее еще дополнительно элемент ограничения.

Известные индуктивные методы установления причинной связи (методы Бэкона—Милля) являются не просто способами исследования, предполагающими, что термин «причина» определен до их применения и независимо от них. Они сами суть имплицитное определение

различных случаев употребления термина «причина». Так, метод сопутствующих изменений формулируется следующим образом: если каждый раз, когда наступает событие a, вслед за этим наступает событие b, то a есть причина b. Это следует понимать не как утверждение с термином «причина», смысл которого известен и без этого утверждения, а как фрагмент имплицитного определения самого слова «причина». И методу этому, точнее, следует придать такой вид: если каждый раз вслед за наступлением a наступает b, то a будем называть причиной явления b. Это, другими словами, запишется так: «a есть причина b»$\dashv\vdash$«Если наступает a, то наступает b». Метод единственного сходства формулируется так: если случаи, когда наступает b, различаются во всем и сходны только в том, что наступлению b предшествует a, то a есть причина b. Опять-таки это есть не просто прием исследования, но фрагмент неявного определения слова «причина». Аналогично для прочих методов. Если же рассматривать упомянутые методы как приемы исследования причин, причем, что такое «причина» — известно без них, то неизбежны недоразумения, за которые эти методы многократно критиковались в истории логики и философии. К ним в таком случае предъявляли необоснованно чрезмерные претензии.

При экспликации терминов надо различать, далее, благие пожелания и реальные возможности языка. Так, мы можем поставить задачу определить причину a так, чтобы причиной a было все то, что порождает a и без чего невозможно возникновение a. Но это — лишь пожелание, и не более того (вроде пожелания о глубоком и всестороннем изучении a). Спрашивается, как теперь быть с Миром, без которого нет никакого состояния; как быть с Галактикой, без которой нет никаких событий в Солнечной системе; как быть с электронами, когда речь заходит о причинах поражения в той или иной войне и т. д. Никакие схоластические ухищрения здесь не помогут. Экспликация, адекватная приведенному пожеланию, просто невозможна практически.

Если a есть причина b, то наступление a предшествует во времени наступлению b. Временное отношение a и b есть один из признаков причинного отношения, участвующих в определении последнего. Вся терминология времени определяется и вводится в употребление независимо от термина «причина», но не наоборот.

Пусть достигнута следующая договоренность: выражение «a есть причина b в координатах c» будет высказыванием, тождественным по смыслу высказыванию «Всегда в координатах c вслед за наступлением a наступает b», где a и b суть переменные для терминов событий (или суть термины любых событий), а c суть переменная для термина координат (или любой термин координат).

Если N известно это соглашение, и он его принимает, то он принимает решение употреблять термин «причина» в смысле, устано-

вленном этим определением. Но пусть наблюдая какую-то конкретную область предметов, N пришел к выводу: «A есть причина B в координатах C», где A, B, C суть вполне конкретные термины. Знание смысла слова «причина» не гарантирует того, что этот его вывод будет истинным. Если он есть результат наблюдения большого числа случаев последовательности событий A и B во времени в координатах C, то не исключено, что однажды обнаружится такой случай: вслед за наступлением A в координатах C не наступает B. Этот случай опровергает вывод N, приведенный выше, но не отвергает определения слова «причина» и не опровергает того, что N оно известно.

Эти два аспекта — терминологический и эвристический — как правило, смешивают. Классический образец такого смешения — описание и истолкование методов Бэкона—Милля.

Представим себе теперь такую картину:

1) слово «причина» употребляется в самых различных значениях;
2) эти значения смутны и неустойчивы;
3) терминологический и эвристический аспекты его употребления смешиваются.

Так что почти все, что говорится с использованием этого слова, либо вообще бессмысленно, либо имеет весьма смутный смысл за счет конкретности контекста или ситуации, в которой оно употребляется.

В этой связи вообще следует заметить, что процесс исследования (открытий) не совпадает с операциями по установлению смысла терминологии, если эти операции осуществляются по правилам логики и на уровне логики. Терминология может рождаться и рождается в ходе исследования и остается какое-то время (часто всегда) связанной с ним. Логическая экспликация ее должна прежде всего оторвать ее от этого генетического источника и рассмотреть независимо от него. И чем крепче и тоньше эта связь, тем важней найти здесь логические различия.

Ситуация с термином «причина» весьма характерна и поучительна. В свое время и теперь для определенных целей термин «причина» в его аморфном состоянии был и является вполне пригодным (подобно тому, как термин «шизофрения» в медицине, обозначающий самые разнородные болезни, пригоден как средство предварительной или приблизительной ориентации). Но если более тщательно изучить языковые фрагменты с этим термином, то обнаружится, что для описания этих фрагментов в рамках логики требуется более строгая и дифференцированная терминология, делающая этот термин вообще излишним или закрепляющая за ним лишь одно из многочисленных его значений. Сказанное можно с полным основанием отнести вообще ко всей совокупности общих терминов методологии науки.

§ 37. Виды причинных связей

При сравнении случаев, когда употребляется выражение «$\downarrow x$ есть причина $\downarrow y$», обнаруживается следующее: в одних случаях предполагается, что из x логически не следует y, в других — не предполагается; в одних случаях предполагается, что из «$\downarrow x$ есть причина $\downarrow y$» и x следует y, в других — нет; в одних случаях предполагается, что из «$\downarrow x$ есть причина $\downarrow y$» и $\sim x$ следует $\sim y$, а в других — нет; в одних случаях предполагается транзитивность причинного отношения, а в других — нет и т. д. Так что найти в этих употреблениях какой-то «инвариант», который можно было бы изобразить как «подлинное понимание причины», есть дело совершенно бесперспективное.

Мы считаем целесообразным говорить о видах причинных отношений состояний $\downarrow x$ и $\downarrow y$, причисляя к этим видам следующие (повсюду R^1a читается как «вслед за a», «после a», а R^2a — как «до a», «перед a»):

$$x \to (R^1x)y; \qquad (y \to (R^2y)x) \wedge x \wedge (R^1x)y;$$
$$y \to (R^2y)x; \qquad (\sim x \to (R^1 \sim x) \sim y) \wedge x \wedge (R^1x)y;$$
$$\sim x \to (R^1 \sim x) \sim y; \qquad (\sim y \to (R^2 \sim y) \sim x) \wedge x \wedge (R^1x)y;$$
$$\sim y \to (R^2 \sim y) \sim x; \qquad (x \to (R^1x)y) \wedge (y \to (R^2y)x);$$
$$(x \to (R^1x)y) \wedge y; \qquad \wedge (R^2y)x$$

и т. п. Общим для них всех является наличие условного отношения высказываний, описывающих состояния, и временного отношения «вслед за этим» или «до этого». И свойства этих отношений целиком определены свойствами соответствующих высказываний (они рассмотрены во второй главе). В частности,

$$(x \to (R^1x)y) \vdash (\sim y \to (R^2 \sim y) \sim x),$$
$$(x \to (R^1x)y) \wedge (y \to (R^1y)z) \vdash (x \to (R^1x)z).$$

Если a есть причина b, то b есть следствие a (это — определение термина «следствие»).

Если $\downarrow x$ и $\downarrow y$ суть индивидуальные термины, то термин $\downarrow$ «причина» определяется для них следующим образом: «$\downarrow x$ есть причина $\downarrow y$»$\dashv\vdash (\downarrow x \to a) \wedge (\downarrow y \to b) \wedge$«$a$ есть причина b» (т. е. $\downarrow x$ есть причина $\downarrow y$, если и только если $\downarrow x$ есть a, $\downarrow y$ есть b и a есть причина b). Как видим, здесь предполагается, что термин «причина» сначала определяется для общих терминов, а затем — для индивидуальных. И в этом есть резон, поскольку для общих терминов причинное отношение

определяется через условное отношение высказываний, а последнее предполагает обобщения, в частности, то, что

$$(x \to (Rx)y) \dashv\vdash (\forall sx)(Rx)y$$

и т. д. Да и с точки зрения установления причинных отношений индивидуальных состояний $\downarrow x$ и $\downarrow y$, помимо того, что второе появляется по времени после первого, требуется еще нечто дополнительное, имеющее силу для классов состояний, элементами которых являются $\downarrow x$ и $\downarrow y$.

Этим, кстати сказать, объясняется тот факт, что большинство утверждений о причинной связи событий прошлого невозможно подтвердить и невозможно опровергнуть, поскольку для них невозможно построить истинные высказывания типа $x \to (Rx)y$. Здесь опять-таки вместо логической убедительности обычно прибегают к неявным соглашениям считать одни события причиной других, т. е. неявным образом утверждения вида «*a* причина *b*» принимают за постулаты, обставляя это свое решение всякого рода разговорами. Последние называют обоснованием принятого утверждения.

Частными случаями причинных отношений $\downarrow x$ и $\downarrow y$ являются такие, в которых так или иначе фигурирует вероятность событий. Это, например, отношения, фиксируемые высказываниями вида «Вероятность того, что sx есть причина sy, есть α (равна α, больше α и т. п.)», «Если x, то вслед за этим наступает sy с вероятностью α» и т. п.

Высказывания типа «x, и потому (по этой причине, вследствие этого) y» и «y по той причине (потому), что x», в которых x и y суть высказывания об индивидуальных эмпирических состояниях или событиях, будем называть причинными конъюнкциями и изображать сокращающими символами вида

$$x \rhd y.$$

Примеры таких высказываний: «Пароход "Титаник" потонул потому, что столкнулся с айсбергом»; «Наличие агента противника в штабе N-го соединения является причиной того, что секретные сведения о соединении становятся известными противнику».

Логическое строение причинных конъюнкций $x \rhd y$ таково:

1) высказывание x фиксирует то, что произошло (или происходит) некоторое эмпирическое событие или имело (или имеет) место некоторое эмпирическое состояние, последнее может быть, в частности, скоплением эмпирический событий (иногда — однородных) в пространстве и во времени;

2) высказывание y фиксирует другое эмпирические событие или состояние;

3) имеется еще некоторый причинный ингредиент, который позволяет сказать, что первое событие (состояние) является причиной второго.

Этот причинный ингредиент имеет различные логические формы. Он может быть выражен высказыванием «Если происходит событие (имеет место состояние) класса a, к которому относится событие (состояние) $\downarrow x$, то после этого происходит событие (имеет место, наступает и т. п. состояние) класса, к которому относится $\downarrow y$». Но это не всегда так. Иногда причинный ингредиент фиксируется высказыванием «Если бы не произошло $\downarrow x$, то не произошло бы $\downarrow y$», иногда — высказыванием «Все прочие возможные причины $\downarrow y$, кроме $\downarrow x$, отпадают» и т. п. В ряде случаев он есть результат привычных навыков или привносится за счет наблюдения последовательности событий, порождающих одно другое, и не находит никакого языкового воплощения. Одним словом, найти некий единый причинный ингредиент для z такой, чтобы можно было представить $x \rhd y$ как сокращение для $x \wedge y \wedge z$, в принципе невозможно.

Внутреннее отрицание причинных конъюнкций $x\neg \rhd y$ означает, что признается $x \wedge y$, но отвергается наличие причинного ингредиента. Внешнее отрицание $x \rhd y$ эквивалентно $\sim x \vee \sim y \vee (x\neg \rhd y)$.

Примем следующие логические правила для причинных конъюнкций, дающие имплицитное определение выражения $\rhd$ («и поэтому», «по этой причине» и т. п.):

1) $\vdash (x\neg \rhd x)$;
2) $(x \rhd y) \vdash (x \wedge y)$;
3) $(x\neg \rhd y) \vdash (x \wedge y)$;
4) $(x \rhd y) \vdash (y\neg \rhd x)$;
5) $\sim (x \rhd y) \dashv\vdash \sim x \vee \sim y \vee (x\neg \rhd y)$;
6) $(x \rhd y) \wedge (y \rhd z) \vdash (x \rhd z)$;
7) $(x \rhd y) \wedge (x \rhd z) \vdash (x \rhd y \wedge z)$;
8) $(x \rhd y) \wedge (z \rhd v) \wedge ((y \wedge v) \rhd w) \vdash ((x \wedge z) \rhd w)$;
9) $(x \rhd y) \wedge (y \to z) \vdash (x \rhd z)$;
10) $(x \to y) \wedge (y \rhd z) \vdash (x \rhd z)$;
11) $x \wedge y \wedge (\downarrow x \to \downarrow a) \wedge (\downarrow y \to \downarrow b) \wedge (a \to (Ra)b) \vdash (x \rhd y)$,

где R есть «после этого».

§ 38. Другие виды связей

В языке употребляется огромное число выражений, обозначающих эмпирические связи: «зависимость», «влияние», «неразрывно связаны», «порождение», «совместимость» и т. п. В большинстве случаев они аморфны, многосмысленны, зависят от контекста и от особенностей среды употребления и т. д. Конечно, наивно рассчитывать навести здесь строгий логический порядок. Мы лишь обратим внимание читателя на два момента:

1) анализ этих выражений обнаруживает ту или иную комбинацию высказываний типа $x \to (Rx)y$,

2) эти комбинации весьма разнообразны, их число и степень устойчивости определяются лишь соображениями практической целесообразности.

Например, совместимость предметов можно определить так: a и b совместны, если и только если всегда и везде имеет силу утверждение

$$(E(a) \leftrightarrow E(b)) \wedge (\neg E(a) \leftrightarrow \neg E(b)).$$

Совместимость признаков можно определить так: P и Q совместны, если и только если для любого предмета a имеет силу утверждение

$$(P(a) \leftrightarrow Q(b)) \wedge (\neg P(a) \leftrightarrow \neg Q(b)).$$

Часто употребляется выражение «зависимость» («зависит»). Оно многосмысленно. В частности, речь может идти о зависимости состояния от другого состояния, состояния от недифференцируемого предмета, предмета от состояния, предмета от предмета. И в каждом случае, в свою очередь, есть вариации. Например, возможны такие определения:

1) $\downarrow x$ зависит от $\downarrow y$, если и только если x при условии z и $\sim x$ при условии $z \wedge y$;

2) $\downarrow x$ зависит от $\downarrow y$, если и только если x при условии z и $\sim x$ при условии $z \wedge \sim y$.

Как видим, в определяющей части (1) фигурирует $z \wedge y$, а (2) — $z \wedge \sim y$. Кроме того, зависимость иногда понимают как воздействие, как взаимодействие, как причинную связь и другие виды связей. Наконец, о зависимости говорят в таком смысле:

1) $\downarrow x$ зависит от $\downarrow y$, если и только если $(y \to x) \vee (y \to \sim x)$;

2) a зависит от b, если и только если $(\exists P)(\exists Q)$«$\downarrow P(a)$ зависит от $\downarrow Q(b)$»,

3) комбинации случаев типа (1) и (2).

От связей-зависимостей отличаются связи-передачи. Приведем сразу одну из возможных экспликаций:

1) выражение «предмет a отдает x предмету b» есть сокращение для выражения «Если a теряет x, то b в это же время приобретает это x», где выражение «a теряет x» в свою очередь есть сокращение для выражения «$x \in a$ в t^1, и $x^{\neg} \in a$, затем в t^2», а «b приобретает x» есть сокращение для «$x^{\neg} \in b$ в t^1, и затем $x \in b$ в t^2»;

2) обмен определяется как «a отдает x предмету b, а b отдает y предмету a в то же время»;

3) выражение «a передает x от b к c» есть сокращение для выражения «b отдает x предмету a, затем a отдает x предмету c». Как видим, и в этом случае в основе лежит условная связь и порядковое отношение.

Имеют место генетические связи (порождение, превращение и т. п.), экспликация которых имеет более сложное строение. При этом, однако, надо иметь в виду, что здесь возможны выражения, которые на первый взгляд относятся к эмпирическим связям, но при экспликации теряют эту видимость. Таково, например, выражение «a произошел от b». Рассмотрим его несколько подробнее.

Выражение «a выделился из b» можно определить как

$$(\exists t^1)(\exists t^2)([(a \in b)t^1] \wedge Et^1(a) \wedge Et^1(b) \wedge \\ \wedge [(a^{\neg} \in b)t^2] \wedge Et^2(a) \wedge Et^2(b)),$$

где t^1 и t^2 суть переменные для времени. Выражение «a отделился от b» можно определить как «a выделился из скопления, образованного из a и b». Выражение «a произошел от b» для индивидуальных терминов можно определить как

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q^1(a, x) \wedge Q^2(b, x) \wedge ((y \in x) \rightarrow \\ \rightarrow (\exists z)(z \in x) \wedge R(y, z)))),$$

где x есть переменная для эмпирических рядов, $P(x)$ есть «x непрерывен», $Q^1(a, x)$ есть «a есть конец x», $Q^2(b, x)$ есть «есть начало x», y и z суть индивидные переменные. Для общих терминов это выражение определяется как

$$(\alpha \in K a) \rightarrow (\exists \beta)((\beta \in K b) \wedge T(\alpha, \beta)),$$

где α и β суть индивидные переменные, $T(\alpha, \beta)$ есть «α произошел от β». Для предикатов выражение «P произошел от Q» определяется как

$$(\exists \alpha)(\exists \beta)T(\alpha \downarrow P, \beta \downarrow Q).$$

Глава 4

Логическая методология науки

Логика и методология науки

В комплексной логике рассматриваются не только проблемы онтологии, но и методологии науки. Причем, рассматриваются в той мере, в какой они поддаются описанию и даже нуждаются для этого в средствах логики. Мы называли этот аспект и раздел логики логикой науки. Ниже мы кратко рассмотрим лишь некоторые проблемы логики науки с целью дать представление читателю об ее ориентации.

§ 1. Эмпирические и абстрактные объекты

*D*1. Объекты, которые отражаются исследователем посредством его природного (чувственного) аппарата отражения (которые воздействуют на этот аппарат — ощущаются, воспринимаются, наблюдаются и т. п. исследователем), будем называть реальными эмпирическими объектами. Вопрос о существовании таких объектов решается (в конце концов) в зависимости от возможности их наблюдения (данным исследователем или другими исследователями, свидетельствам которых он доверяет). Если на основе каких-то имеющихся данных исследователь судит о существовании какого-то объекта в прошлом или в местах, в которых он не может осуществлять наблюдение, то неявно принимается допущение: если бы исследователь смог переместиться в пространстве или во времени в соответствующее положение относительно этого объекта, то последний был бы доступен наблюдению.

Реальные эмпирические объекты не вечны, изменчивы, существуют в определенной среде, в определенной области пространства и в определенное время, являются следствиями каких-то причин и сами порождают какие-то следствия, обладают бесконечным числом различных признаков и т. п. Высказывания о них могут иметь различные значения истинности в зависимости от времени и области пространства.

*D*2. Гипотетические эмпирические объекты суть объекты, которые характеризуются следующими чертами. Сами по себе они не наблюдаются, наблюдаются последствия их воздействия на другие наблюдаемые

объекты. Существование этих объектов допускается для каких-то определенных целей. Эти объекты (как и реальные) принимаются как возникающие и исчезающие, как изменчивые и т. п. Основные принципы их допущения:

1) логическая непротиворечивость высказываний о них, отсутствие противоречий между этими высказываниями и признанными положениями данной науки;

2) разрешимость проблемы, ради исследования которой они принимаются.

Пример гипотетических эмпирических объектов — микрочастицы в физике. Возможно различать уровни или степени таких объектов.

Исследователь может принять решение в некотором акте познания не принимать во внимание некоторые признаки объектов (исключающе-негативная абстракция) или принимать во внимание только некоторые определенные признаки объектов (выделяюще-позитивная абстракция). Это решение может быть реализовано в отдельных случаях путем выбора предметной области, в которой исследуемые объекты действительно обладают указанными признаками, или путем искусственного создания ее. И в этих случаях исследуемые объекты остаются эмпирическими, взятыми лишь в определенных условиях наблюдения.

Иначе будет обстоять дело, если принимается решение отвлечься от таких признаков объектов, без которых эмпирические объекты вообще или объекты данной области исследования в частности не могут существовать. Аналогично при выделяющей абстракции, поскольку решение рассматривать только какие-то признаки означает решение не рассматривать прочие. Например, исследователь решает не принимать во внимание размеры и форму физических тел при рассмотрении их движения, считая, что эти тела не имеют пространственных размеров (суть «материальные точки»).

Реализацией этого решения является допущение особых объектов, которые являются абстрактными (или идеальными). Эти объекты не существуют эмпирически по самому характеру их допущения. И исследование их уже не будет процессом наблюдения.

Абстрактные объекты вводятся в науку следующим образом. Исходные (или первичные) абстрактные объекты вводятся путем обычных определений с дополнениями относительно исключения признаков, о которых говорилось выше. Суть этих определений можно представить схемами.

Схема 1. Принимается определение: термином s будет называться объект, который имеет признаки $P^1, \ldots, P^n$ $(n \geqslant 1)$ и не имеет признаков $Q^1, \ldots, Q^m$ $(m \geqslant 1)$. При этом признаки Q^i таковы, что эмпирический объект (вообще или в данной предметной области)

без них не существует. Если некоторый эмпирический объект имеет признаки P^j, то он имеет и признаки Q^i; если он не имеет какого-то признака из Q^i, то он не имеет и признаков P^j.

Схема 2. Принимается определение: термином s будет называться объект, который имеет признаки $P^1, \ldots, P^n$, и если из этого соглашения и других принятых в данной науке утверждений не следует, что s имеет признак Q^i, то s не имеет этого признака. При этом Q^i есть необходимый признак эмпирических объектов, т. е. если некоторый эмпирический объект имеет признаки P^j, то он обязательно имеет и признак Q^i. В данном случае объекту s приписываются только определенные признаки P^j и признаки, принадлежность которых объекту вытекает логически из принятых утверждений и определений. Этому определению точно так же можно придать вид системы аксиом, определяющей s как первичный термин.

*D*3. Объекты, обозначаемые терминами, введенными по схемам 1 и 2, называются исходными абстрактными объектами. В определении терминов исходных абстрактных объектов не входят другие термины абстрактных объектов, кроме вновь вводимых терминов.

*D*4. Исходный абстрактный объект существует, если и только если соблюдены правила определения при введении его термина, и из определения его термина и других определений и утверждений данной науки не следует логическое противоречие при условии, что эти другие определения и утверждения непротиворечивы.

*T*1. Из определений следует: исходный абстрактный объект либо существует, либо не существует, а неопределенность исключается.

Поскольку определения исходных абстрактных объектов в принципе стремятся сделать такими, чтобы выполнялись правила логики, то эти объекты всегда предполагаются существующими (точки, линии, числа и т. п. считаются данными).

*D*5. Производные абстрактные объекты суть объекты, термины которых определяются через термины исходных абстрактных объектов.

*T*2. Вопрос о существовании производных абстрактных объектов решается посредством рассуждений, т. е. посредством вывода соответствующих утверждений или их отрицаний из определений исходных абстрактных объектов или установления невозможности построения такие выводы. Здесь возможны по крайней мере три исхода: доказательство существования, доказательство несуществования и установление неразрешимости проблемы существования.

*T*3. Признаки производных абстрактных объектов выясняются также посредством рассуждений. И здесь возможны три исхода.

D6. Исходные и производные абстрактные объекты суть абстрактные объекты.

T4. Высказывания об абстрактных объектах универсальны.

Если a есть термин абстрактного объекта, а b — эмпирического, то $\sim(a \rightarrow b)$ и $\sim(b \rightarrow a)$. Отношения терминов абстрактных и эмпирических объектов устанавливаются иначе, а именно посредством операции, называемой интерпретацией.

D7. Интерпретация абстрактного объекта s^1 заключается в следующем:

1) абстрактному объекту s^1 ставится в соответствие объект s^2 (в частности, эмпирический);

2) s^2 подбирается с таким расчетом, чтобы для любого X выполнялось утверждение $X \rightarrow X(s^1/s^2)$.

D8. Абстрактный объект, имеющий интерпретацию, называется реальным абстрактным объектом, а не имеющий таковой — гипотетическим. Цель введения последних — интересы дедукции.

Совокупность определений и утверждений, содержащих термины абстрактных объектов, образуют исчисление. В настоящее время с понятием «исчисление» ассоциируют также введение специальной символики, установление точного перечня правил вывода. Но это уже касается технического совершенства исчислений.

Поскольку термины абстрактных объектов не имеют эмпирических двойников, то сами эти термины начинают рассматривать как исследуемые объекты. И в этом есть резон, ибо все определения и утверждения касаются смысла этих терминов. При таком понимании исчисления принимают характер формальных систем, а правила рассуждения выступают как операции с этими объектами. Этот шаг терминологически упрощает изложение, но вместе с тем он делает еще менее заметной связь с эмпирической основой.

§ 2. Эмпирические и точные науки

Абстрактные объекты изобретаются как средство для исследования эмпирических объектов. Однако в силу разделения труда в науке изобретение и исследование их обособляется от исследования эмпирических объектов в форме развития особых наук, часто называемых точными или дедуктивными. Интересы и потребности точных наук служили основным стимулом развития логики и в подавляющей степени определили ее содержание.

Существует огромная литература, посвященная так называемым «проблемам логики и методологии дедуктивных (или точных) наук».

Содержание этой литературы общеизвестно: теория дедукции (логического следования, вывода), теория доказательства, аксиоматический метод и другие связанные с ними вопросы логики.

Заметим, что нельзя проблематику логики абсолютно строго разделить на проблемы, относящиеся к опытным наукам, и проблемы, относящиеся к точным наукам. Однако опытное исследование (исследование эмпирических объектов) имеет ряд особенностей (сравнительно с абстрактными объектами), которые фиксируются в определенной системе понятий и утверждений логики. И в этой главе мы в основном будем рассматривать вопросы, представляющие преимущественный интерес для опытных наук.

§ 3. Эвристические допущения

При исследовании эмпирических объектов применяются допущения, называемые эвристическими. Эти допущения характеризуются такими чертами:

1) Они являются внелогическими допущениями. С логической точки зрения они выполнимы, но не являются логически истинными.

2) Они не могут быть подтверждены или опровергнуты эмпирически.

3) Они говорят о возможности или невозможности построить какие-то знания в данной области науки, но не определяют эти знания конкретно, т. е. в терминах данной науки. С этой точки зрения они не расширяют дедуктивную базу данной науки, но лишь ориентируют исследование в некотором направлении.

4) Они должны быть построены так, чтобы не получались логические противоречия по их вине.

5) Не существует никаких логических критериев предпочтения одних эвристических допущений другим, за исключением случаев, когда между ними самими возможно установить дедуктивные отношения.

Примером эвристических допущений могут служить принципы детерминизма и индетерминизма.

§ 4. Детерминизм и индетерминизм

Понятие детерминизма (и его отрицания — индетерминизма) неоднозначно. Оно употребляется по крайней мере в таких смыслах.

Под детерминизмом понимают прежде всего такой принцип: для всякого эмпирического состояния (события) имеется некоторое другое состояние, являющееся его причиной (все происходящее имеет причину или ничто не происходит без причины). Модификацией этого

принципа является следующее допущение: для всякого эмпирического состояния можно отыскать другое состояние, являющееся его причиной (для всего можно отыскать причину). Это допущение не только признает существование причин любых состояний, но и возможность их нахождения. Оно, очевидно, сильнее.

Индетерминизм, в свою очередь, понимается как отрицание приведенных выше принципов. Причем отрицание первого означает допущение состояний, не имеющих причин (беспричинных событий). Отрицание же второго означает лишь допущение того, что в некоторых случаях найти причины событий нельзя.

Детерминизм, далее, понимается как допущение, согласно которому для каждого эмпирического состояния sx имеется такое состояние $\downarrow y$, что $y \rightarrow (Ry)x$ с вероятностью 1, где R есть некоторое временное отношение. Если a и b суть переменные для высказываний об эмпирических предметах, то это допущение запишется так:

$$(\forall a)(\exists b)(b \rightarrow (Rb)a).$$

Усилением этого допущения является допущение, согласно которому для каждого эмпирического состояния sx не только имеется указанное выше состояние $\downarrow y$, но его можно и обнаружить. Отрицание же детерминизма в таком смысле понимается как допущение, согласно которому имеются случаи, когда $y \rightarrow (Ry)x$ с вероятностью 1 найти невозможно, а возможно лишь с вероятностью меньше единицы. А это — уже совершенно иной аспект дела.

Детерминизм понимается также в более узком смысле, а именно — как принцип, согласно которому, если имеются достаточно полные и точные сведения о состоянии данной области мира в данное время, то можно предсказать ее состояние в последующее время.

Физический детерминизм есть еще более узкий принцип: если известны импульсы и траектории физических тел в настоящее время, то можно предвидеть их положения в последующее время. К вопросу о таком детерминизме мы вернемся ниже.

Примем такие определения:

1) Будем говорить, что событие $\downarrow y$ детерминировано относительно класса событий A, если и только если,

$$(\exists \downarrow x)((\downarrow x \in A) \wedge \sim(\downarrow y \in A) \wedge (x \rightarrow y)),$$

где x есть переменная для высказываний.

2) Будем говорить, что $\downarrow y$ не детерминировано относительно A, если и только если

$$(\forall \downarrow x)((\downarrow x \in A) \wedge \sim(\downarrow y \in A) \rightarrow \sim(x \rightarrow y)).$$

Поскольку выражения «находятся внутри» и «находятся вне» определены, то правомерны определения:

3) События, происходящие внутри индивида a, суть внутренние для a события.

4) События, происходящие вне a, суть внешние для a события.

Если в определениях (1) и (2) класс A есть класс внутренних (внешних) для $\downarrow y$ событий, то получим определение выражений «внутренне (внешне) детерминировано не детерминировано)» (определения (5) и (6)).

Примем, наконец, такие определения:

7) Событие свободно, если и только если оно не детерминировано внешне и внутренне.

8) Событие несвободно, если и только если оно детерминировано внешне или внутренне.

9) Событие внутренне свободно (несвободно), если и только если оно внутренне не детерминировано (детерминировано).

10) Событие внешне свободно (несвободно), если и только если оно внешне не детерминировано (детерминировано).

Из определений следует, что если индивид имеет минимальные размеры, то он внутренне свободен (или невозможно событие, происходящее внутри его).

§ 5. Эвристическая онтология

Формальной онтологией мы называем совокупность утверждений об эмпирических предметах, выводимых из определений содержащихся в этих утверждениях языковых выражений. Эвристической онтологией мы называем совокупность утверждений об эмпирических предметах, которые не выводятся логически из определений языковых выражений, а принимаются как внелогические допущения или выводятся из таких допущений. Причем, утверждения эвристической онтологии формулируются в терминах логики, также как и утверждения формальной онтологии.

К числу утверждений эвристической онтологии относятся общие утверждения «Всякое качественное изменение есть следствие количественных изменений», «Природа непрерывна», «Всякие природные процессы не кончаются мгновенно (имеют некоторую инерцию)» (на этом основывается экстраполяция), «Природа не делает скачков» (на этом основывается интерполяция), «Все происходит скачкообразно», «Всякие природные процессы рано или поздно затухают (прекращаются)», «Всякий прогресс рано или поздно достигает предела», «Все объекты в природе упорядочены», «В природе господствует хаос» и т. д.

Вернемся к утверждению,

$(\forall a)(\exists b)(b < \alpha a)$,

где a и b суть переменные состояний Мира во времени. Мы рассматривали его выше не с точки зрения истинности или неистинности, а исключительно с точки зрения его логического строения. В такой же мере предметом нашего внимания может стать противоположное утверждение «Мир имеет начало во времени», которое мы в логически явной форме можем представить так:

$$(\exists a)(\forall b)(b \geqslant \alpha a).$$

Но какое из этих утверждений принимать или отвергать, это не входит в компетенцию логики. Заметим по этому поводу лишь следующее.

В связи с тем, что в первом утверждении пересмотреть все состояния Мира в прошлом невозможно, ибо по самому этому допущению число их бесконечно, а во втором утверждении нельзя указать, какое конкретное состояние Мира является начальным, для эмпирического познания совершенно безразличны оба рассматриваемых утверждения. Принятие любого из них по отдельности само по себе еще не ведет ни к какому логическому противоречию.

Аналогично обстоит дело с другими общими гипотезами о Мире: одно дело — анализ их логического строения и экспликация, другое дело — вопрос об их принятии. Возьмем такую гипотезу: «Пространство везде и всегда непусто». На языке логики ее можно эксплицировать так:

$$(\forall s)(\forall t)(\exists a)Ets(a),$$

где s — переменная пространства, t — переменная времени, a — переменная тела. Но насколько это верно — проверить невозможно. И таких гипотез имеется много: «Нет чистой длительности», т. е.

$$(\forall t)(\exists a)Et(a),$$

где a есть переменная изменений; «Если нечто возникло, то оно рано или поздно уничтожится»; «Если нечто имеет конец, то оно имеет и начало» и т. п. К числу таких гипотез относятся и гипотезы о бесконечности Мира в пространстве и во времени в будущее, об инертности природы и т. п.

Однако имеются случаи, когда логика компетентна принимать или отвергать такого рода утверждения. Это — случаи, когда те или иные утверждения или их отрицания выводятся по правилам логики из определений (явных или неявных) терминов, входящих в эти утверждения. Имеются также случаи, когда логика компетентна сказать, что то или иное утверждение неопределенно. И мы случаи такого рода рассматривали неоднократно выше. Общего критерия различения утверждений на логические (верифицируемые в логике) и внелогические

(безразличные к построениям логики) нет. Вопрос решается конкретно, применительно к каждому частному случаю. Причем здесь могут быть неожиданности и парадоксальные на первый взгляд явления. Так, мы видели, что утверждения о минимальных длинах и длительностях и максимальных скоростях суть логические утверждения, а утверждения о конечности и бесконечности Мира — внелогические, хотя, казалось бы, должно быть наоборот.

Рассмотрим несколько подробнее гипотезы о существовании начала Мира во времени и об отсутствии такого начала. На их примере сформулируем некоторые важные общелогические принципы и идеи относительно логического анализа языковых конструкций такого рода вообще.

Прежде всего запишем эти гипотезы в логически явном виде. Пусть x и y суть переменные терминов эмпирических событий, а t есть способ установления временного порядка событий. Гипотеза «Мир не имеет начала во времени» запишется так:

1) $(\forall x)(\exists y)(x > ty)$,

(т. е. для всякого события найдется другое событие, которое произошло раньше его). Гипотеза «Мир имеет начало во времени» запишется так:

2) $(\exists x)(\forall y)(x \leqslant ty)$

(т. е. имеется такое событие, что все прочие события произошли либо одновременно с ним, либо после него).

Из (1) следует $\sim$ (2), а из (2) следует $\sim$ (1). Но рассматривать одну из (1) и (2) просто как отрицание другой нельзя, так как возможен третий случай, а именно

3) $\sim(1) \wedge \sim(2)$,

т. е. случай с неопределенностями (причем здесь возможно несколько вариантов). Дабы не усложнять дело, мы не рассматриваем t как переменную и не вводим кванторы для такой переменной. Если это сделать, то число вариантов увеличится, так как придется учитывать комбинацию с $(\forall t)(1)$, $(\exists t)(1)$, $(\forall t)(2)$, $(\exists t)(2)$ и их отрицаниями. Как видим, рассматриваемые гипотезы многосмысленны не только из-за двусмысленности слова «начало» (см. выше), но и вследствие вариаций их явной записи. Мы ограничимся лишь вариантами (1), (2) и (3).

Прежде всего следует сказать, что эти гипотезы суть внелогические утверждения. Это можно показать обычными средствами логики, доказав независимость каждой из $\vdash$ (1), $\vdash$ (2) и $\vdash$ (3) от аксиом и правил вывода логики. Эти гипотезы, далее, логически выполнимы, т. е. в рамках логики недоказуемы утверждения $\vdash\sim$ (1), $\vdash\sim$ (2) и $\vdash\sim$ (3).

Принятие любой из $\vdash$ (1), $\vdash$ (2) и $\vdash$ (3) по отдельности само по себе не ведет к противоречию. И в частности, если принять $\vdash$ (1), то в полученной системе не будут доказуемы $\vdash$ (2) и $\vdash$ (3); если принять $\vdash$ (2), не будут доказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (3); если принять $\vdash$ (3), не будут доказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (2). Принятие какой-то пары из них совместно исключено правилами логики. Если из какой-то совокупности внелогических утверждений ω следует конъюнкция двух из них, то ω логически противоречива. А эмпирически проверить эти гипотезы невозможно.

Непротиворечивость системы, полученной путем присоединения $\vdash$ (1) к логике, можно доказать, найдя подходящую семантическую интерпретацию формул вида $\vdash \alpha(a > \beta b)$, где α есть какая-то (возможно, пустая) последовательность кванторов. В частности, это можно сделать так: если a и b различны, то $a > \beta b$ можно приписать значение v; если $a > \beta b$ можно приписать значение v, то $\vdash (\exists b)(a > \beta b)$ имеет значение v. Эти семантические правила не затрагивают утверждений логики. Аналогично можно доказать непротиворечивость системы, полученной путем присоединения к логике $\vdash$ (2) или $\vdash$ (3). В силу непротиворечивости таких систем в системе с $\vdash$ (1) недоказуемы $\vdash$ (2) и $\vdash$ (3); в системе с $\vdash$ (2) недоказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (3); в системе с $\vdash$ (3) недоказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (2). Так что никакого логического предпочтения ни одной из гипотез отдать нельзя. Известные кантовские антиномии, относящиеся к пространству и времени, суть просто результат плохой логической обработки терминологии, смешения различных понятий и неявных допущений.

Совершенно аналогично обстоит дело с бесконечностью Мира в пространстве. Здесь из допущения одной из трех (по крайней мере трех) взаимоисключающих возможных гипотез также не следует необходимость признания другой, и никакого логического предпочтения ни одной из них отдать нельзя.

Аналогично обстоит дело с такими гипотезами:

(1) «число индивидов любого скопления эмпирических индивидов в любое данное время конечно»;

(2) внутренне отрицание (1);

(3) конъюнкция внешний отрицаний (1) и (2).

Частный случай гипотезы (1) — гипотезы «Число эмпирических индивидов в Мире в любое данное время конечно», «Число эмпирических индивидов любого класса в любое данное время конечно».

Гипотезы «Из ничего ничто не возникает» и «Нечто не превращается в ничто» можно эксплицировать разными способами и в частности — соответственно так:

1) $(\forall a)(\exists b)((\neg E(a) \Rightarrow E(a)) \rightarrow (b \Rightarrow a)$;

2) $(\forall a)(\exists b)((E(a) \Rightarrow \neg E(a)) \rightarrow (a \Rightarrow b)$.

Из этих гипотез получаются логические следствия, например, такие:

$$(\forall a)(\exists b)((\neg E(a) \Rightarrow E(a)) \rightarrow (E(b) \Rightarrow \neg E(a)),$$

$$(\forall a)(\exists b)((\neg Et^1(a) \Rightarrow Et^2(a)) \rightarrow Et^1(b)),$$

$$(\forall a)(\exists b)((E(a) \Rightarrow \neg E(a)) \rightarrow (\neg E(b) \Rightarrow E(b)),$$

$$(\forall a)(\exists b)((Et^1(a) \Rightarrow \neg Et^2(a)) \rightarrow Et^2(b)).$$

Этот пример свидетельствует о том, что при исследовании таких гипотез возможно отыскать некоторое число таких гипотез, из которых по правилам логики выводятся (с той или иной степенью полноты) другие гипотезы. Эта выводимость возможна постольку, поскольку эти гипотезы являются действительно общими (не предполагают термины частных наук) и поддаются экспликации в рамках языка логики.

Приведенные гипотезы интересны также вот с какой точки зрения. Они имеют смысл не для любых эмпирических предметов. Возьмем, например, отношение «a тяжелее b» и уничтожим a. Это отношение a и b перестанет существовать, но оно не превращается при этом ни во что другое. Или, создав предметы a и b и установив между ними некоторое пространственное отношение R, мы создаем отношение aRb. Но указать, что именно превратилось в это отношение, затруднительно, поскольку смысл всех употребляемых здесь языковых выражений препятствует этому. А ограничение осмысленности этих гипотез некоторыми определенными логическими типами предметов есть часть имплицитного определения последних. В данном случае сказать, что рассматриваемые гипотезы имеют смысл лишь для эмпирических тел, значит в неявной форме принять в качестве части имплицитного определения эмпирического тела приведенные выше утверждения 1 и 2 с ограничением на переменные: a и b суть переменные для терминов эмпирических тел.

В какой мере возможно превращение рассматриваемых гипотез в имплицитные определения тех или иных логических типов предметов, это должен установить конкретный анализ отдельных гипотез.

Рассматриваемые гипотезы разделяются на общие, имеющие силу для любых эмпирических индивидов, и специальные, имеющие силу лишь для определенного типа эмпирических индивидов. Примеры общих гипотез уже приводились. Приведем еще несколько примеров такого рода, которые интересны и сами по себе.

$H1$. Если эмпирический индивид возник, то он исчезнет (разрушится, перестанет существовать).

$H2$. Если эмпирический индивид исчез, то он возник.

$H3$. Для каждого эмпирического тела (изменения) и всякого способа установления пространственного (временного) порядка найдется

эмпирическое тело (изменение), которое соприкасается с ним относительно этого способа.

*H*4. В Мире никогда и нигде не бывает абсолютной пустоты (т. е. во всякое время и во всякой области пространства существует некоторый эмпирический индивид).

Из *H*4 следует: если область пространства имеет минимальные размеры, то и индивид, существующий в ней, имеет минимальные размеры, так что пространство всегда сплошь заполнено эмпирическими индивидами.

*H*5. В Мире никогда и нигде не бывает абсолютного покоя (т. е. во всякое время в любой области пространства происходит эмпирическое изменение).

Из *H*5 следует: если временной интервал минимален, то и изменение происходит за минимальное время, так что время везде сплошь заполнено эмпирическими изменениями.

*H*6. Во всякое время и в любой области пространства найдутся такие эмпирические индивиды, что происходит превращение одного из них в другого.

Из *H*6 следует *H*5 (но не наоборот). Из *H*6 также следует, что нечто не превращается в ничто и из ничто не возникает нечто.

*H*7. Если эмпирический индивид имеет величину x по некоторому признаку и величину y по тому же признаку через некоторое время, которое не меньше минимального, то разность x и y не равна нулю.

Из приведенных примеров видно, что между гипотезами такого рода имеется логическая связь. Так что интересно было бы найти некоторую, по возможности малочисленную, совокупность гипотез такого рода, из которой выводятся остальные, или установить логическую невозможность такой минимизации гипотетической онтологии.

*H*8. $E(a) \to (\exists g)(\exists t)Etg(a)$

(т. е. если индивид существует, то он существует в некоторое время и в некоторой области пространства).

*H*9. $E(a) \wedge \neg Eg^1(a) \to (\exists g^2)Eg^2(a)$.

*H*10. $E(a) \wedge \neg Et^1(a) \to (\exists t^2)Et^2(a)$,

где y есть «t^1 и t^2 суть разные времена».

*H*11. $(x \to (Rx)y) \to (\exists sz)(\exists R^1)(\exists R^2)(z \to (R^1z)x) \wedge$

$$\wedge (z \to (R^2z)y) \wedge \wedge((szR^1sx) \wedge (szR^2sy) \to (sxRsy)),$$

где R^1 и R^2 суть переменные для порядковых отношений.

$H12$. Один предмет воздействует на другой порциями (прерывно),

$H13$. Взаимодействующие предметы воздействуют друг на друга поочередно.

$H14$. Предмет может воздействовать только на конечное число предметов. Причем, это число не больше некоторого максимума.

$H15$. Предмет может испытывать на себе воздействие только конечного числа предметов. Причем, это число не больше некоторого максимума.

$H16$. Происходит затухание воздействий.

$H17$. Имеются автономные ряды воздействий.

Примером специальных гипотез могут служить гипотезы, относящиеся к эмпирическим точкам. Эмпирические точки, линии, поверхности и тела суть эмпирически существующие индивиды. Они обладают какими-то свойствами, фиксируемыми внелогическими утверждениями Некоторые из утверждений такого рода формулируются полностью на языке логики (т. е. строятся из терминов, определяемых в рамках логики) и имеют гипотетический характер. Рассмотрим несколько случаев таких утверждений.

$H1$. В любое время в любой области пространства существует ЭТ (гипотеза непустоты).

Поскольку $H1$ касается также и области пространства, имеющей минимальные размеры, из $H1$ следует, что пространство всегда и везде сплошь заполнено ЭТ.

$H2$. Продолжительность существования ЭТ близка к минимальной.

$H3$. Для любых двух ЭТ найдется такой способ установления пространственного порядка, что расстояние между этими ЭТ относительно этого способа за конечное время изменяется на конечную величину.

$H4$. Если уничтожается одна ЭТ, то вследствие этого возникает по крайней мере одна другая ЭТ. И если возникает ЭТ, то это является следствием предшествующего разрушения другой ЭТ. Время между разрушением ЭТ и обусловленным этим фактом возникновением новых ЭТ близко к минимальному.

Из приведенных гипотез вытекают любопытные следствия. Например, такие:

1) всякая ЭЛ существует минимальное или близкое к минимальному время;

2) всякая ЭФ существует минимальное или близкое к минимальному время;

3) ни одна ЭТ не может вернуться в прежнее положение.

Из 3 следует невозможность для Мира вернуться в прежнее состояние. Из (1) и (2) следует, что всякая абсолютная система отсчета движений тел может существовать лишь минимальное или близкое к минимальному время. Заметим кстати, что мнение, будто такая система невозможна логически, ошибочно. В Мире существует бесконечное число абсолютных систем отсчета.

Но такая система невозможна для некоторых случаев практически в силу малости времени существования. Но она возможна практически для тех случаев, когда величины, считаемые близкими к минимальным, достаточно велики с практической точки зрения.

Наконец, рассматриваемые гипотезы разделяются на эвристически нейтральные (например, такова гипотеза бесконечности Мира в пространстве) и эвристически действенные (например, такова гипотеза, согласно которой из ничего не возникает нечто и нечто не превращается в ничто, которая в некотором роде обобщает физические принципы сохранения).

§ 6. Общие утверждения о Мире и физические допущения

Между фундаментальными допущениями физики и общими утверждениями о Мире имеет место логическая связь, которая обнаруживается лишь при условии логической экспликации содержащих их языковых выражений. Отметим важнейшие особенности этой связи.

Возьмем, например, физическое допущение A: «Тело сохраняет состояние прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока внешние силы не выведут его из этого состояния». Его частично можно эксплицировать так: «Если тело движется и на него не действует никакие силы (X), то оно движется прямолинейно и равномерно (Y), и при этом $(\forall a)(\exists b)(b > \alpha a)$», где a и b суть переменные для положений тела в пространстве, а α есть некоторый способ установления пространственного порядка. Из A логически следует утверждение B: «Если X, то $(\forall a)(\exists y)(y > \alpha a)$», где y есть переменная для эмпирических индивидов.

Пусть, далее, принято допущение конечности Мира в пространстве, эксплицируемое так, что из него следует утверждение $(\exists x)(\forall y)(x \geqslant \alpha y)$, где x и y суть переменные для эмпирических индивидов. Из последнего следует $\sim(\forall a)(\exists y)(y > \alpha a)$, где a есть переменная для положений тела в пространстве (утверждение C). Из B и C следует $\sim X$. Таким образом, допущение конечности Мира в пространстве имеет своим следствием неистинность X, а это исключает возможность использования A для получения истинных следствий.

Из сказанного не следует, что в интересах физики здесь надо принять допущение бесконечности мира в пространстве. Из сказанного следует лишь то, что если принимается закон инерции для движения, то нельзя принимать допущение конечности Мира в пространства, ибо это допущение делает рассматриваемый закон практически бесполезным. Логического противоречия, однако, здесь еще не возникает. Но если все же приходится выбрать какое-то из двух упомянутых утверждений о Мире, то предпочтение следует отдать, очевидно, утверждению о бесконечности Мира в пространстве. Можно сказать, что допущения «Из ничего ничто не возникает» и «Нечто не превращается в ничто» логически несовместимы с допущениями конечности Мира во времени в прошлом и, соответственно, в будущем. Из этого не следует, что нужно принять допущения бесконечности Мира во времени в прошлом и будущем. Но здесь имеет место более жесткая логическая связь, чем выше, а именно — логическое противоречие между допущениями. И опять-таки это может служить основанием для предпочтения одних гипотез другим.

Далее, имеются физические допущения, из экспликации которых можно вывести утверждение A о том, что всякий эмпирический индивид имеет непрерывное окружение (погружен в сплошную среду) из эмпирических индивидов. Эксплицируем A следующим образом: $(\forall \alpha)(\forall a)(\exists b)((b > \alpha a) \wedge (a \parallel \alpha b)$, где a и b суть переменные для эмпирических индивидов, а α есть переменная для способов установления пространственного порядка. Из A следует утверждения B и C соответственно такие: $(\forall \alpha)(\forall a)(\exists b)(b > \alpha a)$ и $(\forall \alpha)(\forall a)(\exists b)(a \parallel \alpha b)$. Первое из них есть экспликация утверждения о бесконечности Мира в пространстве, а второе — утверждения об отсутствии абсолютной пустоты. Таким образом, утверждение о бесконечности Мира в пространстве можно получить как следствие некоторых физических гипотез. Но нельзя наоборот. Так, из B и C не следует A. Аналогичное рассуждение можно привести для времени.

Рассмотрим, наконец, одно обстоятельство, заставляющее занять более радикальную позицию по вопросу о соотношении формальной и эвристической онтологии. Всякое внелогическое допущение относительно эмпирических индивидов имеет при логической его экспликации вид $(\forall a)x$, где a есть переменная для эмпирических индивидов вообще или каких-то их типов (процессов, скоплений и т. п.). Возникает вопрос: можно или нет включать в область значения a выражения вида $a \downarrow\sim x$? Если можно, то получим по правилам логики, что x будет верно в отношении таких индивидов a, в отношении которых верно $\sim x$ (например, получим, что индивиды, не имеющие причин, имеют причины). Следовательно, принимая $(\forall a)x$, мы во избежание возможности логических противоречий должны запретить подстанов-

ку на место a выражений типа $a \downarrow\sim x$, что равносильно принятию допущений $\sim(a \downarrow\sim x \to a)$ и $\sim(a \downarrow\sim x \in Ka)$. Например, если мы принимаем допущение, что всякий существующий эмпирический индивид имеет причину, то мы должны принять также допущение, согласно которому предмет, обозначаемый термином «существующий эмпирический индивид, который не имеет причины», не включается в класс существующих эмпирических индивидов. А это равносильно операции, когда $(\forall a)x$ просто принимается как часть имплицитного определения терминов «эмпирический индивид», «процесс», «скопление» и т. п. Так что всякая эвристическая онтология в принципе может быть представлена как система определений для каких-то типов эмпирических индивидов и их признаков.

§ 7. Эвристические правила

Эвристические допущения, будучи присоединены к утверждениям науки, не расширяют ее дедуктивную базу. Последняя может быть расширена другим путем — путем принятия особых эвристических правил, расширяющих класс правил вывода. К числу таких правил относятся общеизвестные правила генерализации (построения высказываний вида $(\forall a)X$), называемые также правилами индукции.

Пусть высказывание $(\forall a)X$ не может быть получено из высказываний $Y^1, \ldots, Y^n$ по правилам логического следования. В некоторых случаях, однако, признав истинность $Y^1, \ldots, Y^n$, признают истинным и $(\forall a)X$. При этом люди иногда угадывают, что $(\forall a)X$; иногда со временем убеждаются, что $\sim(\forall a)X$, и принимают соответствующие меры; иногда с самого начала знают, что $\sim(\forall a)X$, но игнорируют это. Но при всех обстоятельствах они принимают $(\forall a)X$ и действуют с ним в соответствии со свойствами квантора общности. Эти случаи и образуют индуктивную генерализацию.

Простейший случай такой генерализации — полная индукция. Известны такие ее формы. Примитивная индукция: если высказывание X истинно в отношении индивидов $s^1, \ldots, s^n$ *класса* Ks *и при* этом $s^1, \ldots, s^n$ исчерпывают класс Ks, то $(\forall s)X$.

Индукция через деление: если $s^1, \ldots, s^n$ образуют деление s, *и* при этом X *истинно* в отношении всех $s^1, \ldots, s^n$, то $(\forall s)X$.

Рекурсивная индукция:

1) в класс Ks включаются только $s^1, \ldots, s^n$ и $s_1, \ldots, s_m$ (последние при том условии, что в Ks включаются $s^{*1}, \ldots, s^{*k}$);

2) если X истинно в отношении всех s^1, ..., всех s^n, и если из признания того, что X истинно в отношении всех $s^{*1}, \ldots$, всех s^{*k}, следует, что оно истинно в отношении всех $s_1, \ldots$, всех s_m, то $(\forall s)X$.

В случае математической индукции предполагается (допускается или усматривается из свойств объектов) возможность упорядочить индивиды Ks и построить утверждение $(s^n \leftarrow P) \rightarrow (s^{n+1} \leftarrow P)$, где s^n есть любой индивид. Если истинно $s^1 \leftarrow P$ и только что приведенное утверждение, то истинно $(\forall s)(s \leftarrow P)$.

Приведенные схемы сами являются правилами получения высказываний $(\forall a)X$ из тех данных, которые указаны в них. И никакого обоснования их не требуется, кроме ссылки на интуитивное понимание квантора $\forall$. Суть всех этих правил с точки зрения «обоснования» тривиально проста: если нам как-то удалось установить, что высказывание X истинно в отношении всех индивидов класса, то мы принимаем как истинное высказывание $(\forall s)X$.

Если число индивидов данного класса бесконечно или таково, что практически невозможно пересмотреть все их, а использование методов полной индукции исключено, то используется так называемая неполная, эмпирическая или вероятностная индукция. Известны различные ее формы. Количественная индукция: 1) если число случаев, когда $s \leftarrow (X \downarrow)$, достаточно велико, и при этом не встречаются случаи, когда $s \leftarrow (\sim X \downarrow)$, то $(\forall s)X$ считается истинным (популярная индукция); 2) если вероятность того, что $s \leftarrow (X \downarrow)$ достаточно велика, то $(\forall s)X$ считается истинным (частотная индукция).

Но когда именно имеет место указанное выше «достаточно», зависит от обстоятельств. Никакие логические критерии здесь не формулируются. Играют роль опыт и удача. Может случиться так, что исследователь «наткнулся» на такой s, что $(\forall s)X$, хотя он и рассмотрел всего несколько примеров s. Но может случиться так, что исследователь пересмотрел огромное число s, построил $(\forall s)X$, а потом нашли такой s, что $s \leftarrow (\sim X \downarrow)$. Кроме того, встречаются случаи, когда заведомо известно, что возможно $s \leftarrow (\sim X \downarrow)$, но оперируют с $(\forall s)X$ как с истинным.

Условная индукция: если $s \leftarrow (X \downarrow)$ в некоторых данных условиях, то $(\forall s)X$ считается истинным в этих условиях. Здесь эффект зависит от точности, полноты и т. п. учета условий. Здесь можно сформулировать довольно четкий принцип: «Если истинно $s \leftarrow (X \downarrow)$, то возможно установить (зафиксировать) такие условия, что в этих условиях $s \leftarrow (X \downarrow)$ всегда истинно, т. е. $(\forall s)X$». Этот принцип теоретически безупречен. Но в практическом исполнении его эффект опять-таки зависит от обстоятельств. Так, высказывание «Человек может стать императором Франции» истинно в отношении Наполеона I; можно (в принципе) перечислить условия, необходимые для этого; в этих условиях (при наличии их) это высказывание будет истинно для всех людей; только эти условия повторимы далеко не всегда и не для

всех людей. В практическом применении названного принципа всегда действует здравый смысл, вводящий ограничения на характер X и на описание условий, когда $s \leftarrow (X\downarrow)$.

Условно-количественная индукция: выбираются произвольные элементы Ks (минимум два); если при достаточно большом числе случаев и достаточном разнообразии их условий (крайний вариант — взаимоисключающие условия) истинно $s \leftarrow (X\downarrow)$, то $(\forall s)X$ считается истинным.

Индукция по различению: если индивиды $s^1, \ldots, s^n$ класса Ks достаточно различны и при этом истинны $s^1 \leftarrow (X\downarrow), \ldots, s^n \leftarrow (X\downarrow)$, то $(\forall s)X$ считается истинным.

Индукция по сходству: если истинны $s^1 \leftarrow (X\downarrow), \ldots, s^n \leftarrow (X\downarrow)$, все индивиды $s^1, \ldots, s^n$ достаточно сходны, а в Ks включаются только $s^1, \ldots, s^n$ и такие индивиды, которые с ними достаточно сходны, то $(\forall s)X$ считается истинным.

От индуктивной генерализации отличается вид генерализации, которую можно назвать дефинитивной. Она не является эвристической операцией. Схеме ее такова:

1) эмпирически установлено, что X истинно в отношении некоторых индивидов класса Ks;

2) принято определение $a \equiv Df \cdot s\downarrow X$;

3) по правилам теории терминов имеем $(\forall s)((s\downarrow X) \leftarrow (X\downarrow))$, откуда получаем $(\forall a)X$. При этом $(\forall a)X$ принимается как следствие намерения исследователя называть термином именно такие объекты, что $(\forall a)X$.

Редукционная индукция: если собственные следствия $(\forall s)X$ истинны, если число их достаточно велико и если они достаточно важны, то $(\forall s)X$ принимается за истинное. Очевидно, что эти «достаточно велико» и «достаточно важны» точно также имеют внелогическую природу, зависят от условий, подвержены колебаниям и т. п. Предельный случай — следствия точно определены, и возможности получения их с помощью $(\forall s)X$ достаточны для признания последнего за истинное.

Возможны два варианта редукции. Сильный вариант: если из $(\forall s)X$ получается по крайней мере одно неистинное следствие, то оно не является истинным. Слабый вариант: из $(\forall s)X$ могут получаться неистинные следствия; но если они не играют существенной роли (ими можно пренебречь), то $(\forall s)X$ может быть принят за истинное. В этом случае встает вопрос о «весе» (о важности) следствий. Если «вес» истинных следствий из $(\forall s)X$ оценивается числом α, а неистинных — числом β, то в зависимости от соотношения α и β решают, считать его истинным или нет.

§ 8. Методы исследования

Выражение «методы исследования» не является строго определенным. Но мы не собираемся его уточнять, ибо не видим в этом надобности. Ограничимся лишь следующим пояснением. Говоря о методе исследования, имеют в виду:

1) совокупность действий исследователя, которые он предпринимает, чтобы в заданных условиях исследования решить заданную научную проблему;

2) эти действия более и менее стандартны.

Решить научную проблему — значит найти признаки данных объектов, измерить величину данных признаков объектов, осуществить сравнение, найти подходящее определение термина, доказать или опровергнуть заданное утверждение, вывести возможные следствия из данных утверждений и т. д. Условия исследования — все то, что имеется в распоряжении исследователя для решения данной проблемы (например, возможность или невозможность наблюдать объект, возможность повторять эксперимент, данная совокупность высказываний, истинность которых установлена, и т. д.).

При решении метода исследования не предполагается то, что при решении заданной проблемы в заданных условиях применение его даст непременно положительный однозначный результат. Один и тот же метод может быть использован в разных условиях и для решения разных проблем, а в одних и тех же условиях и для решения одних и тех же проблем могут быть использованы разные методы. Но не в том смысле, что они вообще не имеют точек соприкосновения, а в том смысле, что описание метода исследования не есть описание алгоритма.

На языке логики методы исследования, естественно, охватываются лишь в той мере, в какой это позволяет сделать имеющийся в ее распоряжении аппарат понятий. Не случайно поэтому в логике оказалось хорошо разработанным учение о дедуктивном методе (включая учение об аксиоматическом и гипотетико-дедуктивном методе), Ниже мы рассмотрим три других примера, на которых можно показать, как выглядят методы исследования с точки зрения логики и каковы пока реальные возможности логики на этот счет.

§ 9. Исследование эмпирических систем

Основная проблема исследования эмпирических систем — отыскание таких простых и непосредственных связей, из высказываний о которых можно было бы получать высказывания о любых сложных и косвенных связях данной системы, и такое изобретение правил для этого.

Две операции при этом представляют интерес — изоляция отдельных связей (анализ системы) и объединение (синтез) их в сложные связи.

Анализ системы характеризуется понятием изолированной связи. Пусть высказывание $\downarrow (R)X \Leftarrow f \downarrow (Y, Z)$ фиксирует зависимость объекта a, фигурирующего в X, от объектов b и c, фигурирующих соответственно в Y и Z, R означает положение $\downarrow X$ относительно $\downarrow Y$ и $\downarrow Z$. Осуществить анализ данной системы — значит построить два высказывания $\downarrow (R^1)X \Leftarrow f^1 \downarrow (Y^*, Z)$ и $\downarrow (R^2)X \Leftarrow f^2 \downarrow (Y, Z^*)$, где Y^* и Z^* суть какие-то допущения относительно b и, соответственно, c. В частности, Y^* и Z^* могут быть высказываниями о том, что соответствующие объекты не изменяются, не существуют, не влияют на другие объекты и т. п.

Под синтезом изолированных выше связей в систему мы имеем в виду отыскание таких правил, благодаря которым становится возможным высказывание $\downarrow (R)X \Leftarrow f \downarrow (Y, Z)$ получить из $\downarrow (R^1)X \Leftarrow f^1 \downarrow (Y^*, Z)$ и $\downarrow (R^2)X \Leftarrow f^2 \downarrow (Y, Z^*)$ логически. Отыскание таких правил означает принятие некоторых допущений относительно данной системы. Так, в данном примере это может быть допущение того, что характер воздействия b на a не зависит от того, имеется при этом c или нет; аналогично для c. Классический пример такого синтеза — правило параллелограмма сил в механике.

Существенную роль в исследовании эмпирических систем связей играют принципы, регламентирующие последовательность рассмотрения объектов и связей, выбор исходного пункта для этого, отыскание исходных понятий и утверждений и т. д. В логической терминологии соответствующие вопросы разработаны слабо. И причина этого состоит не столько в том, что логики мало занимались ими, сколько в самих этих вопросах: решение их зависит от особенностей исследуемой системы и составляет элемент исследования в этой области, а не в области логики. Те же общие схемы и рекомендации, которые логика в настоящее время способна сформулировать на этот счет, имеют весьма ничтожное эвристическое значение.

§ 10. Модели

Слово «модель», как и множество уже рассмотренных выше слов, употребляется в различных смыслах. Мы слово «модель» будем употреблять в таком смысле. Пусть требуется исследовать предметы некоторого класса Ka (это может быть и индивидуальный предмет), т. е. требуется получить какие-то высказывания об этих предметах, удовлетворяющие определенным требованиям. Эта задача может быть решена двояко:

1) исследуются представители этого класса предметов (сам этот предмет) a;

2) подбираются (или создаются, в частности) какие-то другие предметы класса Kb, которые исследуются вместо предметов a, и затем из высказываний, полученных здесь, получаются по определенным правилам высказывания, относящиеся к предметам a.

*D*1. Предметы a суть предметы-оригиналы относительно предметов b, а предметы b суть предметы-модели относительно предметов a.

Таким образом, модель есть предмет, который исследуется вместо другого предмета с целью получения каких-то знаний о последнем. Эта роль модели обусловливает то, что она подбирается или создается определенным образом. А именно, модели подбираются так, чтобы имели место функции $\downarrow X^i \Leftarrow f^i(\downarrow Y^i)$, где Y^i $(i = 1, 2, \ldots)$ суть высказывания, получаемые при исследовании моделей, а X^i суть высказывания, относящиеся к предметам-оригиналам и удовлетворяющие некоторым заранее принятым требованиям. Функции f^i суть правила замены терминов, относящихся к предметам-моделям, на термины, относящиеся к предметам-оригиналам. Получение X^i из Y^i по этим правилам ничего общего не имеет с умозаключением по аналогии, поскольку здесь модели специально подбираются так, чтобы эти правила имели силу. Очевидно, о предметах-оригиналах и предметах-моделях должны иметься какие-то предварительные знания, чтобы была априорная уверенность в возможности получения и пригодности X^i. Встречающиеся в таких случаях неудачи не меняют существа дела.

§ 11. Теории

Слово «теория» употребляется в разных смыслах. Мы здесь выделим лишь один из них, при котором теория рассматривается как метод получения новых знаний.

Пусть задана некоторая область науки и как-то заданы классы высказываний A и B, относящиеся к этой области науки. Пусть X есть непустое множество универсальных высказываний.

*D*1. Если из X и истинных высказываний, относящихся к A, достаточно регулярно получаются истинные высказывания, относящиеся к B, и при этом для получения их достаточно правил оперирования с высказываниями и терминами, то будем говорить, что X играет роль теории (есть теория) по отношению к A и B.

Предполагается, что получить высказывания B из A без X чисто логическим путем невозможно или возможно лишь в небольшом числе случаев, не представляющих практической ценности. Иначе X теряет

практический смысл. Если $A^1, \ldots, A^n$ суть высказывания, принадлежащие к классу A, а B^* —к классу B, то получение B^* из $A^1, \ldots, A^n$ посредством теории X означает, что верно,

$$A^1 \cdot \ldots \cdot A^n \cdot X \rightarrow B^*,$$

но неверно

$$A^1 \cdot \ldots \cdot A^n \rightarrow B^*.$$

Мы определили теорию так, что даже отдельно взятое универсальное высказывание может приобрести функции теории. Это не согласуется с представлением о теории, которое сложилось на основе наблюдения таких выдающихся образцов научного творчества, как ньютоновская механика, гидродинамика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика и т. п. Согласно этому представлению не любые комплексы универсальных высказываний, выполняющие указанные в *D*1 функции, считаются теориями, но лишь привилегированные. Стоит, однако, принять какое-то общее определение теории, как в число теорий непременно попадет комплекс высказываний, терминов, совсем не похожий на упомянутые образцы.

Изобретение и разработка теорий — творческий процесс, зависящий от конкретных условий в той или иной науке, от целей их изобретения, от традиций, моды, способностей и вкусов изобретателей и т. п. При этом используются не только правила логики и математики, но и другие самые разнообразные (в принципе — любые) средства науки вплоть до наблюдений и экспериментов. Так что сформулировать нетривиальные правила изобретения теорий в рамках логики вряд ли возможно. Самое большее, что здесь можно сделать (во всяком случае пока), это разработать достаточно четкую и однозначную терминологию, с помощью которой можно вести осмысленные разговоры о теориях, и распространить общие принципы логики на теории, которые суть сложные комплексы терминов и высказываний. Ниже мы сделаем по этому поводу несколько замечаний, но не с целью дать читателю некую теорию теорий, а с целью проиллюстрировать общую ориентацию логики и высказать несколько чисто негативных соображений на этот счет.

*D*2. Высказывания и термины, входящие в данную теорию, разделяются на исходные (первичные) и производные. Исходные высказывания принимаются как нечто данное, производные же выводятся посредством исходных. Исходные термины не определяются друг через друга и через другие терминами теории. Они входят в исходные высказывания. Через них определяются прочие термины теории.

Различение, указанное в *D*2, не означает, что во всех случаях построения теорий сразу задаются все исходные термины и высказывания. Теория может задаваться так, что не накладывается никаких априорных ограничений на число исходных терминов и высказываний, и последние могут вводиться по мере надобности в ходе развертывания теории. Такого рода теории можно назвать открытыми в отличие от закрытых, у которых исходный базис как-то ограничен.

С точки зрения строения к теориям помимо того, что указано в *D*1, предъявляют еще требование, чтобы термины и высказывания, образующие ее, были связаны отношениями логического следования и определения. Можно, конечно, такое требование принять. Но оно ничуть не исключает случай, когда все термины и высказывания теории являются исходными, а множество производных пусто.

*D*3. Высказывания, выводимые только из исходных утверждений теории, суть внутренние следствия теории, а выводимые из исходных утверждений с помощью каких-то других утверждений, не входящих в эту теорию, — внешние. Аналогично термины, определяемые только через исходные термины теории, суть ее внутренние производные термины, а определяемые посредством терминов, не входящих в эту теорию, — внешние.

Вопрос о том, включать или не включать внешние универсальные следствия и внешние производные термины в структуру данной теории, принципиальной роли не играет. Практически в науках складываются конструкции, содержащие универсальные внешние и внутренние следствия исходных утверждений (а также внешние производные термины) и рассматриваемые в качестве теорий.

*D*4. Теория считается логически непротиворечивой, если и только если не получаются противоречивые следствия (внешние и внутренние).

Логически противоречивые теории в науке встречаются и используются. Это возможно постольку, поскольку в них содержатся непротиворечивые фрагменты, позволяющие получать истинные высказывания. Но вообще обнаружение логических противоречий в теориях является стимулом к их усовершенствованию.

*D*5. Исходное утверждение теории не зависит от остальных ее исходных утверждений, если и только если его нельзя получить как следствия остальных. Исходный термин не зависит от других исходных терминов теории, если и только если он не определяется через них. Обнаружение зависимости одних исходных утверждений (терминов) от других является стимулом к «минимизации» исходных элементов теории. Однако зависимость их не ведет сама по себе к недоразумениям, подобным последствиям логической противоречивости.

*D*6. Задано какое-то множество высказываний, и теория считается полной или неполной (с какими-то дополнительными определениями вроде «интуитивно», «эмпирически», «апостериорно» и т. п.) в зависимости от того, все или не все заданные высказывания могут быть получены посредством этой теории (здесь мыслимы градации в зависимости от того, имеются в виду только внутренние или любые следствия теории).

*D*7. Заданы какие-то априорные требования, которым должны удовлетворять высказывания данной области науки; и в зависимости от того, все или не все высказывания, удовлетворяющие этим требованиям, получаются посредством данной теории, последняя расценивается как полная или неполная (с некоторым ограничением вроде «дедуктивно», «априорно» и т. п.).

Между теориями имеют место различные взаимоотношения. Частично они определяются как отношения классов получаемых в них посредством их высказываний и представляют собой обобщения обычно рассматриваемых в логике отношений аксиоматических систем.

*D*8. Одна теория включается в другую, если и только если каждое следствие первой есть также следствие второй. Две теории равносильны, если каждая из них включается в другую.

Аналогично можно определить другие отношения (объединения, совместимости и т. д.). Однако взаимоотношения теорий этим не исчерпываются. В частности, встречаются такие отношения. Пусть A есть высказывание, полученное посредством X^1, а B — посредством X^2. Пусть оба A и B находятся в диапазоне истинности относительно одного и того же объекта. Однако одно из них оценивается как более точное, менее точное или столь же точное. Аналогичное сравнение возможно для других следствий X^1 и X^2, а из их совокупности складывается некоторая суммарная оценка сравнительной точности теорий. Из сравнения множеств следствий и степеней их точности получаются более сложные отношения.

*D*9. Одна теория оценивается как частный случай другой, если какие-то исходные термины первой суть видовые термины соответствующих терминов второй, а в остальном они не различаются.

Теории изобретаются для того, чтобы получать нужные знания, не прибегая к эмпирическим исследованиям (как замена последних). В конечном итоге совпадение высказываний, получаемых посредством теорий, с эмпирическими данными оправдывает теории или заставляет их отбросить как неэффективные или даже ведущие к ошибочным результатам. Если обнаруживаются такие случаи, что получаемые в теории или посредством теории высказывания не совпадают с результатами эмпирических исследований (оказываются вне диапазона истинности),

то сложившаяся ситуация не образует никакого логического противоречия. Иногда эти несовпадения приобретают вид парадоксов.

Формальная система не есть теория, поскольку в формальной системе нет терминов и высказываний. Теория может получиться лишь благодаря интерпретации формальной системы, при которой ее объекты рассматриваются как термины, высказывания и логические операторы.

Когда говорят о формализации теории, то часто имеют в виду совершенно различные вещи:

1) отвлечение от смысла терминов теории с целью исследования ее логических достоинств;

2) аксиоматизацию;

3) изобретение такой формальной системы, в результате интерпретации которой получилась бы теория, равносильная данной.

Между теориями, между теорией и формальной системой и между формальными системами могут быть установлены отношения модели и оригинала. Формальные системы являются очень удобными моделями для исследования некоторых свойств теорий (например, их непротиворечивости). Но все это зависит от обстоятельств. Теория же (в нашем смысле) не есть модель той предметной области, к которой относятся ее термины и высказывания.

Одна из функций теорий, сказали мы, есть осуществление прогнозов. При этом существенное значение имеет не вообще способность теорий прогнозировать, но качество самих прогнозов, их ценность с точки зрения ситуации в данной науке и вненаучных практических соображений. Поэтому бывает так, что теории, позволяющие делать безошибочные прогнозы, оказываются бесполезными и необычайно скучными, а теории, позволяющие делать сбывающиеся предсказания лишь в каком-то проценте случаев, оказываются в высшей степени полезными и значительными.

§ 12. Методология частных наук

Логика едина для всех наук. Не существует и не может быть никакой особой логики для той или иной науки (физики, химии, истории, математики и т. д.), отличной от логики для других наук. Но деятелей частных наук интересуют не разговоры о науке вообще, а методологические проблемы своей науки, да к тому же выступление для них в форме конкретных проблем этой науки, так что нельзя ли в логике построить разделы, специально и непосредственно рассчитанные на интересы потребителя такого рода?

Конечно, кое-что здесь можно сделать. А именно, следующее. Пусть дана некоторая наука с ее особыми методологическими проблемами. В логике можно выбрать такие разделы, которые более всего

подходят к логическому типу методологических проблем этой науки. Изложить эти разделы можно на примерах понятий, утверждений, теорий данной науки. Наконец, в логике какие-то разделы можно развить более детально и в таком направлении, чтобы это соответствовало интересам данной науки.

Мы ни в коем случае не отвергаем педагогическую и просветительную роль логики в упомянутом выше случае. Мы только хотим здесь обратить внимание на два обстоятельства. Пропаганда логики с целью сделать ее участником исследований в конкретных науках неизбежно сталкивается с дилеммой: если логика как наука общедоступна, она тривиальна и практически бесполезна; если же логика не тривиальна и может иметь серьезное научное значение, она доступна лишь сравнительно узкому кругу специалистов при условии значительных затрат ума и времени. И вряд ли можно рассчитывать на то, что эта дилемма будет решена массовым порядком.

Второе обстоятельство состоит в том, что сказанное выше об ориентации логики на интересы той или иной науки есть либо разработка логики как особой науки, либо разъяснение ее результатов особой группе лиц, работающих в некоторой частной науке, но еще не есть решение методологических проблем этой науки. Последнее может быть найдено не в терминах одной только логики, но в терминах самой этой науки. Решение методологических проблем физики, химии, истории, математики и т. д. есть исследование в области физики, химии и т. д.

Таким образом, особая методология той или иной конкретной науки есть часть этой науки. Но эта часть имеет ряд особенностей сравнительно с другими частями науки. Прежде всего, методология конкретной науки не есть в таком же смысле локализованная часть науки, как, скажем, органическая химия есть часть химии, а оптика — часть физики. Она может быть разбросана по всей данной науке, да так, что собрать ее в одно место оказывается делом невозможным. Между прочим, фактическое положение ее было таким как в прошлом, так и сегодня. Это не дефект ее и не достоинство. Это ее натура. Возможны случаи, когда некоторая локализованная часть науки выполняет методологические функции в ней (например, такую роль в физике играла классическая механика и играет сейчас теория относительности), но это не есть общеобязательная норма.

Методология конкретной науки нужна (если она вообще нужна) для решения не обязательно всех проблем этой науки, а лишь для некоторых, может быть даже для решения одной единственной проблемы. И ничего унизительного для нее в этом нет. Иногда целая наука может работать сотни лет, чтобы решить одну единственную задачу, и этим существование ее будет оправдано, если эта задача стоит того.

По содержанию специальная методология той или иной науки есть совокупность исследований, включающая обработку языка данной науки (ее терминологии и утверждений), исследование, усовершенствование и изобретение ее теорий, выявление и исследование ее эвристических допущений, исследование, усовершенствование и изобретение ее эвристических правил — т. е. вся та работа, которую выполняют так называемые теоретики данной науки (а не логики и методологи вообще). И результатом этой работы является совершенствование данной науки как системы знаний, а не конструирование особой систематически построенной методологии этой науки. Методология данной науки исчезает в теле самой науки, а не образует особое тело наряду с ней. Когда наряду с наукой вырастает еще особая наука, являющаяся ее методологией, это скорее признак неблагополучия этой науки или методологии науки (а возможно, и обеих), чем признак ее прогресса.

То, что систематически построенная методология всякой науки в той части, которая касается исследования терминов и высказываний, есть общая логика, это должно быть ясно из всего предшествующего изложения. Добавим к этому еще такие два обстоятельства, интересные и сами по себе.

Одна из задач частной методологии науки — выявление и исследование эвристических допущений относительно изучаемых в этой науке объектов. Например, это может быть допущение минимальных длин и минимальных интервалов времени или, наоборот, допущение того, что нет минимальных длин и нет минимальных интервалов времени; это может быть допущение того, что Вселенная замкнута, или противоположное допущение, что она не замкнута. Всякая наука полна такого рода эвристических допущений.

Теперь спрашивается, можно ли такой фрагмент методологии построить как единую по содержанию систему? Невозможно хотя бы потому, что здесь логически одинаково правомерны как допущения, так и их отрицания. Совместить же их в одной системе без противоречия нельзя. А отдать предпочтение одному члену противоречия тоже нельзя, ибо отсутствуют критерии для абсолютного и окончательного предпочтения. Да эта систематизация к тому же лишена смысла, ибо как система такая методология для науки вообще не нужна. Для науки нужны те или иные принципы в различных отделах и ситуациях в зависимости от условий. Не исключено, что для решения одной и той же проблемы одному ученому нужен некоторый принцип, другому — нет, а третьему даже нужен противоположный.

Но не будем входить в содержание методологических допущений, будем рассматривать их как предмет нашего внимания, т. е. встанем на точку зрения метанауки. Нельзя ли при этом методологические принципы той или иной конкретной науки сделать предметом исследования

и тем самым построить особую методологию данной науки? Абстрактно говоря, можно. Но при этом испарится все то, что имеет специфический интерес для представителей данной конкретной науки. Останется просто логика, общая логика. И некоторые очень общие соображения вроде таких: отношение порядка может быть «раньше», «позже», «одновременно»; мы имеем дело с одним и тем же предметом, наблюдая предметы в разное время, если достаточно большее число признаков и определенных признаков у наблюдаемых совпадает и т. п. Эвристические допущения данной науки строятся на языке этой науки. И наибольший интерес в них имеет место не *логическое*, а *специфическое для* данной науки содержание. И никакая метанаука здесь не решит дела.

В пользу тезиса о невозможности особой методологии той или иной конкретной науки на языке *логики* говорит и другое из упомянутых обстоятельств. Кажется естественным рассматривать сложные познавательные операции в надежде отыскать для них особые логические правила, отличные от правил для составляющих их простых операций, т. е. отыскать особые логические правила, специфически характеризующие данную науку. Однако логические операции обладают на этот счет одной особенностью сравнительно с другими действиями людей. Здесь любая самая сложная конструкция остается комбинацией из простых слагаемых, и не более (в силу самих абстракций, лежащих в фундаменте логики). Разделение же логических операций на простые и сложные всецело зависит от вида принимаемой теории логических правил и имеет смысл лишь при наличии особых определений простоты и сложности со ссылкой на эту теорию, т. е. есть дело сугубо логическое. Кроме того, на какие бы «простые» операции не разлагалась та или иная «сложная» операция, ее всегда можно представить как «простую» (в один шаг) операцию, совершаемую по правилу, которое является производным от правил составляющих ее операций. Если этого сделать нельзя, значит при осуществлении данной операции допущена логическая ошибка или она осуществлена не по правилам логики. Одним словом, наивно рассчитывать на то, что можно придумать какой-то особый сверхлогический аппарат, принципиально отличный от логического аппарата, сложившегося и складывающегося по тем направлениям, которые составляют фундамент современной логики.

§ 13. О логической ситуации в микрофизике

Особенность свойств и условий исследования явлений микромира сравнительно со свойствами и условиями исследования явлений макромира породили мысль об особой логике микромира (логике микрофизики, логике квантовой механики), принципиально отличной

от той привычной логики, которая сложилась на основе изучения явлений макромира.

При обосновании тезиса особой логики для микрофизики ссылаются, с одной стороны, на исключительные свойства объектов микромира и, с другой стороны, на исключительные условия их познания. Однако логика вообще не есть теория бытия, и ее правила одинаковы для всех наук, к каким бы сферам бытия они ни относились. Различие сфер бытия (т. е. областей познания) сказывается на правилах логики лишь в том, что в разных ситуациях могут фигурировать термины и высказывания с различной логической структурой. Разумеется, при этом могут использоваться и различные правила логики. Но из этого никак не следует, что одно и то же правило логики в одной ситуации ведет к положительным результатам, а в другой — к ошибкам. Если в какой-то области науки складывается ситуация, когда кажется, будто применение некоторых правил логики ведет к ошибкам, то это должно порождать не сомнение в универсальности этих правил и стремление построить особую логику для этой области науки, а стремление найти источник недоразумений в смешении различных логических операторов, в отсутствии должной их дифференциации или в неправильном (неуместном) их употреблении.

Логическая ситуация в микрофизике считается из ряда вон выходящей потому, что в ней встречаются высказывания, которые не являются истинными и не являются ложными, т. е. обладают некоторым третьим значением истинности («неопределенно»).

Кроме того, в микрофизике встречаются пары высказываний, которые связаны так, что если одно из высказываний истинно или ложно, то другое неопределенно (дополнительные высказывания).

Но факт трехзначности высказываний не является исключительной особенностью микрофизики, идеи многозначной логики были известны в логике до возникновения квантовой механики, а правила трехзначной логики являются столь же универсальными, как и правила двузначной логики, независимо от того, встречаются вообще где-либо случаи для их применения или нет.

Аналогично обстоит дело с дополнительными высказываниями. Такого рода зависимости высказываний встречаются не только в микрофизике. Но если бы даже дополнительные высказывания были исключительной привилегией микрофизики, обнаружение их не ведет ни к какому перевороту в способах рассуждения, как и обнаружение трехзначности высказываний вообще. Поясним, в чем тут дело. В первой главе мы уже отмечали, что для установления правил вывода и их применения вообще не играет роли, сколько значений истинности приписывается высказываниям. Эти правила по природе своей таковы, что для установления и применения их достаточно оперировать од-

ним значением истинности «истинно» и его отрицанием «неистинно». А в силу сводимости всех предикатов значений истинности к «истинно» всякое описание, использующее три значения истинности, может быть заменено адекватным ему описанием, использующим лишь значение «истинно» и его отрицание.

Ситуация в микрофизике, породившая идею особой логики микрофизики, заключается в следующем:

1) чтобы принять или опровергнуть высказывание об импульсе микрочастицы, необходимо иметь возможность его измерить; аналогично для координат;

2) но если имеется возможность точно измерить импульс (координаты) частицы, то при этом оказывается невозможным точное измерение координат (импульса).

Как видим, ситуация описана вообще без использования предикатов истинностных значений, что вполне соответствует нашему утверждению (в первой главе) об элиминируемости этих предикатов из языка. Но эти предикаты используют, что и служит базой для дискуссии.

Примем сокращения:

1) $P(a)$ — «Импульс частицы a можно точно измерить»;
2) $Q(a)$ — «Координаты частицы a можно точно измерить»;
3) $S(a)$ — «Импульс a равен α»;
4) $T(a)$ — «Координаты a равны β».

Для высказываний $P(a)$ и $Q(a)$ и их отрицаний $\neg P(a)$ и $\neg Q(a)$ имеют силу такие положения:

1) x истинно, если и только если на самом деле x (где x есть любое из них);

2) $P(a)$ ложно, если и только если $\neg P(a)$ истинно; $\neg P(a)$ ложно, если и только если $P(a)$ истинно; аналогично для $Q(a)$ и $\neg Q(a)$;

3) отрицание истинности («неистинно») и ложность для таких высказываний совпадают (они двузначны).

Для высказываний $S(a)$ и $T(a)$ и их отрицаний $\neg S(a)$ и $\neg T(a)$ имеют силу такие положения:

1) $S(a)$ истинно, если и только если $P(A)$ истинно и на самом деле $S(a)$; аналогично $T(A)$ истинно, если и только если $Q(a)$ истинно и на самом деле $T(a)$; $\neg S(A)$ истинно, если и только если $P(a)$ истинно и на самом деле $\neg S(a)$, $\neg T(a)$ истинно, если и только если $Q(a)$ истинно и на самом деле $\neg T(a)$; отличие от первого пункта для $P(a)$ и $Q(a)$ здесь в том, что в качестве условия истинности $S(a)$ и $\neg S(a)$ предполагается $P(a)$, а в качестве условия истинности $T(a)$ и $\neg T(a)$ предполагается $Q(a)$;

2) $S(a)$ неопределенно, если и только если $P(a)$ ложно; $\neg S(a)$ неопределенно, если и только если $P(a)$ ложно; $T(a)$ неопределенно, если и только если $Q(a)$ ложно; $\neg T(a)$ неопределенно, если и только если $Q(a)$ ложно; здесь, в отличие от $P(a)$ и $Q(a)$, возможность проверки $S(a)$, $T(a)$ и их отрицаний поставлена в зависимость от истинности и ложности других высказываний, так что становится возможным ввести третье значение «неопределенно»;

3) $S(a)$ ложно, если и только если $\neg S(a)$ истинно; $\neg S(a)$ ложно, если и только если $S(a)$ истинно; $T(a)$ ложно, если и только если $\neg T(a)$ истинно; $\neg T(a)$ ложно, ели и только если $T(a)$ истинно.

Между $P(a)$ и $Q(a)$ имеет место такая зависимость: если истинно одно из них, то ложно другое.

Из принятых предпосылок получается следствие: если одно из $S(a)$ и $T(a)$ истинно или ложно, то другое из них неопределенно.

Примем определение. Два высказывания x и y называются дополнительными, если и только если имеет место такая зависимость: если одно из них истинно или ложно, то другое неопределенно.

Согласно этому определению и ранее полученному утверждению высказывания $S(a)$ и $T(a)$ суть дополнительные высказывания.

Очевидно, что конъюнкция $x \wedge y$ дополнительных высказываний x и y не может быть истинной, поскольку для нее по определению имеет силу следующее: она ложна, если одно из x и y ложно; если же одно из x и y истинно, то $x \wedge y$ неопределенна, поскольку неопределенно другое из x и y; она неопределенна, если неопределенны оба x и y.

Мы описали логическую ситуацию с высказываниями $S(a)$ и $T(a)$ в терминах трехзначной логики. Но то же самое описание можно осуществить и в терминах двузначной логики со значениями «истинно» и «неистинно». Для этого достаточно повсюду заменить выражения с терминами «неопределенно» и «ложно» адекватными им выражениями с терминами «истинно» и «неистинно». А именно, это делается так:

1) для высказываний $P(a)$, $Q(a)$ и их отрицаний неопределенности исключены по условию, а выражения «x ложно» заменяется на «x неистинно»;

2) выражения «x неопределенно» для высказываний $S(a)$ и $\neg S(a)$ заменяются на выражения «$P(a)$ неистинно» или «$\neg P(a)$ истинно», а для высказываний $T(a)$ и $\neg T(a)$ — на выражения «$Q(a)$ неистинно» или «$\neg Q(a)$ истинно»;

3) выражение «$S(a)$ ложно» заменяется на «$\neg S(a)$ истинно», «$\neg S(a)$ ложно» — на «$S(a)$ истинно», «$T(a)$ ложно» — на «$\neg T(a)$ истинно», «$\neg T(a)$ ложно» — на «$T(a)$ истинно».

Если приведенные замены нельзя осуществить, то термины «неопределенно» и «ложно» остаются бессмысленными (т. е. пустой звук).

Более того, рассматриваемую логическую ситуацию вообще можно описать без терминов значений истинности, причем — очень просто.

Примем такое определение. Высказывания $Q^1(b)$ и $Q^2(b)$ будем считать дополнительными, если и только если с ними координированы такие высказывания $P^1(b)$ и $P^1(b)$, что

1) $P^1(b) \to \sim P^2(b)$;
2) $Q^1(b) \to P^1(b)$;
3) $Q^2(b) \to P^2(b)$;
4) $\neg Q^1(b) \to P^1(b)$;
5) $\neg Q^2(b) \to P^2(b)$.

Из утверждений (1–5) следует:

6) $P^2(b) \to \sim P^1(b)$;
7) $\sim P^1(b) \to \sim Q^1(b)$;
8) $\sim P^2(b) \to \sim Q^2(b)$;
9) $\sim P^1(b) \to \sim \neg Q^1(b)$;
10) $\sim P^2(b) \to \sim \neg Q^2(b)$.

Из (1), (2) и (4) следует:

$$Q^1(b) \vee \neg Q^1(b) \to \sim P^2(b).$$

Из (6), (3) и (5) следует:

$$Q^2(b) \vee \neg Q^2(b) \to \sim P^1(b).$$

Из (8) и (10) следует:

$$\sim P^2(b) \to \sim Q^2(b) \wedge \sim \neg Q^2(b).$$

Из (7) и (9) следует:

$$\sim P^1(b) \to \sim Q^1(b) \wedge \sim \neg Q^1(b).$$

В результате имеем:

$$Q^1(b) \vee \neg Q^1(b) \to \sim Q^2(b) \wedge \sim \neg Q^2(b),$$
$$Q^2(b) \vee \neg Q^2(b) \to \sim Q^1(b) \wedge \sim Q^1(b).$$

Введя оператор неопределенности, получим:

$$Q^1(b) \vee \neg Q^1(b) \to ? Q^2(b),$$
$$Q^2(b) \vee \neg Q^2(b) \to ? Q^1(b),$$

и, далее,

$$\sim ?Q^1(b) \to ?Q^2(b),$$
$$\sim ?Q^2(b) \to ?Q^1(b).$$

Таким образом, если высказывания дополнительны, то из отрицания неопределенности одного следует неопределенность другого.

Если x и y суть дополнительные высказывания, то $\vdash \sim (x \wedge y)$. В самом деле, возьмем

1) $Q^1(b) \wedge Q^2(b)$.

Поскольку в силу (1) и (2),

2) $\vdash Q^1(b) \wedge Q^2(b) \to P^1(b) \wedge P^2(b)$,

то в силу 6 имеем

3) $\vdash Q^1(b) \wedge Q^2(b) \to P^1(b) \wedge \sim P^2(b)$.

А так как

4) $\vdash \sim (P^1(b) \wedge \sim P^1(b))$,

5) $\vdash \sim (P^1(b) \wedge \sim P^1(b)) \to \sim (Q^1(b) \wedge Q^2(b))$,

из (4) и (5) имеем

$$\vdash \sim (Q^1(b) \wedge Q^2(b)).$$

Известно, далее, что объекты микромира нельзя наблюдать сами по себе. Можно наблюдать лишь результаты их взаимодействия с объектами макромира (следы в макромире). Сформулируем эту ситуацию в виде, удобном для логической точки зрения на нее.

Пусть исследуются объекты класса A (Мир A) в таких условиях:

1) можно наблюдать результаты воздействия объектов A на объекты класса B (на Мир B), — наблюдать следы A в B;

2) следы A в B наблюдаются как явления Мира B;

3) без Мира B наблюдение Мира A невозможно.

Совокупность терминов для обозначения явлений Мира B и для построения высказываний о них (т. е. язык для B) мы предположим здесь данным. Проблема — построить язык для A. Этот язык для A логически корректно строится так:

1) первичные термины-субъекты вводятся в употребление по схеме (явно или неявно) «Объекты A, имеющие следы α в B, будем называть β», где α есть описание следов объектов A в B как явлений B на языке для B;

2) первичные термины-предикаты вводятся по схеме «Будем говорить, что Y, если и только если $Z^1, \ldots, Z^n$», где Y есть высказывание с определяемым предикатом, а $Z^1, \ldots, Z^n$ суть высказывания в языке B, фиксирующие следы A в B;

3) производные термины вводятся путем использования первичных терминов по общим правилам логики;

4) результаты измерений следов A в B дают соответственно предикаты величин для языка A.

В силу логических свойств определений терминов и правил построения производных терминов высказывания языка A могут быть полностью заменены высказываниями языка B, не содержащими терминов языка A. Причем, все это можно сделать без потери информации о Мире A (подобно тому, как не происходит потеря информации при замене слова «ромб» выражением «равносторонний четырехугольник»).

Картина Мира A, построенная на языке рассмотренного вида, есть полноценная научная картина. Более того, желание найти какую-то научную картину Мира A *безотносительно* к Миру B (Мира A как такового, самого по себе и т. п.) должно считаться со следующим обстоятельством. Если это желание преследует чисто научные цели, то реализацией его, по идее, должна стать некоторая теоретическая конструкция (теория или мысленная модель), дающая возможность дедукции и предсказаний в данной области науки, или некоторая совокупность эвристических принципов, дающих ориентацию опытному исследованию.

Пусть X есть такая теоретическая конструкция, построенная на особом языке для A без использования языка B. Оставим здесь без внимания вопрос о том, как это может быть сделано практически, и обратимся к другому вопросу: каким образом можно использовать X в качестве средства дедукции и предсказания применительно к следам A в B? Другими словами, как из данных высказываний Y в языке для B с помощью X получить новые высказывания Z в том же языке? Логически мыслим только такой путь:

1) по особым правилам соответствия высказывания Y переводятся на язык, в котором построена X;

2) из полученных таким переводом высказываний Y^* с помощью X дедуцируются высказывания Z^*;

3) последние по тем же правилам соответствия переводятся на язык B, и в результате получаются Z.

Но чтобы X давала правильные (подтверждаемые на опыте) предсказания в языке B, она должна быть построена так, чтобы по крайней мере какая-то ее часть по указанным правилам соответствия переводилась на язык B, и полученная при этом теоретическая конструкция X^*

давала бы возможность дедукции Z из Y без опосредствующих переводов их в Y^* и Z^*. Так что построение X есть лишь частный случай построения и использования теоретических конструкций. Возможно, этот путь дает какие-то преимущества. Но он не является принципиально необходимым. А главное — он лишь создает фразеологическую иллюзию независимости картины Мира A от языка B (если, конечно, оставаться в рамках чистой науки и не принимать во внимание иные цели, например — пропагандистские, просветительские, педагогические и т. п.). Аналогично обстоит дело и с системой эвристических принципов, применение которых к Миру A в указанных условиях немыслимо без языка для A, построенного указанным выше способом.

§ 14. Дуализм волны и частицы

Представление о несовместимости в одном индивиде свойств частицы (корпускулы) и волны сложилось на основе обычного словоупотребления, когда частице приписывалась пространственная локализация и слитность всех частей, а волне — распространение в пространстве некоторого процесса. Типичный пример — камень и волна на воде от его падения. Но одно дело — употребление слов на основе чувственных восприятий, и другое дело — построение строгих определений этих слов. При попытке определить выражения «волна» и «частица» в соответствии с правилами построения определений и в соответствии с их интуитивным смыслом (привычным употреблением) обнаруживается следующее:

Определения выражений «частица» и «волна» можно построить так, что из них будут логически выводится утверждения A: 1) «Если индивид есть частица, то он не есть волна»; 2) «Если индивид есть волна, то он не есть частица». Если определения построены логически правильно, то из A логически следует утверждение B: «Невозможен (и не существует) индивид, который есть частица и в то же время волна». И никаких исключений из B при этом нет и быть не может. Если же для каких-то индивидов признается, что они одновременно суть частицы и волны, то тем самым отрицается B и отрицается A. Следовательно, определения выражений «частица» и «волна» должны быть построены так, чтобы из них не выводилось утверждение A. Все прочие выводы из данной ситуации логически неправомерны. Если языковая ситуация такова, что признается A, но отрицается B, то при условии логической корректности этой ситуации во всех прочих отношениях указанный факт является очевидным признаком того, что употребляемые языковые выражения плохо обработаны с логической точки зрения. Но выражения «частица» и «волна» можно определить

так, что утверждения «Некоторые индивиды суть одновременно частицы и волны» и «Возможен индивид, который есть частица и волна» будут логически непротиворечивы (логически выполнимы), а утверждение A будет недоказуемо. Более того, при этом будет недоказуемо даже более слабое утверждение: «Возможен индивид, для которого имеет силу A». Причем, эти определения в самой своей основе будут отвечать интуитивному смыслу слов «частица» и «волна» и кроме этого интуитивного смысла не будут предполагать ничего внелогического. И в этом эффекте нет ничего такого, что можно было бы истолковать как результат некоей преднамеренности. Дело просто в том, что при экспликации языковых выражений по правилам логики с них снимается некоторая оболочка, образовавшаяся в результате функционирования этих выражений в сложной системе социальных, психологических и т. п. связей и не имеющая никакого положительного значения с чисто научной точки зрения.

Примем определение частицы $D1$: эмпирический индивид a будем называть частицей (есть частица) во временном интервале t, если и только если возможна такая пространственная структура A относительно способов установления пространственного порядка α, что во время t индивид a находится внутри A относительно α, и a соприкасается с граничными точками A относительно способов установления порядка, входящих в α. Примем также следующее определение волны $D2$: эмпирический индивид a будем называть волной (есть волна) во временном интервале t, если и только если a есть процесс в t такой, что $x = f(y)$, где x есть переменная для состояний a в t, y есть переменная для моментов времени в интервале t, а f есть некоторая периодическая функция.

В определении частицы нет никакой ссылки на процесс и периодичность последнего. Но это не означает того, что он здесь отрицается, т. е. из $D1$ не следует, что a не может быть периодически процессом. В определении волны нет никакой ссылки на пространственную локализацию. Но это не означает того, что она здесь отрицается, т. е. из $D2$ не следует, что a не может быть пространственно локализован. Определения $D1$ и $D2$ построены в различных языковых планах. Они используют разные наборы языковых средств, не находящихся в отношениях взаимного отрицания. Таким образом, согласно $D1$ и $D2$ утверждение «Индивид есть частица и волна» не является логически противоречивым.

Иное дело — не всегда практически можно и целесообразно рассматривать индивиды как частицы и волны одновременно. Для индивидов, размеры которых близки к минимальным, и в интервалах времени, близких к минимальным, это практически возможно и целесообразно. И если микрообъекты проявляют себя одновременно как частицы

и волны, то в этом нет ничего странного. Более странным выглядит другое, а именно то, что макрообъекты практически нецелесообразно или невозможно рассматривать таким образом, — что есть какие-то объекты, которые не являются волнами и частицами одновременно. Но это — странности не логические, а практические.

Утверждение «Индивид a есть волна и частица» кажется противоречивым лишь постольку, поскольку в смысл терминов «волна» и «частица» неявно вкладывают допущение A. Логическая экспликация этих терминов обнаруживает, что допущение A является чужеродным элементом в определении этих терминов. В действительности более странным является принятие A, чем его отсутствие (не отрицание, а именно присутствие).

Вопрос о том, все или не все эмпирические индивиды суть частицы (суть волны) в интервале времени своего существования есть вопрос внелогический. С логической точки зрения можно сказать лишь следующее. Внелогические гипотезы «Каждый эмпирический индивид есть частица» и «Каждый эмпирический индивид есть волна» логически непротиворечивы как по отдельности, так и совместно. Точно также внелогический характер имеют утверждения о существовании эмпирических индивидов, которые суть частицы, и эмпирических индивидов, которые суть волны. Но если последние утверждения поддаются опытной проверки, то первые не могут быть подтверждены и опровергнуты опытным путем. Интересно, что опытным путем нельзя подтвердить и опровергнуть логически непротиворечивые (но также внелогические) утверждения «Некоторые эмпирические индивиды в принципе (ни при каких обстоятельствах) нельзя рассматривать как частицы (как волны)».

§ 15. Траектория

Траектория движения индивида a во временном интервале t есть упорядоченный ряд положений a в пространстве такой, что $x = f(y)$, где x есть переменная для положений a в пространстве, в y — для моментов времени в t.

Пусть x^1 есть положение индивида a в пространстве во время t^1, а x^2 — положение a в пространстве во время t^2 после t^1. Интервал между t^1 и t^2 не меньше минимального. Пусть он минимален или близок к этому. Чтобы зафиксировать положение индивида в пространстве, наблюдатель должен затратить время α, которое не меньше минимального, ибо наблюдение — тоже эмпирические событие. Пусть это время минимально или близко к минимальному. Фиксируя положение a в t^1, наблюдатель тратит время α. За это время a перемещается из x^1 в x^2. Приступив к установлению положения a в дальнейшем (после t^1), наблюдатель уже не может зафиксировать положение a в x^2.

Таким образом, при наблюдении движения индивидов на расстояниях и в интервалах времени, близких к минимальным, наблюдатель теряет возможность установить зависимость их положения в пространстве от времени, т. е. их траекторию Он может установить лишь конечные результаты движения индивидов за время и в областях пространства, далеких от минимального. Понятие траектории при этом теряет практический смысл.

Из сказанного не следует, будто микрообъектам не свойственно двигаться по каким-то траекториям. Из сказанного следует лишь то, что одинаково бессмысленно как приписывать микрообъектам способность двигаться по определенным траекториям, так и отрицать такую способность у них. Утверждения такого рода нельзя подтвердить и опровергнуть, — они непроверяемы.

Из сказанного, далее, не следует, что для микрообъектов нельзя подходящим образом определить термин «траектория» так, чтобы утверждения о микрообъектах с этим термином стали проверяемыми. Это можно сделать, используя описания результатов воздействия микрообъектов на макрообъекты (на приборы).

§ 16. Часть и составное

Термины «часть» и «состоящее из частей» («составное», «целое») многосмысленны. Рассмотрим такие два принципиально различные их употребления, которые часто смешивают с парадоксальными последствиями). Первое употребление. Предмет a считается частью предмета b (a b содержит в себе a как часть) в таких двух случаях:

1) b есть скопление предметов, a включается в это скопление, кроме a в скопление b включается еще по крайней мере один другой предмет;

2) a есть собственная подструктура структуры b.

В обоих случаях предполагается актуальная или потенциальная расчленяемость на предметы, среди которых содержится a (во втором случае предполагается потенциальная расчленяемость). При этом вполне естественно принимается допущение $A : b$ по протяженности (пространственной или временной) превосходит a («часть меньше целого»). Второе употребление этих терминов относится к случаям, когда предмет b распадается (разлагается) на предметы $a^1, \ldots, a^n$ или складывается из их соединения. Например, в этом случае молекула воды состоит из атомов кислорода и водорода. При этом имеется в виду уже не принципиальная возможность обнаружить наличие $a^1, \ldots, a^n$ в b, а результат соединения $a^1, \ldots, a^n$ или результат распада b. Эти

случаи и дают богатую область примеров для критики «здравого смысла» и «обычной» логики (например, из слияния двух капель ртути образуется одна капля ртути, так что правило $1 + 1 = 2$ якобы не имеет универсальной значимости).

Но обратимся к эмпирическим индивидам, протяженность и длительность существования которых близки к минимальным. Если b имеет минимальные размеры (длину или длительность) и принято A, то a^i не может быть частью b, поскольку a^i не может иметь размеры меньше минимальных. Таким образом, либо следует согласиться с тем, что понятия части и составного неприменимы к микрообъектам, размеры которых принимаются как близкие к минимальным, либо следует отвергнуть допущение A, как неправомерный элемент определения терминов «часть» и «составное».

Если в определении требуется оставить какое-то допущение о соотношении части и составного, то кажется более уместным ослабленное допущение B: если a есть часть b, то a не превосходит по размерам b. Однако строение индивидов, размеры которых близки к минимальным, нельзя усмотреть в них как таковых, не разрушая их целостность. Здесь можно наблюдать лишь продукт их распада. А образовавшиеся в результате их распада индивиды в свою очередь имеют размеры не меньше минимальных. Так что если $a^1, \ldots, a^n$ суть продукты распада индивида b, имеющего минимальные размеры, то все $a^1, \ldots, a^n$ не меньше по размерам b. Если рассматривать $a^1, \ldots, a^n$ как части b, то логически несуразного при условии соответствующей договоренности (в частности, отказа от A) в этом ничего нет, хотя совпадение по размерам частей и целого кажется парадоксальным. Но если это вызывает какой-то протест, то следует просто отказаться от применения терминов «часть» и «составное» к отношению $a^1, \ldots, a^n$ и b. В конце концов, люди должны господствовать над словами, а не слова над людьми.

Выражения «делим» и «неделим» также двусмысленны. В первом смысле делимость и неделимость понимаются как возможность и, соответственно, невозможность обнаружить в индивиде по крайней мере две различимые части, которые меньше его самого по размерам. Во втором смысле имеется в виду возможность и, соответственно, невозможность разделить (разложить, разрушить) данный индивид так, что в результате образуются по крайней мере два различимых индивида, отличные от него. Лишь в первом смысле делимый индивид по размерам равен сумме размеров частей, на которые он делится. Во втором смысле не исключено, что продукты распада превышают по размерам разлагаемый индивид. Сказанное относится как к макрообъектам, так и микрообъектам.

Если индивид имеет минимальные или близкие к минимальным размеры, то он неделим лишь в первом смысле. Каким он является во втором смысле, вопрос внелогический. Во всяком случае допущение делимости его во втором смысле не противоречит неделимости его в первом смысле. Если тело a, имеющее минимальные размеры, распадается на два и более тела, то объем последних больше объема a. Поскольку продукты распада индивида могут превосходить по размерам сам распадающийся индивид, то не к любым индивидам, являющимся продуктами распада данного индивида a, применим термин «часть» при том условии, что принято допущение «часть не превосходит по размерам индивид, частью которого она является». Так, не любые продукты взрыва бомбы можно в этом случае называть частями бомбы (и в языковой практике интуитивно этому следуют).

§ 17. О прогнозах

Логически обоснованные прогнозы относительно эмпирических состояний строятся по схеме

$$x^* \wedge y \rightarrow z^*,$$

где x^* есть совокупность высказываний x о состоянии той или иной области мира A во время t^1 (т. е. x^* есть «x в t^1»), z^* есть совокупность высказываний о состоянии A во время t^2 после t^1 (т. е. z^* есть «z в t^2»), а y есть совокупность высказываний, благодаря которой из x^* получается z^* и без которой из x^* получить z^* невозможно. Высказывание z^* есть прогноз относительно A, если оно получено в t^1. Будем называть x эмпирическим условием прогноза z^*, а y — логическим условием прогноза z^*.

Логические условие y прогноза z^* либо непосредственно есть высказывание типа $\omega \rightarrow v$, либо в логике имеются правила такие, что

$$\vdash y \leftrightarrow (\omega \rightarrow v),$$
$$y \dashv\vdash (\omega \rightarrow v).$$

Причем $\omega \rightarrow v$ есть такое высказывание, что по правилам логики (в частности, по правилам подстановки терминов на место переменных или видовых терминов на место родовых) из него получается высказывание

$$x^* \rightarrow z^*.$$

Последнее (как и первое) есть высказывание о связи, поскольку в нем фигурирует временное отношение эмпирических состояний.

Детерминизм, как уже отмечалось, понимается так же как эвристический принцип, согласно которому можно предсказать состояние A в t^2 с любой степенью полноты и точности (приближения), если только можно знать состояние A в t^1 с достаточной степенью приближения. Предельный случай — если состояние A в t^1 известно с абсолютной полнотой и точностью, то с той же степенью полноты и точности можно предсказать, каким будет состояние A в t^2.

Обращаем внимание на то, что сам рассматриваемый принцип имеет строение $C \to D$. Так что если будет установлено, что C неверно, то из этого никак не будет следовать ошибочность самого $C \to D$. Последнее может быть истинным при неистинном C и может быть неистинным при истинном C. С логической точки зрения верное утверждение о том, что невозможно в данное время t^1 знать об A все и с полной точностью, не есть еще само по себе аргумент против принципа детерминизма. В частности, утверждение «Если нам известно об A в t^1 все, то мы можем точно предсказать состояние A в t^2» нельзя подтвердить, но нельзя и опровергнуть, если в t^1 об A знать все невозможно. Но в качестве резкой (крайней) формулировки некоторого эвристического принципа, который с массой оговорок и лишь в некоторых случаях дает положительный эффект, оно не таит в себе ничего страшного. Вообще принцип детерминизма даже в такой крайней формулировке (как и многие другие принципы, которые стало модным «опровергать» со ссылками на прогресс науки) заслуживает более снисходительного отношения, чем это принято.

Второе обстоятельство, на которое следует обратить здесь внимание, состоит в том, что в формулировках принципа детерминизма обычно указывают только на эмпирическое условие прогноза и опускают логическое условие. Включает ли этот принцип допущение неограниченной возможности нахождения логических условий прогнозов или нет? В зависимости от того или иного ответа на вопрос получаются весьма различные принципы.

Если даже допустить неограниченную возможность построения высказываний $\omega \to v$, образующих логическое условие прогнозов для отдельных состояний, существование дополнительных высказываний ведет к такому следствию.

Если в высказываниях $A^1 \to B$ и $A^2 \to C$ антицеденты A^1 и A^2 суть дополнительные высказывания, то $A^1 \wedge A^2$ не может быть истинным, и воспользоваться объединением этих условных высказываний в $A^1 \wedge A^2 \to B \wedge C$ практически невозможно.

Высказывания, позволяющие делать прогнозы и сводимые в конце концов к виду $\omega \to v$, строятся и имеют силу при определенных условиях. Если в $A^1 \to B$ и $A^2 \to C$ высказывания A^1 и A^2 дополнительны, то они дополнительны при одних и тех же условиях. Но тогда из них может

быть использовано лишь одно. Они оба могут быть использованы лишь при разных условиях α и β, которые несовместимы, т. е. для которых верно $\sim(\alpha \wedge \beta)$. Так что либо одно и те же условия, но $\sim(A^1 \wedge A^2)$, либо разные условия, но $\sim(\alpha \wedge \beta)$.

Дополнительные высказывания суть частный случай отношения высказываний, при котором $A^1 \rightarrow\!\sim A^2$, и условия истинности α и β высказываний соответственно A^1 и A^2 также находятся в зависимости $\alpha \rightarrow\!\sim\beta$. В результате объединение $A^1 \rightarrow B$ и $A^2 \rightarrow C$ в $A^1 \wedge A^2 \rightarrow B \wedge C$ оказывается практически бесполезным делом. А поскольку здесь имеют дело с эмпирическими связями, для которых по определению из $A^1 \wedge A^2$ логически не следует $B \wedge C$, то такого рода сложные высказывания не могут быть истинными.

Таким образом, существование дополнительных высказываний имеет неизбежным следствием невозможность построения в ряде случаев таких истинных высказываний, которые могли бы стать логическим условием прогнозов.

§ 18. Обобщения результатов науки

Крайние обобщения результатов науки осуществляются в языковых выражениях, которые могут быть эксплицированы средствами логики. С логической точки зрения они остаются лишь допущениями относительно эмпирических предметов, какое бы количество примеров не приводили бы в их подтверждение и каким бы социальным престижем эти примеры не обладали. Чтобы эти обобщения приобрели доказательность, надо упомянутые языковые выражения определить подходящим образом, и из таких определений получить рассматриваемые обобщения в качестве логических следствий. Но построение определений языковых выражений в рамках логики уже не зависит ни от каких результатов наук. Так что величайшие достижения физики (и любой другой науки) не вносят в получающуюся здесь обобщенную картину Мира абсолютно ничего такого, что нельзя было бы заметить в обычном опыте. И это в силу свойств самой логической техники построения языковых выражений. Развитие науки дает стимулы для работы в этом направлении и привлекает внимание к фактам, которые лежат на поверхности, но на которые до того не обращали внимания. В результате крайние обобщения результатов наук оказываются (если достаточно строго и ясно установить их смысл) банальными истинами, примеры для которых человек способен обнаружить в своем житейском опыте невооруженным глазом. Они небанальны лишь в своей неясности и неопределенности, т. е. как явления идеологические, а не научные. И лишь вопрос о доказательности таких обобщений есть нетривиальный вопрос логической обработки языка.

Об авторе

Зиновьев Александр Александрович — всемирно известный логик, социолог, писатель, публицист. Родился в 1922 г. в д. Чухлома Костромской области, прошел всю Великую Отечественную войну в качестве боевого летчика. Окончил философский факультет МГУ им. М. В. Ломоносова в 1951 г., в 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию «Логика "Капитала" Маркса», в 1964 — докторскую диссертацию «Философские проблемы многозначной логики». С 1959 по 1976 гг. — научный сотрудник Института философии АН СССР. Опубликовал ряд монографий по логике и методологии науки («Философские основы многозначной логики», «Основы логической теории научных знаний», «Логическая физика») и более ста статей, многие из которых переведены на английский, немецкий, испанский, итальянский и другие языки. Разработал оригинальную концепцию логики и решил целый ряд ее важнейших проблем. За логические исследования был избран в Академию наук Финляндии. В 1978 г. после публикации в швейцарском издательстве «L'hage d'homme» романа «Зияющие высоты» был выслан из страны и 21 год жил в эмиграции в Мюнхене. А. А. Зиновьев создал теорию советского коммунизма, посвятив этому ряд социологических романов («Желтый дом», «Светлое будущее» и др.), научных и научно-публицистических трудов («Коммунизм как реальность», «Горбачевизм», «Русский эксперимент», «Смута» и др.). С конца 80-х гг. предметом его исследовательского интереса стала трансформация Запада в глобальное сверхобщество («Глобальный человейник», «Западнизм» и др.). Социологическая теория А. А. Зиновьева обобщена в труде «На пути к сверхобществу» (2000 г.). Всего им написано около 50 книг. В 1999 г. А. А. Зиновьев вернулся в Москву, ведет активную педагогическую, научную, общественную работу.



Уважаемые авторы и издатели!

Межиздательский дистрибьюторский центр неучной литературы, созданный при издательстве **УРСС,** приглашает авторов, издательства и другие организации к взаимовыгодному сотрудничеству по вопросам распространения печатной продукции.

Межиздательский дистрибьюторский центр научной литературы ведет работу по распространению книг ряда авторов и нескольких издательств, среди которых московские издательства **УРСС,** «МЦНМО» (Московский Центр непрерывного математического образования) «Янус», «Факториал», издательство Санкт-Петербургского университета и др.

Уважвемые читатели! Уважаемые авторы!

Издательство **УРСС** специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.

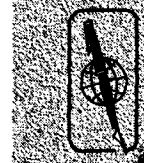
Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским гуманитарным научным фондом и Российским фондом фундаментальных исследований, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя весь спектр работ по полной подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Книги, распространяемые Межиздательским дистрибьюторским центром научной литературы, можно приобрести в магазинах:

«*Библио-Глобус*» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. 928-87-44)
«*Московский дом книги*» (ул. Новый Арбат, 8. Тел. 290-45-07)
«*Академкнига*» (Б.Черкасский пер., 9; ул. Вавилова, 55. Тел. 298-30-28)
«*Дом научно-технической книги*» (Ленинский пр., 40. Тел. 137-06-33)
«*Москва*» (м. Охотный ряд, ул. Тверская, 8. Тел. 229-66-43)
«*Ad Marginem*» (1-й Новокузнецкий пер., 5/7. Тел. 231-93-60)
«*Русский путь*» (ул. Нижняя Радищевская, 2. Тел. 915-10-47)
«*Гнозис*» (Тел. 247-17-57)
«*С.-Пб. дом книги*» (Невский пр., 28)
а также в книжных киосках МГУ (Воробьевы горы)

По всем интересующим Вас воиросам
Вы можете обратиться в издательство:
***тел./факс* 135-44-23, *тел.* 135-42-46**
или *электронной почтой* urss@urss.ru
Полный каталог изданий представлен
в *Internet-магазине:* http://urss.ru





Книги издательства УРСС

Эволюционная эпистемология Карла Поппера и логика социальных наук. Ред. *Садовский В.Н.*

Садовский В.Н. **Карл Поппер и Россия.**

Философия, наука, цивилизация. Ред. *Казютинский В.В.*

Цивилизация, культура, личность. Ред. *Келле В.Ж.*

Шрейдер Ю.А. **Ценности, которые мы выбираем.**

Соколов В.В. **От философии Античности к философии Нового Времени.**

Грифцова И.Н. **Логика как теоретическая и практическая дисциплина.**

Логико-философские труды В.А.Смирнова. Ред. *Васюков В.И.*

Зубов В.П. **Аристотель.** *Орем Н.* **О конфигурации качеств.**

Овчинников Н.Ф. **Методологические принципы в истории научной мысли. Метаморфозы эпистемологического дискурса.**

Черняк А.З. **Проблема оснований знания и феноменологическая очевидность.**

Системные аспекты психической деятельности. Ред. *Судаков К.В.*

Быховская И.М. **"Homo somatis": от природы данности к телесной культуре.**

Человеческий потенциал: опыт комплексного подхода. Ред. *Фролов И.Т.*

Алексеева Т.А. **Нужна ли философия политике?**

Пантин И.К. **Россия и мир: историческое самоузнавание.**

Юлина Н.С. **Очерки по философии в США. XX век.**

Судаков А.К. **Абсолютная нравственность.**

Системные исследования. Вып. 23-26. Ред. *Гвишиани Д.М.*

Биоэтика: принципы, правила, проблемы. Ред. *Юдин Б.Г.*

Федотова В.Г. **Анархия и порядок.**

Розин В.М. **Эзотерический мир в контексте культуры.**

Василенко И.А. **Диалог цивилизаций: социокультурные проблемы политического партнерства.**

Социологи России и СНГ XIX-XX вв. Биобиблиографический справочник. Ред. *Дороговцев М.Ф.*

Шапиро Д.И. **Человек и виртуальный мир. Когнитивные, креативные и прикладные проблемы.**

Гидденс Э. **Социология.**

Низовцев В.В. **Время и место физики XX века.**

Розин В.М. **Типы научного мышления. Формирование и особенности.**

Павлович Н.В. **Словарь поэтических образов.** Т.1,2.

Интернет-магазин **http://urss.ru**

